Karel Dusl

K teorii exponenciální funkce x^x

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 3, 214--225

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122609`

K teorii exponenciální funkce x^x.

Napsal *Karel Dusl.*

1. Z rovnice

$$x^x = x_1^{x_1} \tag{1}$$

nenásleduje obecně $x = x_1$, protože rovnice exponenciální:

$$x^x = (ax)^{ax}, \tag{2}$$

kde a znamená jakoukoli hodnotu (budeme uvažovati jen hodnoty reálné) má vedle řešení $x = 0$, ještě výsledek:

$$lx = \frac{a\,la}{1-a}, \tag{3}$$

t. j. v hodnotách reálných:

$$x = a^{\frac{a}{1-a}}, \tag{4}$$

takže pro každou hodnotu a vyhovují rovnici (1) kořeny:

$$\underline{x = a^{\frac{a}{1-a}} \quad \text{a} \quad x_1 = ax = a^{\frac{1}{1-a}}.} \tag{I}$$

Nejprve půjde o to, vyšetřiti průběh hodnot x a x_1 které jsou dány rovnicemi (I), probíhá-li veličina a všemi reálnými hodnotami od $-\infty$ do $+\infty$. K tomu účelu sledujeme nejprve průběh funkce

$$y = x^x$$

pro reálné hodnoty proměnné x.

Klademe-li

$$y = x^x \tag{5}$$

jest

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + lx) \tag{6}$$

a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{x-1}[1 + x(1 + lx)^2]. \tag{7}$$

Pro hodnotu $\quad lx = -1$

tedy

$$x = \frac{1}{e}, \tag{8}$$

nastává tudíž minimum. Vedle toho jest pro $x = 0$, $y = 1$, pro $x = 1$ jest rovněž $y = 1$. Pro záporné hodnoty proměnné $x = -\varrho$ jest obecně:

$$(-\varrho)^{-\varrho} = e^{-\varrho l \varrho}[\cos \pi\varrho\,(2k+1) - i \sin \pi\varrho\,(2k+1)], \tag{9}$$

kde k jest libovolné celé číslo. Hodnoty reálné obdržíme pro

$$\varrho\,(2k+1) = l,$$

tedy

$$\varrho = \frac{l}{2k+1} \tag{10}$$

kde opět l jest číslo celé. Jelikož

$$\cos \pi\varrho\,(2k+1) = \cos \pi l = (-1)^l$$

budou reálné hodnoty funkce $(-\varrho)^{-\varrho}$ dány výrazem:

$$\underline{(-\varrho)^{-\varrho} = \varrho^{-\varrho}(-1)^{-l}.}$$

Funkce $$y = x^x$$

má tedy záporné hodnoty x reálné hodnoty v bodech, jichž absolutní hodnoty jsou dány úplně uspořádanou, všude hustou množinou racionálných čísel:

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{6}{7}, \ldots, 1,$$

$$\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{13}{7}, \ldots, 2,$$

atd.

To je ostatně direktně vidno z výrazu $(-\varrho)^{-\varrho}$. Tečna ke křivce $y = x^x$ není v těchto bodech reálnou, neboť derivace:

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + lx)$$

jest pro záporné hodnoty x imaginárnou.

2. Uvažujme tedy průběh absolutních hodnot reálné větve funkce x^x:

$$y = |x^x|.$$

Pro kladné hodnoty x je to mocnina x^x, pro záporné hodnoty $x = -\varrho$ je to dle (II) veličina

$$y = \varrho^{-\varrho}. \tag{11}$$

První z obou má dle (8) minimum pro $x = \frac{1}{e}$, druhý má tedy maximum pro tutéž hodnotu $\varrho = \frac{1}{e}$.

Hodnota minima jest $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, hodnota maxima převratná hodnota této. I jest pak:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0{\cdot}6922\ldots \qquad \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} = 1{\cdot}4453\ldots \tag{12}$$

Vedle toho jest pro $\varrho = 0$: $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^\varrho} = 1$, pro $\varrho = \infty$: $\lim\limits_{\varrho \to \infty} \frac{1}{\varrho^\varrho} = 0$. Z rovnice (8) odst. 1. patrno, že pro kladné hodnoty x není bodu inflexního, pro záporné hodnoty $x = -\varrho$ plyne derivováním rovnice (11)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varrho^{-\varrho-1}[1 - \varrho(1 + l\varrho)^2] \tag{13}$$

pro $\varrho = 1$ anuluje se tedy tato derivace. Jest tedy průběh funkce:

$$y = |x^x|$$

znázorněn křivkou na obr. 1. V hodnotách kladných jest průběh křivky týž, jako křivky $y = x^x$; v hodnotách záporných má funkce x^x hodnotu reálnou toliko v bodech vytčené již množiny. Od prosté hodnoty liší se dle (II) faktorem $(-1)^l$.

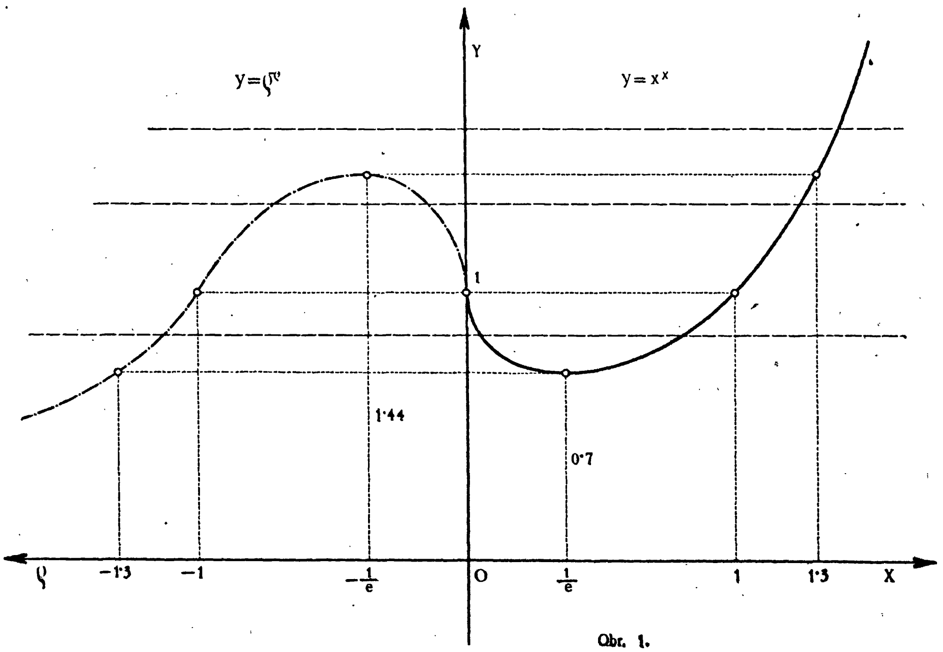
Aby pro dvě hodnoty proměnné: x a $x_1 = ax$ při reálném a bylo vyhověno rovnici $x^x = x_1^{x_1}$, musí přímka vedená rovnoběžně s osou X-ovou protnouti křivku $y = x^x$ ve dvou bodech. To především nastává vždy pro kladná x, pokud je vzdálenost přímky od osy X menší, neb nejvýš rovna jedné a větší než 0·6922. Pro záporné hodnoty x se křivka $y = x^x$ skládá z jednotlivých bodů po obou stranách osy X rozložených v pásu o poloviční šířce rovné 1·4453 . . . (12). Každá z rovnoběžek vedená jednotlivými body odpovídajícími reálným hodnotám $y = x^x$, pro záporná x, nad osou X ve vzdálenosti větší než 0·6922 . . . protne křivku alespoň ještě jednou v části kladné, kdežto rovnoběžky vedené body bližšími ose X, anebo pod osou X křivku jistě již neprotnou. Lze tedy uvažovati místo křivky $y = x^x$ křivku $y = |x^x|$ a její průsečíky s rovnoběžkami s osou X. Tak učiněno jest v obr. 1.

3. Vraťme se k závislostem (I) odst. 1. a uvažujme nejprve a kladné. Z rovnic (I) jest nejprve patrno, že pro dvě hodnoty a a $a' = \frac{1}{a}$ se vyměňují hodnoty x_1 a x.

Vedle toho jest z rovnice (I)

$$l\,x = \frac{a}{1-a}\,l\,a = \frac{l\,a}{\frac{1}{a}-1}\,, \tag{14}$$

derivujeme-li v čitateli a jmenovateli dle a obdržíme hodnotu $\frac{1}{a} : -\frac{1}{a^2} = -a.$



Obr. 1.

Jest tudíž

$$\text{pro } a=0 : x=1,\ x_1=0,$$
$$\text{pro } a=1 : x=x_1 = \frac{1}{e},$$
$$\text{a pro } a=\infty : x=0,\ x_1=1. \tag{15}$$

Patrně tedy kladným hodnotám a odpovídají hodnoty x kladné, mezi 0 a 1 a hodnoty x_1 mezi 1 a 0. — Přímka rovnoběžná s osou X protíná křivku $y=|x^x|$ (viz obr. 1.) ve dvou bodech reálných, jichž úsečky x a x_1 jsou kladné, menší jedničky.

4. Uvažujme záporné hodnoty koeficientu a kladouce:

$$a = -a_1 \tag{16}$$

Tu bude nejprve:

$$x = (-a_1)^{-\frac{a_1}{1+a_1}}, \quad x_1 = -a_1 x = (-a_1)^{\frac{1}{1+a_1}}. \qquad \text{(III)}$$

Především je patrno, že bude x (a tedy též x_1) vycházeti reálné k oněm hodnotám a_1 pro něž:

$$\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{l}{2k+1}, \qquad (17)$$

kde k a l jsou čísla celá. Čísla a_1 budou pak racionálné hodnoty tvaru:

$$a_1 = \frac{l}{2k+1-l}. \qquad (18)$$

poskytující množinu analogickou, jako jsem uvažoval v odst. 1.

Zabývejme se pouze absolutní hodnotou x vypočítaného z rovnic (III). To bude, dle (II) hodnota:

$$|x| = a_1^{-\frac{a_1}{1+a_1}}. \qquad (19)$$

Tato hodnota musí míti svoje maximum, které obdržíme (obr. 1.), když maximálním bodem křivky $y = |x^x|$ vedeme rovnoběžku s osou X a přihlédneme ku průsečíku s křivkou. Pro tato příslušné $\overline{a_1}$ musí:

$$|x_1| = \frac{1}{e} = \overline{a_1}\, x,$$

t. j.

$$x = \frac{1}{e\,\overline{a_1}} \qquad (20)$$

a dále dle (12):

$$x^x = \left(\frac{1}{e\,\overline{a_1}}\right)^{\frac{1}{e\,\overline{a_1}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} \qquad (21)$$

což dává pro $\overline{a_1}$ podmínku:

$$1 + \overline{a_1} + l\,\overline{a_1} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Obdobně vedeme-li minimálním bodem křivky $y = |x^x|$ rovnoběžku s osou X musí:

$$x = \frac{1}{e} = -\frac{1}{\overline{a_1}'}\, x_1,$$

tedy:

$$x_1 = -\frac{\overline{a_1}'}{e}, \qquad (22)$$

při čemž:

$$|x_1^{x_1}| = \left(\frac{\overline{a_1}'}{e}\right)^{-\frac{\overline{a_1}'}{e}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \tag{23}$$

což srovnáme-li s (21) dává:

$$\overline{a_1}' = \frac{1}{\overline{a_1}}. \tag{V}$$

5. Ostatně direktním počtem se přesvědčíme, žé pro hodnotu $\overline{a_1}$ plynouce ze (IV) má funkce:

$$y = \left(a_1^{-\frac{a_1}{1+a_1}}\right)^{a_1^{-\frac{a_1}{1+a_1}}} \tag{VI}$$

své maximum, pro hodnotu $\overline{a_1}'$ z (V) pak minimum (obr. 4.).

Utvoříme-li z (VI) derivaci:

$$\frac{dy}{da_1} = -x^x(1 + lx)\,x\,\frac{1}{(1+a_1)^2}(1 + a_1 + la_1), \tag{24}$$

bude pro:

$$1 + a_1 + la_1 = 0, \tag{25}$$

z rovnice (VI)

$$ly = a_1^{\frac{1}{1+a_1}}$$

a dále

$$lly = \frac{1}{1+a_1}\,la_1 = -1,$$

tedy:

$$y = e^{\frac{1}{e}},$$

což odpovídá minimu.

Podobně pro

$$1 + lx = 0$$

jest dle (19):

$$a_1^{-\frac{a_1}{1+a_1}} = \frac{1}{e},$$

tedy

$$a_1\,la_1 - (1 + a_1) = 0 \tag{IV'}$$

ve shodě s rovnicí (V)

Klademe-li

$$y_1 = \frac{1}{y},$$

vychází tu dvojnásobným logaritmováním (VI)

$$lly_1 = -1, \text{ t. j.}$$

$$y = e^{-\frac{1}{e}}$$

a to odpovídá maximu řečené funkce.

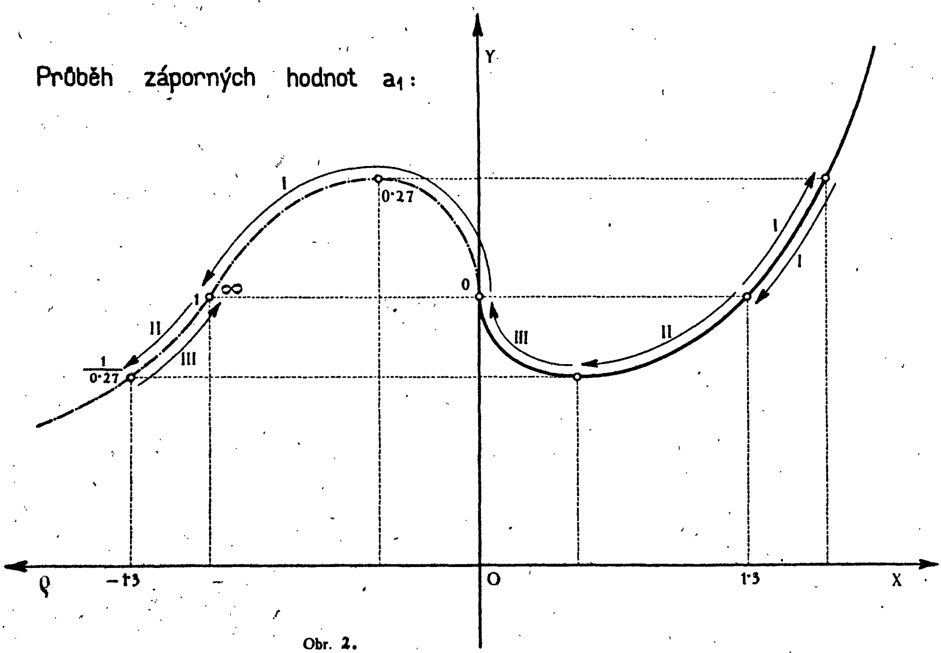
6. V ý p o č e t h o d n o t y $\overline{a_1}$:

Položíme-li $y = 1 + a + l\, a$

vychází pro $a = 0{\cdot}25 \quad y = -0{\cdot}13629\ldots$

pro $a = \frac{2}{7} = 0{\cdot}285714\ldots$

$y = +0{\cdot}032954\ldots$



Obr. 2.

Metodou regula falsi plyne pro rovnici sečné:

$$y + 0{\cdot}13629\ldots = \frac{0{\cdot}032954\ldots + 0{\cdot}13629\ldots}{\frac{2}{7} - 0{\cdot}25}(a - 0{\cdot}25)$$

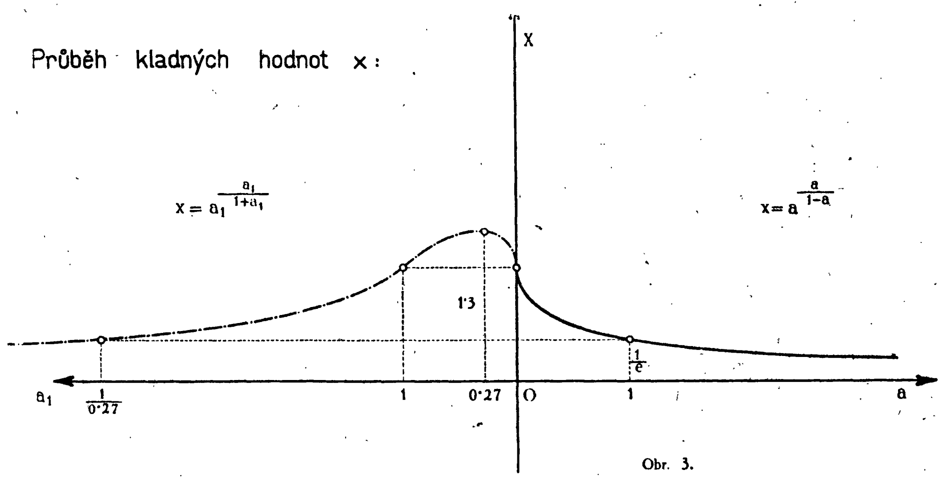
pro $y = 0$

pak $\underline{\overline{a_1} = 0{\cdot}27876\ldots}$ (VII)

Extremní hodnota x z rovnice (20):

$$\underline{x = \frac{1}{e\,\overline{a_1}} = 1{\cdot}3201\ldots} \qquad (\mathrm{VII}_1)$$

7. Bodu křivky $y = |x^x|$, jehož $x = 1{\cdot}3201\ldots$ odpovídá $\overline{a_1} = 0{\cdot}27876\ldots$, ku většímu (kladnému) x neodpovídá vůbec žádná reálná hodnota a_1, rovnoběžka s osou X protíná křivku jen v jednom jediném bodě. Pro body, jichž úsečky x leží mezi $1{\cdot}3201\ldots$ a jednou obdržíme další dva průsečíky s křivkou (viz obr. 1), čemuž odpovídají dvě hodnoty a_1: větší a menší než $\overline{a_1} = 0{\cdot}27876\ldots$ Pro bod jehož $x = 1$, obdržíme jednak $a_1 = 0$, jednak $a_1 = 1$. Pro další body, jichž souřadnice x je menší než jednička dostáváme jednu hodnotu a (kladnou), jak bylo řečeno v odstavci (3) a jednu hodnotu zápornou a_1 ležící v intervalu $1\ldots\infty$, takže pro bod $x = 0$ obdržíme $a_1 = \infty$. Pro bod jehož



Obr. 3.

$$x = \frac{1}{e},$$

t. j. pro minimální bod křivky, obdržíme

$$\overline{a'_1} = \frac{1}{\overline{a}} = \frac{1}{0{\cdot}27\ldots}$$

dle rovnice (V), při čemž dle (22) jest:

$$x_1 = -\frac{1}{\overline{a_1}\, e} = -1{\cdot}3201.$$

Pro bod křivky, jehož záporné x je větší nežli $-1{\cdot}3201$ neobdržíme dalšího průsečíku rovnoběžky s osou X s křivkou. (Viz obr. 2. a 3.).

Z předchozího jest tudíž patrno, že pro hodnoty x, jichž absolutní hodnota:

$$|x|>1{\cdot}3201\ldots,$$

při čemž číselná hodnota ta jest definována rovnicemi (IV) a (20) odst. 4., jest rovnice exponenciální:

$$x^x = x_1^{x_1}$$

splnitelna jen hodnotou

$$x = x_1$$

v oboru reálném. V obr. 2. znázorněn jest na křivce $y = |x^x|$ průběh záporných hodnot $a = -a_1$, jak přísluší bodům (resp. jejich úsečkám) na kladné straně osy X. —

V obrazci (3) znázorněna jest graficky souvislost hodnot x a a, resp. $|x|$ a a_1 dle rovnice I. odst. 1. resp. (19) odst. 4. —

Konečně v obr. 4 jest nakreslen průběh hodnot $|x^x|$, jak závisí na průběhu hodnot veličiny a a a_1 (rovnice VI. odst. 5).

8. Pro komplexní hodnoty argumentu z definujme funkci z^z známým způsobem kladouce:

$$w = z^z = e^{z\,l\,z}. \tag{26}$$

Jestliže položíme

$$z = x + i\,y = \varrho\, e^{i\omega + 2k\pi i}, \tag{27}$$

tu bude:

$$\begin{aligned} z^z = e^{x\,l\varrho - y\omega - 2k\pi y}\,[\cos(\omega x + y\,l\varrho + 2k\pi x) + \\ + i\sin(\omega x + y\,l\varrho + 2k\pi x)]. \end{aligned} \tag{VIII}$$

Pro některé větve této funkce nalezneme hodnoty reálné. — Tak na př. pro:

$$z = i\,y,\ x = 0,\ \omega = \frac{\pi}{2},\ \varrho = y$$

jest

$$w = e^{-\frac{\pi}{2}y - 2k\pi y}\,(\cos y\,l\,y + i\sin y\,l\,y). \tag{28}$$

Pro $y\,l\,y = m\pi$, kde m je číslo celé, jsou hodnoty reálné, na př. pro $m = 0$ a $y = 1$,

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}(4k+1)}$$

ve shodě se známým výsledkem.[1]) —

Položíme-li do (VIII)

$$z = -i\,y,\ x = 0,\ \omega = -\frac{\pi}{2},\ \varrho = y$$

bude podobně:

---

[1]) Weyr: Počet diferenciálný 413.

$$\underline{w=e^{-\frac{\pi}{2}y+2k\pi y}(\cos y\,l\,y-i\sin y\,l\,y)} \tag{29}$$

odkud na př.

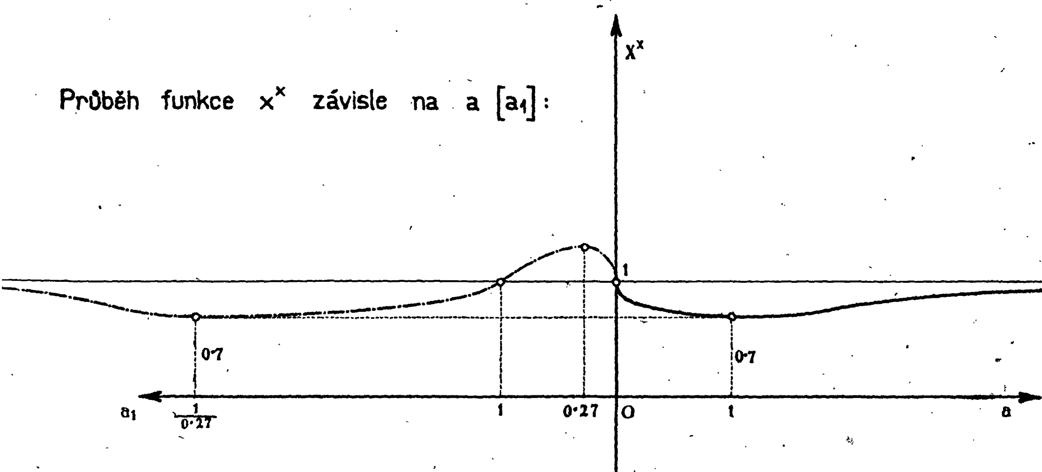
$$(-i)^{-i}=e^{\frac{\pi}{2}(4k-1)}.$$

Obecně jest hodnota $w=z^z$, reálná pro

$$\omega x+y\,l\varrho+2k\pi x=m\pi, \tag{30}$$

kde k a m jsou čísla celá. Pro $m=0$ obdržíme

$$-\frac{y}{x}=\frac{\omega+2k\pi}{l\varrho},$$



Obr. 4.

t. j.
$$l\varrho=-\frac{\omega+2k\pi}{tg\,\omega} \tag{31}$$

a pro $k=0$, křivku:

$$\underline{\varrho=e^{-\frac{\omega}{tg\,\omega}}}, \tag{32}$$

která prochází uvažovanými již body

$$\varrho=1, \omega=\pm\frac{\pi}{2}.$$

Ježto funkce z^z nemá algebraické formule addiční nelze provésti isogonálné zobrazení této funkce v obyčejném smyslu.

Sur la théorie de la fonction exponentielle x^x.

(Extrait de l'article précédent.)

1. De la relation exponentielle $x^x = x_1^{x_1}$, il ne résulte pas, en général, seulement $x = x_1$, puisque l'équation exponentielle

$$x^x = (ax)^{ax}, \tag{1}$$

où a est un nombre réel quelconque, possède toujours, outre la racine $x = 0$, encore la racine

$$x = a^{\frac{a}{1-a}} \tag{2}$$

et ce sont alors les deux quantités

$$x = a^{\frac{a}{1-a}},\ x_1 = ax = a^{\frac{a}{1-a}} \tag{I}$$

qui remplissent l'équation:

$$x^x = x_1^{x_1}.$$

2. L'auteur considere les valeurs absolues de la fonction $y = | x^x |$ pour les valeurs réelles de la variable x. Quand x est positif, on a

$$y = | y | = x^x$$

tandis que pour les valeurs négatives: $x = -\varrho$, on a

$$y = | x^x | = \varrho^{-\varrho}. \tag{3}$$

Si l'on tient compte de la premiere équation (I), on a pour les valeurs positives de a:

$$y = \left(a^{\frac{a}{1-a}}\right)^{a^{\frac{a}{1-a}}} \tag{4}$$

et pour les valeurs négatives de a la valeur absolue est donnée par

$$y = | x^x | = \left(a_1^{-\frac{a_1}{1+a_1}}\right) \tag{5}$$

où l'on a posé $a_1 = -a$.

3. Pour $x = 1 : e$ la fonction $y = x^x = | x^x |$ atteint son minimum: $y_{min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = 0\,6922\ldots$ et pour $x = -\frac{1}{e}$ son maximum: $y_{max} = \left(\frac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{e}} = 1{\cdot}4453\ldots$

Considérée comme fonction de a, la fonction y (voir (4) et (5)) atteint son minimum pour $a = 1$. Pour les valeurs négatives de a posons: $a = -a_1$; la quantité définie par l'équation (5) a son maximum pour la valeur a_1 qu'on tire de la relation

$$1 + a_1 + l\,a_1 = 0 \tag{7}$$

et qui est $\qquad \bar{a}_1 = 0{\cdot}27876$

et son minimum pour $\qquad \bar{a}'_1 = 1 : a_1$.

Le maximum et le minimum de la fonction sont, resp., 1·4453... et 0·6922...

4. Traçons la courbe $y = | x^x |$ pour les valeurs réelles de x et considérons les parallèles à l'axe des x. Ici, trois cas se présentent:

a) Les parallèles à l'axe des x, ayant, de cet axe, une distance plus grande ou plus petite que resp. $y_{max} = 1{\cdot}4453\ldots$ ou $y_{min} = 0{\cdot}6922\ldots$, ne coupent la courbe $y = | x^x |$ qu'en un point.

b) Les droites parallèles à l'axe des x menées par les points extrêmes de la courbe la coupent en deux points.

c) Les parallèles dont la distance de l'axe des x varie de 0·6922... à 1·4453... coupent la courbe en trois points. Pour les abscisses des points extrêmes on a:

$$x_1 = -1 : e = -\bar{a}_1 x\,;\ x = 1{\cdot}3201\ldots \tag{8}$$

et pour

$$x = 1 : e \text{ on } a\ x_1 = -\frac{1}{\bar{a}_1 e}, \tag{9}$$

donc: $\qquad x_1 = -1{\cdot}3201\ldots$

Donc, on a le résultat suivant:

Pour les valeurs réelles, surpassant en valeur absolue la quantité

$$\bar{x} = 1{\cdot}3201\ldots$$

l'équation n'a aucune racine réelle en a, et, par suite, il résulte de l'équation

$$x^x = x_1^{x_1}$$

pour ces valeurs de x toujours $x = x_1$.

Pour des valeurs de x plus petites en valeur absolue que 1·3201..., l'équation exponentielle ci-dessus a deux racines négatives ou bien une racine positive et une racine négative, suivant que $x > 1$ et $x_1 > -1$, ou $x < 1$ et $x_1 < -1$.

A la fin, l'auteur donne des exemples de valeurs réelles de la fonction $w = z^z$ pour des arguments imaginaires.
