Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Poznámka o Sturmových funkcích

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 36 (1907), No. 2, 136--141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122716

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1907

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Tím tedy dospíváme ku větě:

Má-li čára racionální n-tého stupně $(n - 1)$ násobný bod o, a vedeme-li tímto bodem přímku l, pak odlehlost průsečného bodu a s křivkou od bodu o, jest rovna algebraickému součtu vzdáleností bodu o od průseků přímky s asymptotami. (Viz Niewenglowski, Cours de Géométrie analytique, Tome II, p. 116.)

Jsou-li asymptoty imaginární, jsou vždy po dvou konjugované a místo každé z těchto dvojic možno voliti ellipsu, která má tyto asymptoty za své asymptoty; k vůli jednoduchosti můžeme voliti ellipsu tu, která prochází bodem o.

Větu tuto možno přímo applikovati na racionální křivky stupně 3-ho, jichž rovnice s dvojným bodem v počátku zní:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 + dx^2 + exy + fy^2 = 0, \qquad (\gamma)$$

čímž dospíváme ke konstrukcím, které v tomto*) ročníku v čísle 1. a 3. od dvorního rady prof. dra Zahradníka a prof. dra Fahouna byly uveřejněny.

V Plzni, dne 1 května 1905.

Poznámka o Sturmových funkcích.

Napsal **K. Petr**.

Jak známo, lze tu řadu Sturmových funkcí, jež počtem změn znaménkových udává počet párů kořenů komplexních, vyjádřiti pomocí kovariantů dané formy**). Totéž však jest možno i pro funkce Sturmovy v obyčejném slova smyslu, t. j. pro řadu funkcí, která počtem změn znaménkových udává počet kořenů reálných v daných mezích se nacházejících. I tyto funkce lze vyjádřiti pomocí útvarů invariantních a na to chci v následujícím poukázati. Užitek takového vyjádření Sturmových funkcí jest na snadě.

---

*) T. j. v ročníku 34. str. 19. a str. 219. Pozn. red.

**) Viz pojednání H. Schramma v Annali di mat., 2 s., t. I, rok 1867, str. 259.

Vyjdu z řady

$$1.\ \Sigma\xi_1,\ \Sigma\xi_1\xi_2\,\Delta^2(\alpha_1,\alpha_2),\ \Sigma\xi_1\xi_2\xi_3\,\Delta^2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \ldots,$$
$$\Sigma\,\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\Delta^2(\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n). \qquad (1)$$

Členové této řady jsou polynomy ve $2n$ číslech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ a jest číslo ξ_k přiřaděno číslu α_k. Jednotlivé členy této řady jsou symmetrické funkce vzhledem ku n dvojicím (ξ_k, α_k), $k = 1, 2, \ldots n$; součtová znaménka v (1) se nacházející mají význam týž jako součtová znaménka při označování symmetrických funkcí užívaná. Při tom jest rovněž dle obvyklého způsobu označení na př.

$$\Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

V řadě (1) nechť jsou čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ z části reálná, z části komplexní a zároveň vždy dvě k sobě komplexně sdružená. Jsou-li α_k a $\alpha_{k'}$ čísla komplexní sdružená, buďtež i ξ_k, $\xi_{k'}$ čísla komplexní sdružená; jestliže α_k jest reálné, budiž i ξ_k číslo reálné. Za takovýchto předpokladů jsou členy řady (1) vesměs čísla reálná. Udává pak řada (1) počtem změn znaménkových počet párů komplexních čísel mezi čísly $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zvětšený o počet těch záporných ξ_k, jež příslušejí reálným α_k, ($k = 1, 2, \ldots n$). Tato věta plyne buď ze zákona setrvačnosti kvadratických forem anebo též přímo*).

Uvažujme nyní formu s reálnými koefficienty

$$f(x_1, x_2) = (\alpha_2^{(1)}x_1 - \alpha_1^{(1)}x_2)(\alpha_2^{(2)}x_1 - \alpha_1^{(2)}x_2)$$
$$\ldots(\alpha_2^{(n)}x_1 - \alpha_1^{(n)}x_2).$$

Kořeny rovnice $f(x_1, x_2) = 0$, t. j. hodnoty pro $\frac{x_1}{x_2}$, jež formu $f(x_1, x_2)$ činí rovnou nulle, jsou patrně čísla $\frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$, $k = 1, 2, \ldots n$. Při tom jest možno při reálném $\frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$ čísla $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$ jako reálná předpokládati a současně při komplexních a sdružených $\frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$, $\frac{\alpha_1^{(k')}}{\alpha_2^{(k')}}$ čísla $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_1^{(k')}$ i čísla $\alpha_2^{(k)}$, $\alpha_2^{(k')}$ jako

*) Viz pojednání »O symmetrických soustavách čísel a větě Sturmově« v Rozpravách české akad., roč. XV., č. 2, str. 11 a násl.

komplexně sdružená voliti; takovouto volbu v následujícím předpokládáme.

Dosaďme do řady (1)

$$\xi_k = \frac{\alpha_2^{(k)} X_1 - \alpha_1^{(k)} X_2}{\alpha_2^{(k)} Y_1 - \alpha_1^{(k)} Y_2}, \quad \alpha_k = \frac{1}{\xi_k};$$

tu zatím činíme předpoklad, že $X_1 Y_2 - X_2 Y_1$, jakož i čitatel a jmenovatel ve výraze pro ξ_k nejsou rovny nulle.

Znásobíme takto vzniklou řadu výrazem

$$f(Y_1, Y_2) f(X_1, X_2)^{1+2\varkappa},$$

při čemž v jednotlivých členech řady můžeme $\varkappa$ zvoliti různě a tak, aby $f(Y_1, Y_2) f(X_1, X_2)^{1+2\varkappa}$ bylo nejmenším společným jmenovatelem v příslušném členu řady. Zároveň vypustíme činitele $(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2$, $(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^4, \ldots$, jež vyskytují se u členu třetího, čtvrtého, ... řady vzniklé.

Zavedeme-li pro krátkost označení

$$\alpha_2^{(k)} X_1 - \alpha_1^{(k)} X_2 = X^{(k)}, \quad \alpha_2^{(k)} Y_1 - \alpha_1^{(k)} Y_2 = Y^{(k)}$$

dostává řada (1) po dosazení a naznačených změnách tento tvar:

$$\begin{aligned} &f(X_1, X_2) f(Y_1, Y_2), \quad f(X_1, X_2)\, \Sigma X^{(1)} Y^{(2)} Y^{(3)} \ldots Y^{(n)}, \\ &\quad \Sigma X^{(3)} X^{(4)} \ldots X^{(n)} \,.\, Y^{(3)} Y^{(4)} \ldots Y^{(n)} \Delta^2(1, 2), \\ &\quad \Sigma (X^{(4)} X^{(5)} \ldots X^{(n)})^3 Y^{(4)} Y^{(5)} \ldots Y^{(n)} \Delta^2(1, 2, 3), \ldots, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad \Delta^2(1, 2, \ldots n). \end{aligned} \tag{2}$$

Člen $k + 1$-vý této řady jest $(k \geqq 2)$

$$\Sigma (X^{(k+1)} \,.\, X^{(k+2)} \ldots X^{(n)})^{2k-3} \,.\, Y^{(k+1)} Y^{(k+2)} \ldots Y^{(n)} \,.\, \Delta^2(1, 2, \ldots k).$$

Význam znaménka součtového jest týž jako v (1); $\Delta^2(1, 2, \ldots k)$ dostaneme z $\Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$, píšeme-li místo $\alpha_i - \alpha_j$ výraz $\alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(j)} - \alpha_2^{(i)} \alpha_1^{(j)}$.

Řada (2) jest patrně řada invariantních útvarů, jež má tolik změn znaménkových (při určitých numerických hodnotách koefficientů dané formy), kolik obnáší počet párů komplexních kořenů formy $f(x_1, x_2)$, zvětšený o počet záporných

$$\frac{\alpha_2^{(k)} X_1 - \alpha_1^{(k)} X_2}{\alpha_2^{(k)} Y_1 - \alpha_1^{(k)} Y_2} \tag{3}$$

při reálném $\dfrac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$.

Nechť jsou X_2 a Y_2 od nully různy a stejného znaménka a nechť ku př. $\frac{X_1}{X_2} > \frac{Y_1}{Y_2}$. Pak jest tento výraz záporný, když

$$\frac{X_1}{X_2} > \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}} > \frac{Y_1}{Y_2};$$

t. j. výrazů (3) jest tolik záporných, kolik jest kořenů dané formy mezi $\frac{X_1}{X_2}$ a $\frac{Y_1}{Y_2}$, jsou-li jen X_2 a Y_2 téhož znaménka. A tak máme větu:

V řadě (2) útvarů invariantních jest tolik změn znaménkových, kolik obnáší počet kořenů dané formy nacházejících se mezi $\frac{X_1}{X_2}$ *a* $\frac{Y_1}{Y_2}$*, zvětšený o počet párů kořenů komplexních té formy. Při tom jsou* X_2 *a* Y_2 *předpokládána jako čísla téhož znaménka.*

Položíme-li v řadě (2) $X_2 = Y_2 = 1$ a $X_1 = \infty$, dostáváme, ponechávajíce si z řady (2) jenom součinitele nejvyšší mocniny čísla X_1, řadu Sturmovu obyčejného druhu.

Klademe-li dále ve (2) $X_1 = Y_1$, $X_2 = Y_2$, což jest nyní přípustno, dostáváme řadu Schrammovu (viz svrchu poznámku):

$$1, 1, \Sigma(X^{(3)} X^{(4)} \dots X^{(n)})^2 \Delta^2(1,2), \Sigma(X^{(4)} X^{(5)} \dots X^{(n)})^4 \Delta^2(1,2,3), \dots$$
$$\dots, \Delta^2(1, 2, \dots, n),$$

která má tolik změn znaménkových, kolik daná forma kořenů komplexních. Řada Schrammova jest, jak patrno, řadou kovariantů příslušných dané formě.

V následujícím udávám Sturmovu řadu pro $n = 4$. Při formě stupně 4tého

$$f_{x^4} = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

použijeme k vyjádření Sturmových funkcí invariantů

$$S = a_4 a_0 - 4a_3 a_1 + 3a_2^2,$$
$$T = a_4 a_2 a_0 + 2a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_4 a_1^2 - a_2^3$$

a Hessienu

$$H_{x^4} = (a_2 a_0 - a_1^2)\, x_1^4 + 2(a_3 a_0 - a_2 a_1)\, x_1^3 x_2 + \dots$$

Pak, označíme-li poláry dle obvyklého způsobu, značíce ku př. v našem případě

$$f_{x^3y} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2\right),$$

dostáváme tuto Sturmovu řadu pro f_{x^4}:

$$f_{X^4} \cdot f_{Y^4}, \quad f_{X^4} \cdot f_{XY^3}, \quad -6H_{X^2Y^2} - S(X_1Y_2 - X_2Y_1)^2,$$
$$-3Tf_{X^3Y} + 2SH_{X^3Y}, \quad S^3 - 27T^2.$$

Konečně podotýkám, že lze si zjednati Sturmovy funkce ve formě invariantní operací podobnou postupnému dělení, tedy způsobem, jenž odpovídá původnímu a zároveň nejjednoduššímu odvození Sturmových funkcí. Jsou-li totiž x_1, y_1; x_2, y_2 dvě řady kogredientní proměnných a jsou-li

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) \quad \text{a} \quad H(x_1, x_2; y_1, y_2)$$

racionálné formy obou těch řad proměnných, kteréžto racionálné formy jsou vzhledem ku x_1, x_2 celistvé a druhá v (x_1, x_2) stupně o jednotku menšího, lze nalézti lineárnou formu v x_1, x_2 a racionálnou v y_1, y_2, již označíme $A_1x_1 + A_2x_2$, tak, aby bylo identicky

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = (A_1x_1 + A_2x_2)\,H(x_1, x_2; y_1, y_2)$$
$$-(x_1y_2 - x_2y_1)^2\,K(x_1, x_2; y_1, y_2) \qquad (4)$$

a aby zároveň byly formy $A_1x_1 + A_2x_2$, $K(x_1, x_2, y_1, y_2)$ invariantními útvary koefficientů forem G, H a proměnných. Při tom jest $K(x_1, x_2; y_1, y_2)$ celistvé v x_1, x_2 a stupně v těchto proměnných o jednotku menšího nežli jest H.

Abychom se dostali naznačenou operací, (jež jest jistým zevšeobecněním dělení), k funkcím Sturmovým, určujícím počet kořenů dané formy $f(x_1, x_2)$ v daných mezích, vyjdeme od této formy a od její první poláry

$$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2\right)$$

a způsobem rovnicí (4) vytčeným zjednáme si funkci

$$r_1(x_1, x_2; y_1, y_2),$$

invariantní to útvar dané formy a tak postupně řadu funkcí $r_k(x_1, x_2; y_1, y_2)$ jež jsou vesměs invarianty dané formy a stupně $n-k-1$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ v proměnných x_1, x_2 a jež jsou takové, že

$$f(x_1, x_2),\ \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2,\ r_1(x_1, x_2, y_1, y_2),\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$r_{n-1}(x_1, x_2;\ y_1, y_2)$$

jest řada Sturmových funkcí podobných vlastností jako řada (2); o této věci však netřeba se více šířiti.

Obrazce Lissajous-ovy.

Napsal **A. Ždímal**, Telč (Morava).

Z tvaru libovolné Lissajous-ovy křivky lze přesně stanoviti, kterého případu skládání dvou kmitavých pohybů ve směrech k sobě kolmých je grafickým znázorněním. Kriteriem je tu věta odpozorovaná z pokusů: „Počet horních (spodních) vrcholů křivky (v_h) má se k počtu vrcholů postranních (v_p), tak jako perioda složky vodorovné k periodě složky svislé.“ Platnost její lze jednoduše odůvodniti mathematicky:

Všeobecná rovnice pro Lissajous-ovy obrazce zní:

$$p\ arc\ sin\ \eta - q\ arc\ sin\ \xi = p\varepsilon.\ ^{*)} \qquad (1)$$

I. Chceme-li ustanoviti počet horních vrcholů křivky dané rovnicí (1), řešíme ji s rovnicí horní tečny, jež má tvar:

$$\eta = 1; \qquad (2)$$

tak dostaneme jednoduchým obratem pro ξ rovnici

$$\xi = sin\ \frac{p}{q}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$$

a vzhledem k významu písmeny ξ

$$x = a\ sin\ \frac{p}{q}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]. \qquad (3)$$

To jest obecná rovnice pro úsečky jednotlivých horních vrcholů; k znamená tu, jak obyčejně, libovolné číslo přirozené

---

*) Viz str. 383 roč. XXXI. tohoto časopisu v pojednání dvor. r. prof. dra. Č. Strouhala »Obrazce Lissajous-ovy«, nebo str. 8 brožury: »Analytische Darstellung der Lissajous-schen Figuren« od téhož autora (Praha 1902. Separatabdruck aus den Sitzungsberichten der Königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 1902).