Quido Vetter

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 97--104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122331

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kuželoseček.

(Důkazy vět, uveřejněných Steinerem v Crelleově Journalu sv. XLV., str. 212—224, Gesammelte Werke d. II., str. 467—483.)

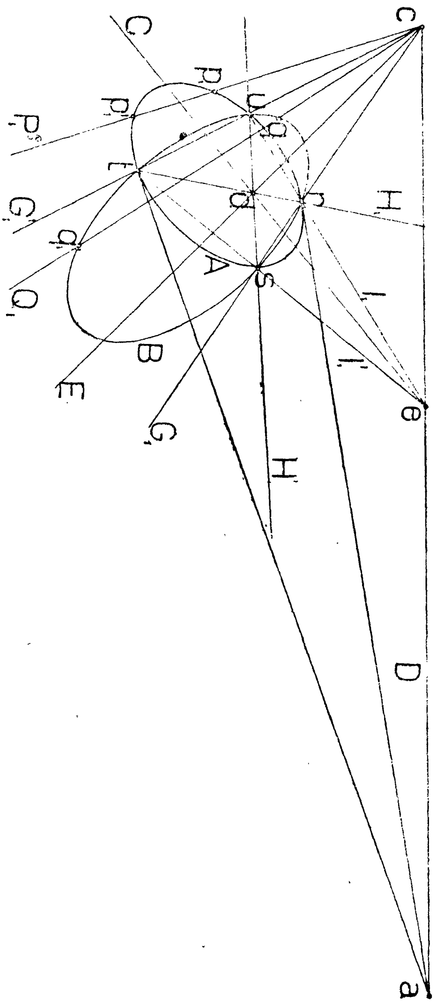
Dr. Q. Vetter.

§ 1. V pojednání „Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte" uveřejnil Steiner bez důkazů řadu vět o kuželosečkách, které se dvojnásobně dotýkají dvou daných kuželoseček. Jest to pokračování vět uveřejněných Steinerem v pojednání „Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven", jichž důkazy jsem podal v Časopise čes. math. a fys. r. XLIV. str. 415 nn.

Úvahy následující jsou založeny na témže podkladě jako ve zmíněném článku. Věty uvedeme zase dle J. Steiner's Gesammelte Werke, díl II. str. 467—483. Také označení vzhledem na přehlednost vývodů zase pozměníme.

§ 2. Dané kuželosečky A a B nechť leží v půdorysně (obr. 1.). Jednou z nich, A, proložíme plochu 2. stupně α, dle půdorysny souměrnou, druhou na půdorysně kolmý válec β. Průsečná křivka α a β jest 4. stupně, kterou lze proložiti 4 plochy kuželové 2. stupně β, γ, δ, ε. Vrcholy těchto kuželů leží ve vrcholech společného polárního čtyřstěnu ploch α a β, tedy v nekonečnu na kolmici k půdorysně — válec β a ve společných sdružených pólech c, d a e obou daných kuželoseček — kužely γ, δ a ε. Tečné roviny těchto tří kuželů protínají plochu α v kuželosečkách Σ, jejichž půdorysy Σ_1 se dvojnásobně dotýkají kuželosečky A, obrysu to půdorysu plochy α, a kuželosečky B, neboť Σ se dotýká ve dvou bodech průsečné křivky ploch α a β, které leží na dotykové povrchové přímce kužele γ po případě δ

nebo ε. Kuželosečky Σ jsou seskupeny ve tři skupiny dle toho, kterého kužele se dotýkají, což označíme Σ^γ, Σ^δ, Σ^ε. Vlastnosti jednotlivých skupin jsou úplně stejné.



Obr. 1.

Steiner zase předpokládá, že kuželosečky A a B, jakož i Σ_1 jsou reálné. Věty ovšem platí s nutnými změnami pro případ, že jedna nebo obě dané kuželosečky jsou imaginární. Jsou-li obě dané kuželosečky reálné a aspoň jedna, A, elipsa, použijeme pro křivky uvnitř A ležící elipsoidu, vně A ležící jednoplochého hyperboloidu. Není-li žádná z daných kuželoseček reálnou elipsou a je-li A hyperbolou, proložíme touto kuželosečkou jednoplochý nebo dvojplochý hyperboloid, je-li A parabolou, eliptický nebo hyperbolický paraboloid. Je-li aspoň jedna z daných kuželoseček imaginární, použijeme dvojplochého hyperboloidu. Je-li rovina řezu reálná, jsou Σ a Σ_1 buď reálné kuželosečky nebo imaginární elipsy, je-li však rovina řezu imaginární, jsou to obecné imaginární kuželosečky. K imaginárním řezům a křivkám nebudeme přihlížeti.

§ 3. *Jest lhostejno, kterou z daných kuželoseček proložíme plochu druhého stupně α.*

Důkaz lze provésti doslovně tak, jako v uvedeném článku, zaměníme li jen slova: kružnice A a B a rotační plocha α slovy kuželosečky A a B a plocha 2. stupně α.

§ 4. *Dotykové tětivy kuželosečky Σ_1 s kuželosečkami A a B procházejí pólem c a dělí harmonicky strany G_1 a G'_1 čtyřrohu $rstu$, pólem c procházející, kdež body r, s, t, u jsou průsečíky kuželoseček A a B* (Steiner, l. c. 472.).

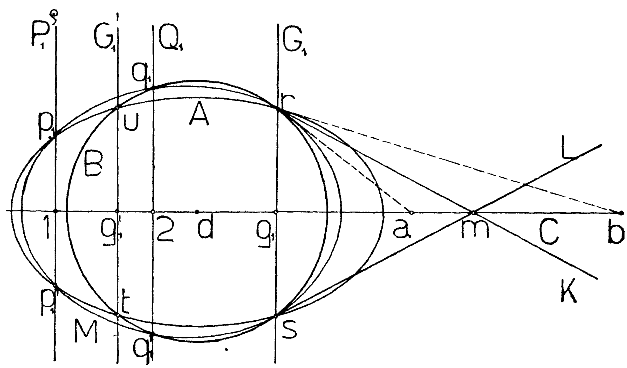
Dotyková tětiva $P_1\varrho$, která prochází dotyčnými body kuželosečky Σ_1 s A, jest stopou roviny řezu ϱ, druhá, Q_1, jest průmětem povrchové přímky Q, podél které se ϱ kužele γ dotýká. Poněvadž vrchol kužele c leží v půdorysně, procházejí obě dotykové tětivy bodem c. Ze souměrnosti kužele γ dle půdorysny plyne, že polárná rovina bodů, ležících na přímce $P_1\varrho$ vrcholem jeho procházející, jest na půdorysně kolma a tedy totožna s promítající rovinou přímky Q. Rovina ta dělí spolu s $P_1\varrho$ harmonicky přímky G_1 a G'_1, v nichž kužel γ půdorysnu protíná.

§ 5. *Dotyčné body p_1, p'_1, q_1 a q'_1 kuželosečky Σ_1 s křivkami A a B leží s rohy r a s na jediné kuželosečce M. Všecky kuželosečky M dotýkají se v r a s týchž tečen K a L, tvoříce svazek. Průsečík K a L, bod m, leží na poláře C a tvoří s body s, b a g_1 harmonickou čtveřinu, kdež body a a b jsou póly přímky G_1 vzhledem ke kuželosečkám A a B a g_1 jest průsečík přímek C_1 a C.* (Steiner, l. c. 473.)

Přímkami P_1^{φ}, Q_1 a G_1, jež všechny procházejí bodem c, lze položiti kužel o vrcholu c dle půdorysny souměrný. Kužel ten protíná plochu α v křivce 4. stupně, na níž leží body p, p', q, q', r a s a která se promítá do kuželosečky M.

Považujme nyní (obr. 2.) kuželosečku M za pevnou a A a B za křivky svazku. Aby výpočet byl jednodušší, budiž celý obrazec transformován tak, aby čtyřúhelník $rstu$ byl čtvercem o straně $2a$. Body c a e budou v nekonečnu, polára C stane se osou všech křivek. Položíme-li střed souřadnic do středu d čtverce a osu úseček do C, jest rovnice kuželosečky M:

$$x^2 - 2bx + cy^2 = a^2(1 + c) - 2ab,$$



Obr. 2.

kdež b jest úsečka středu křivky M a c konstanta. Svazek soustředných kuželoseček procházejících body r, s, t a u jest dán rovnicí:

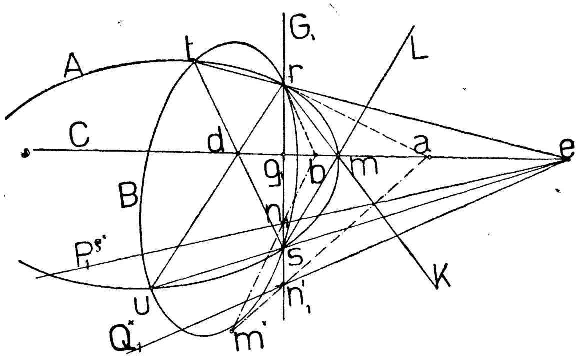
$$kx^2 - y^2 = a^2(k - 1),$$

kdež k jest směrnicí tečny jednotlivé kuželosečky svazku v bodě r (a, a). Vyloučíme-li z těchto rovnic y a zkrátíme-li výrazem $(x - a)$, obdržíme rovnici:

$$cxk + x + ack - 2b + a = 0,$$

která ukazuje, že každá kuželosečka svazku protíná M mimo v bodech r a s ještě v dalších dvou bodech, jejichž spojnice, procházející bodem c v nekonečnu, vytíná na poláře C řadu bodů s tečnami svazku v r projektivnou. Do svazku náleží také tyto křivky: A, B, kuželosečka dotýkající se v r a s křivky M, a kuželosečka degenerovaná v přímky G_1 a G'_1. Tečny jim příslušné jsou $\overline{ra}$, $\overline{rb}$, K a G_1. Spojnice průsečných bodů vytínají na C body 1, 2, g_1 a g_1'. Body ty tvoří ale harmonickou čtveřinu, pročež i tečny v r jsou harmonické a tudíž i jejich průsečíky s polárou C, dvojice bodů a a b a dvojice m a g_1 se harmonicky dělí. Bod m jest tudíž pro všecky kuželosečky M tentýž a kuželosečky ty tvoří svazek, dotýkající se K a L v r a s.

§ 6. *Všechny póly přímky G_1 vzhledem ke kuželosečkám Σ_1^{δ}, jakož i vzhledem ke kuželosečkám Σ_1^{ε}, póly a a b přímky G_1 vzhledem k A a B a průsečíky tečen y_1, y_1', z_1 a z_1' leží*



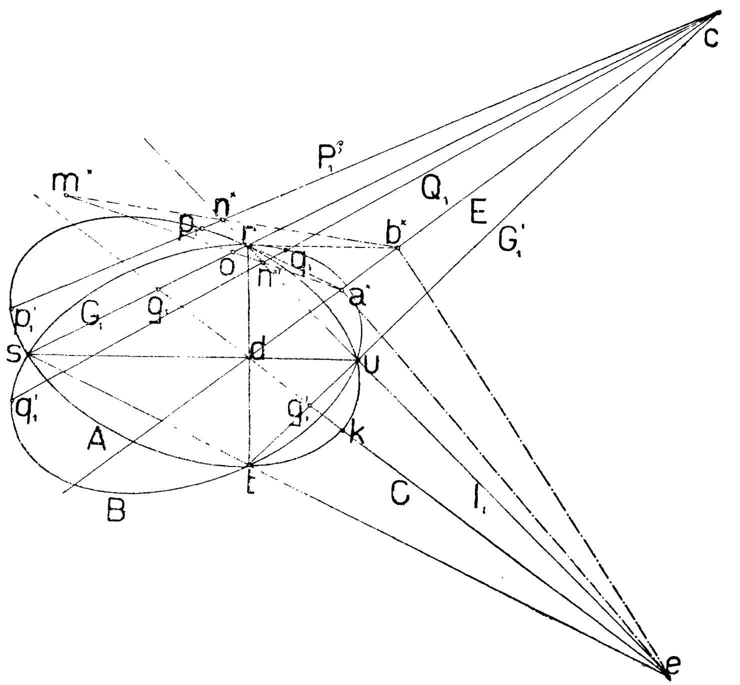
Obr. 3.

na kuželosečce M^*, která se tečen K a L v bodech r a s dotýká a patří tedy do svazku v § 5. definovaného. Podobná věta platí i o přímkách obdobných, totiž G'_1, H_1, H'_1, I_1 a I'_1. (Steiner, l. c. 476.)

Kolmice v a (obr. 3.) na průmětnu vztyčená a G_1 jsou sdružené poláry plochy α. Poněvadž $P_1\varrho^*$ jest půdorysnou stopou řezu ϱ^*, prochází polární rovina průsečíku n_1 přímek G_1 a $P_1\varrho^*$ onou kolmicí a protíná rovinu ϱ^* v poláře bodu n_1 vzhledem ke kuželosečce Σ^{ε}. Její průmět prochází bodem a a jest nejen polárou bodu n_1 vzhledem k Σ_1^{ε}, nýbrž i vzhledem ke kuželosečce A; proto dělí body n_1 a n'_1, v němž zmíněná polára G_1 protíná, r a s harmonicky, čili n'_1 leží v průsečíku přímek G_1 a Q_1^*. Řada bodů n_1 a svazek příslušných polár bodem a procházejících jsou projektivné. My můžeme také B považovati za obrys plochy druhého stupně, pak jest Q_1^* půdorysnou stopou a poláry bodů n'_1 opisují kol b také svazek projektivné řadě n'_1. Protože však řady n_1 a n'_1 jsou rovněž projektivné, jsou i svazky polár projektivné a vytvořují kuželosečku M^*. Průsečíky příslušných polár jsou póly jich spojnice G_1, čímž tvrzení dokázáno. M^* prochází vrcholy obou svazků a a b. Splyne-li $P_1\varrho^*$ s I_1 nebo I'_1, degeneruje se $\Sigma_1{}^\varepsilon$ v body r, u. po případě s, t a pól přímky G_1 splyne s r, po případě s s, kterýmiž body také M^* prochází. Tečny v a a b k M^* vedené procházejí bodem c, jenž s g_1 harmonicky dělí r a s, a proto jsou přímky G_1 a C sdruženými polárami M^*. Pól přímky G_1 vzhledem k M^* leží na C a dělí s g_1 harmonicky body a a b; jest to tedy bod m. Patří tudíž M^* do svazku v § 5. definovaného, dotýkajíc se přímek K a L. Poněvadž kuželosečka pólů přímky G_1 vzhledem ke kuželosečkám $\Sigma_1{}^\delta$ jest taktéž dána body a, b, r a s a tečnami K a L, jest totožna s M^*. Na kuželosečce té leží i póly degenerovaných křivek obou soustav, totiž body y_1, y'_1, z_1 a z'_1.

§ 7. *Dotýká-li se $\Sigma_1\gamma$ kuželoseček A a B v bodech p_1, p'_1, q_1 a q'_1, jsou spojnice $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_1q_1'}$, $\overline{p'_1q_1}$ a $\overline{p'_1q'_1}$ tečnami určité kuželosečky Δ, jež se dotýká společných tečen $R_1S_1T_1$ a U_1 a přímek G_1 a G'_1; tečny vedené k Δ z průsečíků poláry C a kuželosečky A dotýkají se Δ v průsečících s kuželosečkou B.* (Steiner, l. c. 472.)

Poněvadž přímky $P_1\varrho$ a Q_1 bodem c procházejí (obr. 4.) a body p_1, p'_1, q_1 a q'_1 přímkou C a bodem c jsou harmonicky děleny, jest c diagonálným rohem a C diagonálnou stranou čtyřrohu $p_1p'_1q_1q'_1$, tedy i čtyřstranu vytčených spojnic. Řada kuželoseček čtyřstranu vepsaných stanoví ve svazku tečen z bodu c involuci, jejíž dvojné paprsky jsou $P_1\varrho$ a Q_1. Přímky G_1 a G'_1 dělí tyto přímky harmonicky, pročež jsou rovněž dvojicí zmíněné involuce. Kuželosečka Δ dotýkej se G_1 a G'_1 a to na poláře C v bodech g_1 a g'_1. Buďtež a^* a b^* póly přímky I_1 vzhledem k A a B, m^* pólem téže přímky vzhledem k $\Sigma_1\gamma$, který dle vývodů § 6. leží v průsečíku přímek $\overline{n^*b^*}$ a $\overline{n^{*\prime}a^*}$, kdež n^* a $n^{*\prime}$ jsou průsečíky I_1 s $P_1\varrho$ a Q_1. Řada kuželoseček vytčenému čtyřstranu vepsaných stanoví v m^* involuci tečen, jejíž dvojice jsou také přímky $\overline{m^*p_1}$, $\overline{m^*p'_1}$ a $\overline{m^*q_1}$, $\overline{m^*q'_1}$. Dále jest n^* pólem spojnice $\overline{m^*a^*}$ vzhledem ke kuželosečce $\Sigma_1 r$. Čtveřina $n^* p_1 o p'_1$, kdež o jest průsečíkem $P_1 \varrho$ s $\overline{m^*a^*}$, jest harmonická, jakož i čtveřina spojnic bodu m^* s b^*, p_1, a^* a p'_1, jimi procházejících. Stejně bychom to dokázali pro spojnice



Obr. 4.

bodu m^* s b^*, q_1, a^* a q'_1, pročež $\overline{m^*a^*}$ a $\overline{m^*b^*}$ jsou dvojné paprsky involuce tečen zmíněné řady kuželoseček v m^*; tyto dvojné paprsky jsou proto sdruženými polárami kuželosečky Δ. Poněvadž e a E jsou pólem a polárou všech kuželoseček uvažované řady, jsou spojnice $\overline{a^*m^*}$, $\overline{a^*b^*}$, $\overline{a^*e}$ a $\overline{b^*m^*}$, $\overline{a^*e}$, $\overline{b^*a^*}$ sdruženými polárami kuželosečky Δ, které tvoří dva projektivné svazky a jejichž vrcholy a^* a b^* jsou jejími sdruženými póly. Tečny G_1 a G'_1 s dotyčnými body g_1 a g'_1, jakož i body a^* a b^* jsou pro všechny kuželosečky $\Sigma_1 r$ tytéž a tedy i kuželosečka Δ jest obalena spojnicemi dotyčných bodů všech $\Sigma_1 r$. K nim patří i společné tečny kuželoseček R_1, S_1, T_1 a U_1, neboť degeneruje li se $\Sigma_1 r$ v tyto tečny, leží v nich spojnice dotyčných bodů na A a B.

Průsečík A a C, bod k, jest dotyčným bodem tečny z c k A vedené. Splyne-li $P_1 \varrho$ s touto tečnou, splývají spojnice $\overline{p_1 q_1}$ a $\overline{p'_1 q_1}$ s $\overline{k q_1}$, takže se q_1 stane dotyčným bodem tečny té na kuželosečce Δ, která prochází takto definovaným bodem q_1 na B, čímž poslední část věty dokázána.

Steiner praví dále, (l. c. 473.), že kuželosečka Δ se dotýká přímek K a L v jejich průsečících s G'_1, což však, jak v dodatku k sebraným spisům (l. c. 740.) správně ukázáno, není možné. (Dokončení.)

Příspěvek k matematické theorii invalidního pojištění.

Dr. **Emil Schoenbaum.**

Ve svém pojednání v Rozpravách české akademie ukázal jsem, že matematická theorie některých kolektivních zjevů vede k integrálním rovnicím Volterrovým, tak ku příkladu theorie invalidního pojištění, přihlížíme-li k možnosti opětného nabytí aktivnosti. V tomto článku převádím jiný problem, daleko jednodušší, na řešení integrální rovnice, při čemž se naskytá příležitost, odvoditi také nové řešení některých jiných úloh v praksi se vyskytujících.

1. Mysleme si jistý souhrn aktivních osob homogenního složení a určitého stáří a pozorujme je po nějakou dobu. Během té doby zemře jich určitý počet a určitý počet stane se invalidními. Vzniknou tak během času z původního počtu aktivních osob dvě skupiny: skupina aktivních osob, která se zmenšuje invalidisacemi a umíráním, a skupina osob invalidních, která roste přistupováním nových invalidů ze skupiny osob aktivních a zmenšuje se umíráním invalidů, jež nechť se řídí jinými zákony než umírání aktivních osob. Obě skupiny shrnuty udávají počet osob, které jsou z oné původní skupiny aktivních osob ještě na živu buď jako aktivní nebo invalidní osoby.