Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vladimír Janků

Kterak lze určiti součet aritmetické řady vyššího stupně řešením rovnic stupně prvého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 1, 82--89

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122576

místě kovovými příčnými svodiči p a p', po isolující desce samotné, což ovšem nastane teprve při velmi značné vlhkosti vzduchové. Z vlastní zkušenosti podotýkám, že mi elektrika Wimshurstova s deskami skleněnými, pokostem natřenými (62 *cm* v průměru majícími) selhala pouze jednou, a to v létě ku konci více než 2-hodinné přednášky, jíž přítomno bylo as 80 osob, dostavivších se do síně se svrchními oděvy i deštníky za prudkého lijáku; současně však už ani leydenské láhve, aniž jakékoli jiné elektrické přístroje nefungovaly. Protože ebonit jest méně hygroskopický než sklo, hotoví se často desky z ebonitu; mají však tu značnou nevýhodu, že se teplem bortí, čímž stroj stává se nepotřebným a vyžaduje častějšího rozebrání a narovnání desk.

Při elektrice Wimshurstově, jak zde popsána, fungují jedině polepy jakožto části aktivní; kdybychom si přáli, aby také isolátor (po příkladě elektriky Holtzovy) stal se spolučinným, bylo by třeba, vedle štětiček umístiti na příčné vodiče také hroty, jak jest tomu při elektrice Töplerově.

Kterak lze určiti součet arithmetické řady vyššího stupně řešením rovnic stupně prvého.

Žákům středních škol napsal

dr. **Vladimír Janků**,
c. k. professor v Olomouci.

Z arithmetické posloupnosti m-ho stupně obdržíme posloupnost $m-1$ho stupně, vytvoříme-li rozdíly dvou po sobě následujících členů. Tato řada podobným způsobem dá se snížiti na řadu $m-2$ho stupně, tato pak opět na řadu o stupeň nižší až konečně obdržíme řadu stupně prvého, při níž rozdíl dvou po sobě následujících členů jest veličinou stálou.

Máme-li vytvořiti součet řady arithmetické stupně prvého, tu nutno znáti prvý člen, rozdíl a počet členů dle známého vzorce

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + \overline{n-1}d).$$

Pro součet řady druhého stupně nutno znáti opět prvý člen a počet členů, kromě toho však obě difference: jsou tu tedy celkem čtyři podmínky.

Pro řadu stupně třetího nutno znáti podmínek patero atd. Obecně: Řada m-ho stupně stanovena $m + 2$ podmínkami.

Výraz, jímž stanoven jest součet řady m-ho stupně, jest mnohočlen uspořádaný dle klesajících mocnin čísla udávajícího počet členů. Nejvyšší mocnina mnohočlenu jest při řadě m-ho stupně mocnina $m + 1$.

Má tedy součet arithmetické řady m-ho stupně, n členů čítající, tvar

$$S_n = A_1 n^{m+1} + A_2 n^m + A_3 n^{m-1} + A_4 n^{m-2} + \dots$$
$$+ A_{m-1} n^3 + A_m n^2 + A_{m+1} n.$$

V tomto součtu jsou A_1, A_2, $A_3, \dots, A_{m+1}$ stálé veličiny, závislé od zákona, jímž řada byla vytvořena. Členu prostého, nemajícího součinitele n, v této řadě není; neboť, nemá-li řada žádného členu, t. j. pro $n = 0$, také součet řady $S_n = 0$.

Znajíce nyní tvar součtový, můžeme ihned přikročiti ku součtům některých řad stupně 2-ho, 3-ho, atd.

1. Jest určiti součet čtverců přirozené řady čísel

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \dots, n^2.$$

Řada ta, jak snadno ustanovíme, jest řadou stupně druhého, má tedy součet její tvar

$$S = An^3 + Bn^2 + Cn,$$

kdež nutno stanoviti součinitele A, B, C.

Součinitele stanovíme takto:

Budiž dán pouze prvý člen řady, pak $n = 1$ (počet členů) a součet $S = 1$, t. j.

$$A + B + C = 1.$$

Volme nyní dva členy, pak $n = 2$ a součet jejich, jak patrno, $S = 5$, t. j.

$$8A + 4B + 2C = 5.$$

Volíme-li členy tři, tu $n = 3$ a součet těchto tří prvých členů jest 14, tedy

$$27A + 9B + 3C = 14.$$

Jest nám tudíž řešiti soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 8A + 4B + 2C &= 5 \\ 27A + 9B + 3C &= 14, \end{aligned}$$

abychom obdrželi součinitele A, B, C. Řešením dostaneme

$$A = \frac{1}{3}, \ B = \frac{1}{2}, \ C = \frac{1}{6}.$$

Jest tedy součet řady druhého stupně, jejížto členové jsou čtverce čísel přirozené řady,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

2. Jest stanoviti součet čtverců lichých čísel

$$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots, (2n-1)^2.$$

V tomto případě dostaneme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ 8A + 4B + 2C &= 10 \\ 27A + 9B + 3C &= 35. \end{aligned}$$

Řešíme-li, dostaneme hodnoty

$$A = \frac{4}{3}, \ B = 0, \ C = -\frac{1}{3}.$$

Řada má součet

$$S = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1).$$

3. Stanoviti součet čtverců čísel sudých

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ 8^2, \ldots, (2n)^2.$$

Součinitelé této řady hoví rovnicím

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4 \\ 8A + 4B + 2C &= 20 \\ 27A + 9B + 3C &= 56. \end{aligned}$$

Řešením nalezneme

$$A = \frac{4}{3},\ B = 2,\ C = \frac{2}{3}.$$

Součet jest tedy

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3} n \\ &= \frac{2}{3} n (n + 1)(2n + 1). \end{aligned}$$

Součet této řady, jak viděti, jest čtyřikrat větší než řady 1., což hned zprvu dalo se předvídati.

4. Stanoviti součet třetích mocnin přirozené řady číselné:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125, \ldots, n^3.$$

Řada tato jest stupně třetího, součet má tedy tvar

$$S = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn.$$

Součinitele A, B, C, D určíme z prvých čtyř členů dané řady. Dán-li pouze prvý člen, pak $n = 1$ a také $S = 1$, t. j.

$$(\alpha) \qquad A + B + C + D = 1.$$

Dány dva členy: $n = 2$, $S = 9$,

$$(\beta) \qquad 16A + 8B + 4C + 2D = 9.$$

Pro tři členy, jest $n = 3$, $S = 36$,

$$(\gamma) \qquad 81A + 27B + 9C + 3D = 36.$$

Konečně pro čtyři členy $n = 4$, $S = 100$,

$$(\delta) \qquad 256A + 64B + 16C + 4D = 100.$$

Řešíme-li tedy soustavu rovnic (α), (β), (γ), (δ), obdržíme součinitele

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = 0,$$

z čehož obdržíme pro součet řady vzorec

$$S = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{1}{4} n^2 (n^2 + 2n + 1) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ze vzorce tohoto vidíme, že součet trojmocí po sobě jdoucích číslic jedničkou počínaje, tvoří vždy čtverec.

5. Stanoviti součet třetích mocnin lichych čísel přirozené řady:

$$1^3, 3^3, 5^3, 7^3, \ldots, (2n-1)^3.$$

Také tato řada jest stupně třetího. Rovnice, jimiž ustanovíme součinitele, jsou

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 1 \\ 16A + 8B + 4C + 2D &= 28 \\ 81A + 27B + 9C + 3D &= 153 \\ 256A + 64B + 16C + 4D &= 496. \end{aligned}$$

Z těchto najdeme

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad D = 0$$

a

$$S = 2n^4 - n^2 = n^2 (2n^2 - 1).$$

6. Jest stanoviti součet n členů řady tvaru

$$1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 4^2 + \cdots + (2n-1)n^2.$$

O řadě té snadno se přesvědčíme, že jest řadou třetího stupně.

Součinitelé součtu hoví soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 1 \\ 16A + 8B + 4C + 2D &= 13 \\ 81A + 27B + 4C + 3D &= 58 \\ 256A + 64B + 16C + 4D &= 170, \end{aligned}$$

jejíž kořeny jsou

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{6},$$

pročež

$$S = \frac{1}{2} n^4 + \frac{2}{3} n^3 - \frac{1}{6} n = \frac{n}{6} (3n^3 + 4n^2 - 1)$$

$$= \frac{n}{6} (n + 1)(3n^2 + n - 1).$$

7. Jest najíti součet čtvrtých mocnin přirozené řady čísel

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4.$$

Řada ta jest 4ho stupně, má tudíž součet tvar

$$S = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En.$$

Součinitele určíme dle prvých pěti členů této řady.

Je-li jeden člen $n = 1$, pak $S = 1$,

$$(\alpha') \qquad A + B + C + D + E = 1,$$

pro $n = 2$ jest $S = 1 + 16 = 17$,

$$(\beta') \qquad 32A + 16B + 8C + 4D + 2E = 17,$$

pro $n = 3$ jest $S = 1 + 16 + 81 = 98$,

$$(\gamma') \qquad 243A + 81B + 27C + 9D + 3E = 98,$$

pro $n = 4$ jest $S = 1 + 16 + 81 + 256 = 354$,

$$(\delta') \qquad 1024A = 256B + 64C + 16D + 4E = 354,$$

pro $n = 5$ jest $S = 1 + 16 + 81 + 256 + 625 = 979$,

$$(\varepsilon') \qquad 3125A + 625B + 125C + 25D + 5E = 979.$$

Řešíce soustavu rovnic $(\alpha'), (\beta'), (\gamma'), (\delta'), (\varepsilon')$, dostaneme

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{30},$$

z čehož součet řady té jest

$$S = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n,$$

nebo

$$S = \frac{n}{30} (n + 1) (2n + 1) (3n^2 + 3n - 1).$$

8. Součet čtvrtých mocnin lichých čísel přirozené řady

1, 81, 625, 2401, 6561, ...

najdeme, řešíce tuto soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
A + B + C + D + E &= 1 \\
32A + 16B + 8C + 4D + 2E &= 82 \\
243A + 81B + 27C + 9D + 3E &= 707 \\
1024A + 256B + 64C + 16D + 4E &= 3108 \\
3125A + 625B + 125C + 25D + 5E &= 9669.
\end{aligned}$$

Zde najdeme kořeny

$$A = \frac{16}{5}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{8}{3}, \quad D = 0, \quad E = \frac{7}{15}.$$

Součet řady jest

$$\begin{aligned}
S &= \frac{16}{5} n^5 - \frac{8}{3} n^3 + \frac{7}{15} n \\
&= \frac{n}{15} (4n^2 - 1) (12n^2 - 7)
\end{aligned}$$

9. Součet pátých mocnin přirozené řady čísel dostaneme, řešíme-li soustavu rovnic tohoto tvaru

$$\begin{aligned}
A + B + C + D + E + F &= 1 \\
64A + 32B + 16C + 8D + 4E + 2F &= 33 \\
729A + 243B + 81C + 27D + 9E + 3F &= 276 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

což si laskavý čtenář sám doplní.

Uvedu zde pouze výsledky

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{5}{12}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{12}, \quad F = 0,$$

tak že součet řady má tvar

$$S = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2$$

nebo

$$S = \frac{n^2}{12} (n + 1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$$

10. Součet pátých mocnin lichých čísel přirozené řady dán vzorcem

$$S = \frac{n^2}{3} (16n^4 - 20n^2 + 7).$$

Podobně bychom nalezli součet šestých mocnin atd., čímž bychom obdrželi soustavu sedmi, osmi atd. rovnic prvého stupně. Výpočty ty stávají se čím dále tím více složitými, jelikož čísla jsou stále větší a větší.

Úlohy.

Dodatek k řešení úloh v předešlém ročníku.

Doplňkem ku řešení úloh v předešlém ročníku uveřejněných podáváme tu *jiný způsob řešení* úloh, jež následují.

Úloha 30.

Příčky spojující středy protějších stran čtyrúhelníka ABCD protínají se v bodě S.

Budiž dokázáno, že jest

$$\triangle ABS + \triangle CDS = \triangle BCS + \triangle DAS.$$

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol,* stud. VIII. tř. gym. v Č. Budějovicích.)

Zvolme bod S počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic; souřadnice vrcholů jsou po řadě