Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Krejčí

Začátky mathematické krystallografie [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 5, 239--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122697

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

(Pokračování.)

II. Tvary poloměrné.

44. Plnoměrné tvary dají se souměrným vynecháním polovice ploch rozložiti ve tvary *poloměrné* (hemiedrické), kteréž mají plochy těch samých úseků, avšak jen poloviční jich počet. Tentýž výsledek dá odvození z krychle. Střídavé vynechání podvojných ploch rovnoběžných, nebo přikrojení střídavých hran krychle dá totiž tvary s plochami *rovnoběžně poloměrnými*. Vynechání ploch ve střídavých obtantech, nebo přikrojení rohů krychle na střídavých rozích dá tvary s plochami *klonoplošně poloměrnými*. Vynechání střídavých ploch střídavě buď od pravé nebo od levé strany, neb přikrojení rohů krychle od pravé neb levé strany dá tvary s plochami *pravo-levě poloměrnými*.

Poloměrnost jest tudíž trojí: *rovnoběžná*, *klonoplochá* a *pravo-levá*.

Z toho též vychází, že poloměrnosti rovnoběžné jsou schopny toliko tvary s plochami d_n a o_s poloměrnosti klonoploché jen tvary s plochami osmičetnými, a poloměrnosti pravolevé jen osmačtyřicítník.

Rozklad tvarů plnoměrných ve tvary poloměrné lze nejsnáze znázorniti přenešením všech 48 polí osmačtyřicítníka na každý z nich a vynecháním těch polí dle naznačených tří spůsobů poloměrnosti, při čemž se shledá, že dva tvary, totiž h a d nižádného rozkladu nejsou schopny; rovnoběžného rozkladu jen krychlový čtyrmecítmík d_n a osmačtyřicítník O_s; klonoplochého rozkladu jen osmistěn O, čtyrmecítmíky $O\cdot/_m$, O_m a osmačtyřicítník O_s; a konečně pravolevého rozkladu jen osmačtyřicítník O_s.

A. Poloměrnost rovnoběžná.

a) S plochami v poloze $\pm d_n$.

45. Jednostranným přikrojením hran krychle, nebo vynecháním střídavých ploch tvaru d_n, vyvinou se dva tvary dva-

náctiploché, které se od sebe rozeznávají jen postavou o 90° kolem kolmé hlavní osy otočenou. Známka těch ploch jest $\pm d_n$, u Millera $\pi (n\, 10)$. Poloměrný tvar takto vyvinutý, obr. 1., jest obmezen 12 souměrnými pětiúhelníky, z nichž každý jest obmezen hranou P nad plochami vepsané krychle a čtyrmi hranami H.

Hran P jest 6, hran H jest 24; tyto vytvořují 8 pravidelně, ony s podvojnými hranami H 12 nepravidelně trojplochých rohů. Tvar ten slove *pětiúhelný dvanáctistěn* (Pentagonal-Dodekaëder).

Hlavní osy krychle ukončují se ve středu hran P, trojúhelné osy v pravidelných rozích; kosočtverečné osy nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

46. Úseky ustanoví se buď z hrany P dle rovnice

$$n = tang\, \tfrac{1}{2}P,$$

nebo z hrany H pomocí trojbokého výkrojku, obr. 73., O', $\frac{1}{2}H'$, $\frac{1}{2}H$, v němž $\frac{1}{2}H' = 90^0$, $(o', h') = 30^0$, pročež

$$cos\, 30^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{cos\, \frac{1}{2}H}{sin\, O'},$$
$$sin\, O' = 2\, cos\, \tfrac{1}{2}H\, \sqrt{{}^1/_3},$$

načež ze spojkové hrany toho dvanáctistěnu s osmistěnem se nalezne v trojbokém výkrojku, obr. 74., $\frac{1}{2}O$, O', $\frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 90^0$, $\frac{1}{2}O = 54^0\, 44'\, 8''$, $sin\, \frac{1}{2}O = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$cos\, (o, o'') = cos\, O' . \sqrt{\tfrac{2}{3}},$$
$$\tfrac{1}{2}P = (o, o'') + 45^0$$
$$n = tang\, \tfrac{1}{2}P.$$

47. Jelikož dle všeobecné rovnice 12. jest

$$cos\, P = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$cos\, H = -\frac{n}{n^2 + 1},$$

jest pro $H = P$, totiž pro *pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn.*

$$n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

což jest výraz neúměrný (irracionální), pročež se pravidelný pětiúhelný dvanáctistěn na vyhraněných hmotách objeviti nemůže.

b) S plochami v poloze $\pm O_s$.

48. Trojplochým přikrojením rohů krychle plochami podvojně rovnoběžnými, nebo rozkladem osmačtyřicítníka dle střídavých ploch podvojně rovnoběžných vyvinou se dva tvary, obmezené 24 lichoběžníky, které odtínají hrany krychle v poměru $^1/_m : ^1/_n : 1$.

Známka jejich jest tudíž $\pm o_s$ nebo u Müllera $\pi\,(mn\,1)$. Tvar ten slove *rovnoběžný čtyrmecítmík* (Diploid). Tvar ten (obr. 75.) má všeobecné obrysy pětiúhelného dvanáctistěnu, jen že každá plocha toho dvanáctistěnu jest od středu hran P ve dví přelomena. Plochy ty setkávají se ve 12 hranách souhlasných s hranami O na o_s, ve 24 hranách H nad plochami vepsaného osmistěnu a ve 12 hranách P nad stejnojmenným hranami tvaru $\pm d_n$. Rohy jsou troje: 8 pravidelně trojplochých, v nichž se končí trojúhelné osy krychle, 6 souměrně čtveroplochých, v nichž se končí hlavní osy krychle a 12 nepravidelně čtveroplochých rohů. Osy kosočtverečné nejsou vyznačeny zvláště patrným bodem.

49. Hrana O jsouc prodloužena protíná hlavní osu ve vzdálenosti $= {^1/_n}$, hrana P ve vzdálenosti $= 1$, kdežto osa, od níž ty hrany vycházejí, jest $^1/_m$.

50. Mezi odrůdami toho tvaru jsou též takové, v nichž jest hrana O rovnoběžná s hranou H. Nepravidelný roh jejich musí tedy od protilehlé roviny os tak vzdálen býti, jako roh trojúhelný. Pro trojúhelný roh jsou souřadnice

$$x = y = z.$$

Dosadíme-li ten výraz do rovnice plochy

$$ax + by + cz = 1, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{1}{a + b + c}.$$

Vezmeme-li nejmenší úsek za měřítko $= 1$, a tudíž na př. pro plochu o_s

$$\frac{1}{b} = 1, \quad \frac{1}{c} = m \quad \frac{1}{a} = \frac{m}{n}, \text{ nebo}$$

$$b = 1, \; c = \frac{1}{m}, a = \frac{n}{m}, \text{ jest}$$

$$x = y = z = \frac{m}{m + n + 1}.$$

Souřadnice nepravidelného rohu, z nichž delší $= s$, kratší s', ustanoví se, je-li nejkratší osa $= 1$, střední $= \frac{m}{n}$, nejdelší $= m$, srovnalostmi

$$1 : m = s : m - s', \text{ pročež}$$

$$s = \frac{m - s'}{m},$$

$$1 : \frac{m}{n} = s' : \frac{m}{n} - s, \text{ pročež}$$

$$s' = \frac{m - ns}{m}.$$

Spojením obou souřadnic obdržíme délky obou souřadnic

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}, \quad s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Pro tvar s rovnoběžnými hranami P a H jest $x = s'$, tedy

$$\frac{m}{m + n + 1} = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}, \text{ nebo}$$

$$m = n^2.$$

Známka stejnostranného $\pm o_s$ jest tedy o_{n^2}, u Millera $\pi (n^2 n 1)$.

51. K ustanovení úseků vůbec jest jako u tvaru o_s nutno znáti dvě hrany.

Jsou-li známy hrany O, P, doplňme osmistěn obmezený těmi hranami hranou O' (obr. 75.), načež jest dle všeobecné rovnice 13.

$$\cos P + \cos O + \cos O'' = -1, \text{ a dle 9.}$$

$$m : n : 1 = \cos \tfrac{1}{2} O' : \cos \tfrac{1}{2} P : \cos \tfrac{1}{2} O.$$

Nebo se ustanoví z hran O, P, obr. 75.

$$\cos (p, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} O}{\sin \frac{1}{2} P}, \quad \cos (o, a) = \frac{\cos \frac{1}{2} P}{\sin \frac{1}{2} O}, \text{ načež jest}$$

$$m = \tang (p, a), \quad \frac{m}{n} = \tang (o, a),$$

$$n = \frac{\tang (p, a)}{\tang (o, a)}.$$

52. Jsou-li známy hrany O, H, ustanoví se z trojbokého výkrojku O', $\frac{1}{2}H'$, $\frac{1}{2}H$ (obr. 75.), v němž $\frac{1}{2}H' = 90^0$, $(o', h') = 30^0$

$$sin\, O' = 2\, cos\, \tfrac{1}{2}H\, \sqrt{1/3}.$$

Ve spojení s osmistěnem (obr. 76,) dá plocha O, výkrojek $\frac{1}{2}O$, O', $\frac{1}{2}O''$, v němž $\frac{1}{2}O'' = 54^0\, 44'\, 8''$,

$$cos\, \tfrac{1}{2}O'' = \sqrt{1/3}\,,\ sin\, \tfrac{1}{2}O'' = \sqrt{2/3}\,,$$

$$cos\,(o, o'') = \frac{cos\, O'\, \sqrt{3} - cos\, \frac{1}{2}O}{sin\, \frac{1}{2}O\, \sqrt{2}}.$$

Jelikož $(o, o'') + 45^0 = (o, a)$, jest

$$\frac{m}{n} = tang\,(o, a)$$

$$m = tang\, \tfrac{1}{2}O.\, sin\,(o, a)$$

$$n = \frac{m}{tang\,(o\,,\, a)}.$$

53. Známe-li hrany P, H, jest

$$sin\, O' = 2\, cos\, \tfrac{1}{2}H\, \sqrt{1/3}$$

a ve spojení s osmistěnem (obr. 76.) ve výkrojku $\frac{1}{2}P$, O', $\frac{1}{2}O''$

$$cos\,(p, o'') = \frac{cos\, O'\, \sqrt{3} - cos\, \frac{1}{2}P}{sin\, \frac{1}{2}P\,.\, \sqrt{2}}$$

$$m = tang\,(p, a)$$

$$\frac{m}{n} = tang\, \tfrac{1}{2}P\,.\, sin\,(p, a).$$

Zobrazení rovnoběžně poloměrných tvarů.

54. Zobrazení děje se pomocí krychle, do níž se vnesou hlavní a trojúhelné osy, načež se ustanoví poloha pravidelných a nepravidelných rohů.

Pro *pětiúhelný dvanáctistěn* $\pm\, d_n$ jest trojúhelná osa, jakó ve tvaru d_n

$$t = \frac{n\sqrt{3}}{a+1}.$$

Poloha nepravidelného rohu ustanoví se ze souřadnic jeho s a s' (obr. 73.), které leží v rovině dvou hlavních os.

Vezme-li se hlavní osa $= 1$, jest dle srovnalosti

$$1 : n = s' : n - 1$$

$$s' = \frac{n-1}{n} = {}^1/_2\, p,$$

totiž rovná se délce poloviční hrany $p.$, kdežto

$$s = 1.$$

Nepravidelné rohy takto nalezené spojí se přiměřeně s konečnými body trojúhelných os.

Pro *rovnoběžný čtyřmecítmík* $\pm O_s$ (obr. 75.) jest jako ve tvaru O_s

$$t = \frac{m\sqrt{3}}{m + n + 1}.$$

Je-li hlavní osa $= 1$, jest

$$s = \frac{m^2 - m}{m^2 - n}$$

$$s' = \frac{m^2 - mn}{m^2 - n}.$$

Dle těch rovnic ustanoví se v rovinách dvou hlavních os poloha nepravidelných rohů, tedy vždy nad hranami vepsaného osmistěnu, načež se ty rohy přiměřeně spojí jak s hlavními tak i s trojúhelnými osami.

Spojky rovnoběžně poloměrných tvarů.

55. Do řady těchto tvarů náleží mimo $\pm d_n$ a $\pm O_s$ též všechny plnoměrné tvary, které poloměrnosti rovnoběžné schopny nejsou, tedy h, d, O^1/m, O_m. Mezi spojkami těch tvarů jsou nejhojnější ty, na nichž převládá h, O neb $\pm d_n$.

Ustanovení ploch děje se týmž způsobem jako u plnoměrných tvarů.

Následující příklady vysvětlí, jak se to ustanovení děje. Obrazce 77., 78., 79 představují tvary *Kobaltinu.*

Na obr. 77. jest vyobrazena spojka O a $+ d_n$. Jelikož spojková hrana stojí kolmo na hraně osmistěnu, totiž na straně pravidelného trojúhelníka, což činí též prodloužená strana pravidelného šestistěnu, náleží $+ d_n$ k onomu d_n, jehož šestiploché rohy otupuje osmistěn v podobě pravidelného šestiúhelníka (viz 14. u plnoměrných tvarů), pročež

$$+ d_n = + d_2 = + i.$$

Jsou-li obě plochy O a $\pm d_n$ v rovnováze, což se jeví na $\pm d_n$ otupením pravidelných rohů (obr. 78.), nabývá spojka podoby *dvacetistěnu,* obmezeného 8 stejnostrannými trojúhelníky O, a 12 stejnoramennými trojúhelníky $\pm d_n$.

V pravidelném dvacetistěnu (Ikosieder), kterýž jest obmezen samými stejnostrannými trojúhelníky, má se polovičná strana trojúhelníku k výšce jeho, jako $1 : tang\, 60^0$, čili jako $1 : \sqrt{3}$.

Tvar $\pm d_n$, z něhož by se dal otupením pravidelných rohů vyvinouti pravidelný dvacetistěn, musil by býti obmezen takovými pětiúhelníky, aby se spojením nepravidelných rohů do nich daly vepsati stejnostranné trojúhelníky, a tedy aby se polovičná hrana $\frac{1}{2}p$ měla k výšce O. pětiúhelníka jako $1 : \sqrt{3}$.

Vezmeme-li hlavní osu $= 1$, jest

$$\tfrac{1}{2}p = \frac{n-1}{n},$$

$$o^2 = a^2 + k^2,$$

kdežto $a = 1$, $k = 1 - \frac{n-1}{n} = -\frac{1}{n}$, pročež

$$o = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}.$$

V pravidelném dvacetistěnu jest tedy

$$\tfrac{1}{2}p : o = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$ nebo je-li $\frac{1}{2}p = 1$,

$$1 : \sqrt{3} = \frac{n-1}{n} : \frac{\sqrt{n^2+1}}{n},$$ z čehož

$$n = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

což jest výrazem neuměrným, a tedy na vyhraněných tvarech nemožným.

Pravidelný dvacetistěn nemůže se tedy na vyhraněných tvarech objeviti.

Obrazec 79. představuje spojku, na níž se dle polohy ustanoví plochy h co plochy krychle,

O co plochy osmistěnu,

$+d_n$, $+d_{n'}$ co plochy dvanáctistěnu,

$+O_t$ co plochy nějakého 24stěnu.

K ustanovení d_n a $d_{n'}$ změří se

$$d_n : h = 153^0\ 26'$$
$$d_{n'} : h = 165^0\ 58',$$

z čehož vychází

$$\tfrac{1}{2}P = 153^0\ 26' - 90^0 = 63^0\ 26'$$
$$\tfrac{1}{2}P' = 165^0\ 48' - 90^0 = 75^0\ 58',$$

načež z $n = tang\, \tfrac{1}{2}P$ ustanoví se $n = 2$,

z $n' = tang\, \tfrac{1}{2}P'$ $n' = 4$.

Plocha $+O_s$ leží v pásmu $O,\ O_s,\ d_2$.

Pro O_s jest $abc = 1nm$

O $a'b'c' = 111$

d_2 $a''b''c'' = 012$, z čehož dle 18. neb 19. všeobecné krystalografie

$$n = \frac{m+1}{2}.$$

K dalšímu ustanovení změří se úklon

$$O_s : O = 164^0\ 46' = O',$$

načež dle všeobecné rovnice 12., vložíme-li do ní

$$abc = 1\frac{m+1}{2}m$$

$$a'b'c' = 111, \text{ jest}$$

$$\cos O' = -\frac{3\,(m+1)}{\sqrt{3}\sqrt{5m^2+2m+5}},$$ z čehož

$m = {}^1\!/_2$, $n = {}^3\!/_4$, nebo dle srovnalosti

$$m : n : 1 = {}^1\!/_2 : {}^3\!/_4 : 1 \text{ se objeví}$$
$$m : n : 1 = 2 : 3 : 4 \text{ a tudíž}$$
$$O_s = a^1\!/_2\, b^1\!/_3\, c^1\!/_4.$$

Známka celého tvaru jest tedy dle našich symbolů:

	h	$+i$	$+d_4$	$+O_s$	O
dle Millera:	100	$\pi\,(210)$	$\pi\,(410)$	$\pi\,(432)$	111
dle Naumanna:	$\infty O \infty$	$\frac{\infty O2}{2}$	$\frac{\infty O4}{2}$	$\frac{2O^4\!/_3}{2}$	O

O rychlosti světla v prvcích lučebných.

Podává *prof. K. V. Zenger.*

Theoretické určování rychlosti zvuku jest, jak známo, velmi přesné a shoduje se se zkušeností; pročež shoda výjevů zvukových a světlových pohybů vlnitých přivedla záhy přírodozpytce na myšlenku, stejnými mathematickými výrazy domáhati se i rychlosti světla v rozličných ústředích.