Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 1, 93--104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122442

Úlohy.

I. Z mathematiky.

Řešení úlohy 3.

(Podává *V. Jaeger*, technik.)

Předložená řada jest jen zvláštní případ řady

$$S_k = a + 2aq + 3aq^2 + \ldots + kaq^{k-1}.$$

Patrně jest

$$S_k(1-q) = a + aq + \ldots + aq^{k-1} - kaq^k$$
$$= \frac{a(1-q^k)}{1-q} - kaq^k,$$

tedy

$$S_k = a\,\frac{1-(1+k)\,q^k + kq^{k+1}}{(1-q)^2}.$$

Pro $a = q = \frac{1}{2}$, $k = \infty$ vyplývá

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots \textit{in inf.} = 2.$$

Řešení úlohy 16.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Jsou-li x, y, z neznámé strany trojúhelníku, pak máme podle úlohy

$$x + y + z = \frac{2p}{\varrho}$$
$$xyz = 4pr$$
$$p^2 = \frac{p}{\varrho}\left(\frac{p}{\varrho} - x\right)\left(\frac{p}{\varrho} - y\right)\left(\frac{p}{\varrho} - z\right)$$

Z poslední rovnice vyplývá v spojení s prvními dvěma

$$xy + xz + yz = \varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}.$$

Hledané strany jsou tedy kořeny kubické rovnice

$$x^3 - \frac{2p}{\varrho} x^2 + \left(\varrho^2 + 4r\varrho + \frac{p^2}{\varrho^2}\right) x - 4pr = 0.$$

Pro zvláštní v úloze vytknutý případ máme rovnici

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

s kořeny 3, 4, 5.

(Správné rozluštění zaslal též *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gymnasia v Budějovicích.)

Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. tř. č. gym. v Budějovicích.)

Případ α.

Jsou-li x, y, z, u neznámé strany čtyrúhelníku, máme podle úlohy

$$xz = yu = a \tag{1}$$

$$x + y + z + u = b \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = c \tag{3}$$

z (1) a (3) jde

$$(x+z)^2 + (y+u)^2 = c + 4a \tag{4}$$

z této rovnice a z (2) pak

$$\left.\begin{aligned} x + z &= \frac{1}{2}\left(b \pm \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = f \\ y + u &= \frac{1}{2}\left(b \mp \sqrt{8a - b^2 + 2c}\right) = h \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

konečně z (5) a z (1)

$$x = \frac{1}{2}\left(f \pm \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(h \pm \sqrt{h^2 - 4a}\right),$$

$$z = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{f^2 - 4a}\right), \quad u = \frac{1}{2}\left(h \mp \sqrt{h^2 - 4a}\right).$$

Případ β.

V tomto případě máme výminečné rovnice

$$xz = yu = a \tag{1}$$

$$x + y + z + u = b \tag{2}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = d \tag{3}$$

Přičteme-li k (3) rovnici

$$3xz(x+z)+3yu(y+u)=3ab,$$

obdržíme

$$(y+z)^3+(y+u)^3=3ab+d \qquad (4)$$

Z této rovnice a z (2) vyplývá konečně

$$x+z=\frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=f,$$

$$y+u=\frac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{\frac{12ab-b^3+4d}{3b}}\right)=h.$$

Ostatní jako v případě α.

Řešení úlohy 21.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Majíce integrovati rovnici

$$y''+4xy'+(1+4x^2)y=0, \qquad (1)$$

položme

$$y=e^z, \qquad (2)$$

čímž přejde rovnice v

$$z''+(z'+2x)^2+1=0;$$

tato nabude substitucí

$$t=z'+2x \qquad (3)$$

tvaru

$$t'+t^2-1=0,$$

z kteréž integrací jde

$$x=\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+t}{1+t}+A \qquad (4)$$

Z rovnin (3) a (4) jde vyloučením proměnné t

$$z''=\frac{e^{2(x-A)}-1}{e^{2(x-A)}+1}-2x,$$

což integrováno dle x dává

$$z=B-x^2-x+l\left(e^{2(x-A)}+1\right).$$

Dle (2) jest tedy obecný integrál rovnice dané

$$y=C_1\,e^{-x(x+1)}+C_2\,e^{-x(x-1)}.$$

Řešení úlohy 22.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. tř. gymn. malostranského.)

Aby mohla hledaná 4 závaží x, y, z a u vyhověti v úloze udané podmínce, musí se vážiti i differencemi závaží a musí každé z nich býti o 1 větší nežli 2násobný součet jemu předcházejících závaží.

Bude tedy

$$
\begin{aligned}
x &= 2.0 + 1 = 1 \\
y &= 2x + 1 = 3 \\
z &= 2(x+y) + 1 = 9 \\
u &= 2(x+y+z) + 1 = 27\,.
\end{aligned}
$$

(Správné řešení zaslali též *V. Jaeger*, technik, *F. Štejnar*, technik, *A. Sucharda*, technik, *J. Kroutil*, filosof.)

Poznámka.

Jiným spůsobem řešil úlohu tuto *Brunet*, člen francouzského spolku mathematického, čímž zároveň podán důkaz, že i ve Francii si všímají našeho časopisu. Píšeť takto:

Supposons qu' avec un certain nombre de poids nous soyons arrivés à peser de 1 à N, et cherchons, avec un poids de plus, à peser jusqu' à un poids supérieur N' que nous allons déterminer. On voit aisément que le nouveau poids à prendre doit être $2N+1$, car en retranchant toutes les pesées dèja obtenues et qui s'échelonnent de 1 à N nous obtiendrons toutes les pesées échelonnées de N à $2N+1$. Si maintenant au nouveau poids $2N+1$ nous ajoutons toutes les pesées obtenues précédemment, nous pourrons peser jusqu' à $3N+1=N'$. Prenons encore un poids de plus: il vaudra

$$2N'+1 = 6N+3 = 3(2N+1)\,.$$

Ainsi chaque nouveau poids que nous prendrons pour répondre à la question sera le *triple* du précédent. Les poids successifs à prendre forment donc une progression géométrique dont la raison est 3; — et comme le poids 1 suffit pour peser 1, le premier terme de la progression est 1, de telle sorte que la série des poids à prendre est celle des puissances de 3.

Pour le problème particulier du Nr. 22, les 4 poids demandés sont

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,$$
$$1,\ 3,\ 9,\ 27,$$

qui permettent bien en effet de faire toutes les pesées de 1 à 40.

Řešení úlohy 23.

(Podává *F. Štejnar*, technik.)

Hledané číslo jeviti se bude v tvaru

$$u = 105n + \alpha a + \beta b,$$

v němž znamená α číslo, obsahující činitele 5 a 7 a dávající zbytek 1, byvši 3 děleno, tedy 70, β součinitele dělitelného 3, který dělen 5 a 7 poskytuje zbytek 1, tedy 36. Hledané číslo jest tedy

$$u = 105n + 70a + 36b.$$

(Správné řešení zaslali též *J. Kroutil*, filosof, *J. Kašpr*, *K. Trubáček*, filolog, *A. Sucharda*, technik.)

Řešení úlohy 24.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li a strana 7miúhelníka, r poloměr kruhu opsaného, jest hledaný poměr

$$x = \frac{a}{r} \text{ a } \sin\frac{\pi}{7} = \frac{x}{2},\ \cos^2\frac{\pi}{7} = 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do známé rovnice

$$\sin 7\alpha = 7\sin\alpha\cos^6\alpha - 35\sin^3\alpha\cos^4\alpha + 21\sin^5\alpha\cos^2\alpha - \sin^7\alpha$$

berouce $\alpha = \frac{\pi}{7}$, obdržíme po příslušné redukci

$$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$$

kteroužto rovnici dle methody Lagrange-ovy řešíce obdržíme

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}}$$

Řešení úlohy 25.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Volíme-li jeden z pevných vrcholů za počátek souřadnic, přímku spojující pevné vrcholy za osu x a probíhá-li třetí vrchol přímku

$$\eta = a\xi + b, \qquad (1)$$

pak jsou souřadnice těžiska trojúhelníku

$$x = \frac{1}{3}(\xi + c),\ y = \frac{1}{3}\eta, \qquad (2a)$$

souřadnice průsečíku výšek

$$x = \xi,\ y = \frac{\xi(c - \xi)}{\eta}, \qquad (2b)$$

v čemž značí c úsečku druhého vrcholu pevného.

Vyloučením veličin ξ a η z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$y = ax + \frac{b - ac}{3}$$

a

$$x^2 + axy - cx + by = 0$$

jakožto rovnice hledaných geometrických míst.

Poslední rovnice značí všeobecně hyperbolu, procházející oběma pevnými vrcholy.

(Správné řešení zaslali též *F. Štejnar*, technik, *J. Kašpr.*)

Řešení úlohy 26.

(Podává *K. Brož*, filosof.)

Probíhá-li třetí vrchol kružnici

$$(\xi - p)^2 + (\eta - q)^2 = r^2,$$

pak obdržíme, platí-li označení jako v úloze 25, co rovnice dráhy těžiska a průsečíku výšek

$$\left(x - \frac{c + p}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{3}\right)^2 = \frac{r^2}{9}.$$

a

$$y^2[(x - p)^2 - r^2] + [x(c - x) - qy]^2 = 0.$$

(Správné řešení zaslal též *J. Kašpr.*)

Řešení úlohy 27.

(Podává *J. Kroutil*, filosof.)

Poněvadž $l(\alpha + \beta e^x) = l[e^x(\alpha e^{-x} + \beta)] = x + l(\alpha e^{-x} + \beta)$ může se předložený výraz psáti ve formě

$$\int^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}\, l(\alpha e^{-x} + \beta)}{\frac{a}{x^2} + b} = \frac{1}{b}$$

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *V. Zelený*. žák VI. třídy r. gymn. malostr., *A. Lhota*, žák VII. třídy real. gymnasia Maade-a.)

Řešení úlohy 28.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Differencujeme-li řadu

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{8!} + \qquad (1)$$

dvakráte, obdržíme

$$y' = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} +, \qquad (2)$$

$$y'' = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \qquad (3)$$

a sečtením

$$y'' + y' + y = e^x$$

nebo

$$y''' - y = 0,$$

kteráž rovnice má integrál formy

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}, \qquad (4)$$

kde

$$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{5}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \gamma = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

Integrační stálé A, B, C ustanovíme z rovnic

$$y' = A\alpha e^{\alpha x} + B\beta e^{\beta x} + C\gamma e^{\gamma x},$$

$$y'' = A\alpha^2 e^{\alpha x} + B\beta^2 e^{\beta x} + C\gamma^2 e^{\gamma x},$$

srovnáme-li je a rovnice (4), s (2), (3), (1) a položíme-li zároveň $x = 0$.

Bude pak

$$A + B\beta + C\gamma = 0.$$

$$A + B\gamma + B\beta = 0,$$

$$A + B + C = 1,$$

z čehož

$$A = B = C = \frac{1}{3}.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnic (1), (2), (3), obdržíme po náležitém upravení

$$y = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos x \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$y'' = \frac{1}{3}\left[e^x - 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

čímž součet řad (1), (2) a (3) jest nalezen.

Řešení úlohy 30.

(Podává *B. Sixta*, technik.)

Vyjádříme-li danou podmínku analyticky, bude, jelikož

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \text{ a } r_n = \frac{r^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$rr'' - r'^2 = 0.$$

Integrál této rovnice jest

$$r = a + e^{b\varphi}$$

z čehož viděti, že křivka hledaná jest obecně exponentiální spirála, ve zvláštním případě kruh.

Úloha 31.

Jakým spůsobem amortisuje se při nějakém akciovém podniku během desíti let v poloročních lhůtách 100 akcií po 200 zl. při 5% úročení.

Úloha 32.

Má se řešiti rovnice

$$tg\, 2x + tg\, 3x = 3 tg\, x\ .$$

Úloha 33.

Má se určiti obsah čtyrstěnu omezeného rovinami, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ 2x - 3y + 4z - 1 &= 0, \\ 3x + 4y - z - 2 &= 0, \\ 4x - y - 2z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Úloha 34.

V řadu postupující podle mocnin proměnné x má se vyvinouti

$$[l(x + \sqrt{1 + x^2})]^2.$$

Úloha 35.

Má se určiti hodnota integrálu omezeného

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x \,.\, l\, \frac{5+4\sin x}{5-4\sin x} dx\,.$$

II. Z fysiky.

Řešení úlohy 9.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Jelikož hledané těžisko na ose x se nalézati bude, stačí k určení jeho úsečka ξ. Značí-li P povrch plochy, bude

$$\xi = \frac{\int x\,dP}{\int dP} = \frac{\int xy\sqrt{1+y'^2}dx}{\int y\sqrt{1+y'^2}dx}\,,$$

ovšem v příslušných mezích.

Zavedením proměnné ω obdržíme

$$\xi = \frac{2}{3}\,a\,\frac{\int_0^\pi (\omega+\sin\omega)\,d\sin^3\frac{\omega}{2}}{\int_0^\pi (\omega+\sin\omega)\,d\sin\frac{\omega}{2}}\,,$$

tedy $\xi = \dfrac{2}{15}\,a\,\dfrac{15\pi-8}{3\pi-4}$.

Řešení úlohy 11.

(Podává *F. Podhajský*, technik.)

Volíme-li osu kolmou za osu y, dají se síly na hmotný bod působící vyjádřiti rovnicemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega^2}{x}\,,\quad \frac{dy^2}{dt^2} = -g\,,$$

z nichž vyplývá

$$\frac{2\,dx\,d^2x + 2\,dy\,d^2y}{dt^2} = 2\omega^2\,\frac{dx}{x} - 2g\,dy$$

a integrací se obdrží

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a .$$

Poněvadž však $\frac{ds}{dt}$ značí rychlost bodu v směru tečny, tato však má býti stálou veličinou v, tož následuje co rovnice hledané křivky

$$v^2 = 2\omega^2 lx - 2gy + a$$

nebo

$$y = \frac{\omega^2}{g} lx + A .$$

Řešení úlohy 17.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Je-li rychlost zvuku 1050′, pak se mají k sobě výšky tonů píšťaly parní a ozvěny jako 989 k 1050.

Řešení úlohy 19.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Poměr odporu galvanického řetězu k jednotce drátu obnáší 12·949 a síla elektromotorická 5·166 k, značí-li k koeficienta boussoly.

Řešení úlohy 21.

(Podává *T. Havlíček*, žák VIII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Jelikož poměr hmotnosti Jupitera a země jest 338, poměr poloměrů obou na rovníku 11·66, na točně 10·88, váží libra železa 2·49 liber na rovníku, 2·86 na točně Jupiterově.

Řešení úlohy 22.

(Podává *A. Sucharda*, technik.)

Zinkový povlak musí 0·127055^m tlustý býti.

Řešení úlohy 23.

(Podává *J. Sallabašev*, žák VI. třídy real. gymnasia malostranského.)

Rozdělme stranu AB trojúhelníku ABC v bodu D tak, aby $AD : DB = q : p$ a přímku CD v bodu O tak, aby $CO : OD = (p+q) : r$: Bod O jest bod hledaný.

(Správné řešení podal též *A. Wolf*, žák VII. třídy česk. gymnasia v Budějovicích.)

Řešení úlohy 24.

(Podává *J Kašpr.*)

Vrhne-li se hmotný bod v úhlu α s rychlostí v, dosáhne výšky $\frac{v^2}{2g} \sin^2\alpha$ a vrátí se ve vzdálenosti $\frac{v^2}{g} \sin 2\alpha$ do původního horizontu. Plocha paraboly dráhy jeho obnáší tedy $\frac{v^4}{3g^2} \sin^2\alpha \sin^2\alpha$, který výraz, jak differencováním snadno se dokáže, má největší hodnotu pro $\alpha = 60^0$,

(Správné řešení zaslali též *K. Brož*, filosof, *J. Kroutil*, filosof.)

Řešení úlohy 25.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Je-li r poloměrem kružnice, x a y souřadnice libovolného bodu na ní, p průřez, T napnutí v tomto bodu, ϱ váha jednotky objemové a a pak libovolná constanta, platí rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$T\frac{dx}{ds} = \varrho a$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \varrho p ds,$$

z nichž obdržíme:

$$p = a\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds} = a\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{ar}{y^2} = \frac{p_0}{y^2}.$$

Jest tedy průřez v obráceném poměru se čtvercem pořadnice.

Řešení úlohy 26.

(Podává *A. Strnad*, technik.)

Na libovolný ve směru svislém nad středem přítažlivosti ve vzdálenosti x položený hmotný bod m působí síla

$$P = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P_1}{x^3},$$

značí-li P_1 sílu ve vzdálenosti $= 1$ působící.

Integrací obdržíme pak

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{a}\frac{P_1}{m} \cdot \frac{a^2 - x^2}{x} .$$

z čehož

$$t = a\sqrt{\frac{m}{P_1}} \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2\sqrt{\frac{m}{P_1}}$$

Úloha 28.

Roku 1736 pozoroval *Bouguer* kyvadlem, že počet kyvů obnáší za 24 hodin na břehu mořském 98770; na hoře Pichincha jen 98720; jak se mají k sobě g obou míst a jak by se musilo kyvadlo zkrátiti neb prodloužiti, kdyby měl býti počet kyvů na hoře neb dole stejně velkým.

Úloha 29.

Má se určiti těžisko tělesa povstávajícího otočením plochy dvěma parabolám

$$y^2 = 2p x, \; y^2 = 2q(a - x)$$

společné kolem osy úseček.

Úloha 30.

Jak se mají k sobě rychlosti, jimiž třeba těleso nějaké přímo vrhnouti, aby doletělo se země na měsíc, s měsíce na slunce a se slunce na zemi, stojí-li měsíc v kvadratuře a v prostřední vzdálenosti od země taktéž v prostřední vzdálenosti od slunce se nacházející.

Úloha 31.

Srazí-li se dvě pružné a stejně rychle proti sobě se pohybující koule, jaký musí býti poměr jejich hmot, aby jedna se zarazila a zůstala stát.