Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr

O rovnici Pellově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 2, 57--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122735

O rovnici Pellově.

Napsal *K. Petr.*

V Rozpravách České Akademie z r. 1926, ročník 35, č. 6, odvodil jsem některé věty o rovnici Pellově a o rozvojích pro druhé odmocniny z čísel celých v řetězové zlomky nekonečné periodické jakožto důsledky některých formulí a vět z nauky o zlomcích řetězových. V následujícím podám odvození jich způsobem značně jednodušším, předpokládaje toliko základní vědomosti o rozvoji odmocnin z čísel celých v řetězové zlomky periodické, čímž docílím zároveň ještě rozšíření docílených výsledků.

I.

Abych podal pro čtenáře Časopisu výklad co možno nejpřístupnější, budu předpokládati jenom základní věty o řetězcích jakožto známé. Věty pak, jež vztahují se k rozvoji odmocnin z čísel racionálných, podám ve stručném odůvodnění, při čemž získám také ony výsledky, jež jsem v cit. práci odvodil.

Jestliže jest x číslo iracionálné, lze je rozvinouti v řetězec nekonečný tvaru

$$x = a + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 \dots, \tag{1}$$

kde $a, a_1, a_2, \dots$ jsou čísla celá a od indexu 1 i kladná. Konečný řetězec

$$a + 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_k \tag{2}$$

lze psáti, jak známo, ve tvaru zlomku P_k/Q_k, při čemž pro čísla P_k, Q_k jsou platny rovnice

$$P_{k+1} = a_k P_k + P_{k-1}, \quad Q_{k+1} = a_k Q_k + Q_{k-1}; \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}, \; P_0 = a, \; Q_0 = 1; \; P_1 = a_1 a + 1. \tag{4}$$

Rovnice tyto (3), (4) dávají vyjádření výrazu (2), ať jsou $a, a_1, a_2, \dots$ jakákoliv čísla, a jsou tedy platny i když nejsou a_k čísla celá kladná. Z (1) následuje dále

$$x = a + 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_k + 1/x_{k+1}, \tag{5}$$

kde x_{k+1} jest dáno rovnicí

$$x_{k+1} = a_{k+1} + 1/a_{k+2} + 1/a_{k+3} + \dots \tag{6}$$

jakožto číslo iracionálné a jest podle ní očividně

$$a_{k+1} = E x_{k+1} \tag{7}$$

t. j. a_{k+1} rovná se největšímu celému číslu, obsaženému v x_{k+1}.
Podle (5) a podle vyjádření výrazu (2) jest

$$x = \frac{P_k x_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k x_{k+1} + Q_{k-1}}. \tag{8}$$

Buď iž nyní $x = \sqrt{D}$, kde D jest kladné, celé a není čtvercem čísla celého. Potom z (8) následuje řešením podle x_{k+1} (s použitím (4))

$$x_{k+1} = \frac{\sqrt{D} + M_{k+1}}{N_{k+1}}, \tag{9}$$

při čemž

$$M_{k+1} = (-1)^k (P_k P_{k-1} - Q_k Q_{k-1} D), \tag{10}$$

$$N_{k+1} = (-1)^{k-1} (P_k^2 - Q_k^2 D). \tag{11}$$

Mezi N_k, M_k jsou v důsledku relace

$$x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}} \tag{12}$$

tedy vztahy

$$M_{k+1} + M_k = a_k N_k, \quad D = M_{k+1}^2 + N_k N_{k+1}, \tag{13}$$

které dovolují vypočítati M_{k+1}, N_{k+1}, jsou-li známy M_k, N_k (a_k jest dáno rovnicí $a_k = E x_k$).

Rovnice (8) jest splněna, když za x klademe $\sqrt{D}$ a za x_{k+1} výraz (9), a zůstane splněna i když v číslech x, x_{k+1} nahradíme $\sqrt{D}$ číslem $-\sqrt{D}$, t. j. jest vztah

$$-\sqrt{D} = a + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_k + 1/x'_{k+1}, \tag{14}$$

kde

$$x'_{k+1} = \frac{-\sqrt{D} + M_{k+1}}{N_{k+1}}. \tag{15}$$

Z (14) však plyne, že čísla

$$x'_{k+1}, \quad a_k + 1/x'_{k+1}, \quad a_{k-1} + 1/a_k + 1/x'_{k+1}, \ldots$$

jsou čísla záporná; neboť jinak by se záporné číslo $-\sqrt{D}$ rovnalo číslu kladnému. I jest tedy (v důsledku toho, že tři právě vypsaná čísla jsou záporná)

$$-1 < x'_{k+1} < 0, \tag{16}$$

$$-1 < a_k + 1/x'_{k+1} < 0, \qquad k > 0. \tag{17}$$

Z (16) a z okolnosti, že x_{k+1} dané rovnicí (9) jest větší než 1, následuje snadnou úvahou, že čísla M_{k+1}, N_{k+1} jsou čísla kladná (celá), hovící podmínkám $M_{k+1} < \sqrt{D}$, $N_{k+1} < 2\sqrt{D}$.

Ze (17) pak máme ihned

$$-1-\frac{1}{x'_{k+1}}<a_k<-\frac{1}{x'_{k+1}}, \qquad k>0$$

t. j., že

$$a_k=E\left(-\frac{1}{x'_{k+1}}\right). \tag{18}$$

Jsou tudíž rovnicemi (13) určeny také M_k, N_k, jsou-li dány M_{k+1}, N_{k+1}. Známe-li tedy x_k, kde $k>1$, známe též x_{k-1}, x_{k+1}. Jelikož pak rovnice druhá z (13) má jenom konečný počet řešení čísly celými kladnými M_{k+1}, N_k, N_{k+1} a následkem toho jest jenom konečný počet různých x_k při daném D, jest řada čísel

$$x_1, x_2, x_3 \ldots \tag{19}$$

periodická řada a perioda začíná již číslem x_1. Tu část řady, jež se opakuje, nazveme periodou té řady a budiž nejmenší perioda o sudém počtu členů řady (19) dána pořadím $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$, n jest sudé. Pak jest podle definice

$$x_{k+\lambda n}=x_k, \text{ avšak také } a_{k+\lambda n}=a_k,\ M_{k+\lambda n}=M_k,\ N_{k+\lambda n}=N_k, \tag{20}$$

t. j. i řady čísel a_k, M_k, N_k jsou periodické a naším úkolem nejprve právě jest zkoumati některé vlastnosti těchto řad.

Tu máme nejprve podle (18)

$$a_n=E\left(-\frac{1}{x'_{n+1}}\right)=E\left(-\frac{1}{x'_1}\right)=E(\sqrt{D}+a)=2a; \tag{21}$$

neboť a podle významu toho čísla jest právě $E\sqrt{D}$ a tudíž x_1 jest dáno rovnicí

$$\sqrt{D}=a+\frac{1}{x_1}, \quad x_1=\frac{1}{\sqrt{D}-a}, \text{ tedy } x'_1=-\frac{1}{\sqrt{D}+a}.$$

Z výrazu pro x_1 následuje též $M_1=a$, $N_1=D-a^2$. Poněvadž pak též

$$a_n=E\frac{\sqrt{D}+M_n}{N_n} \quad \text{a } M_n<\sqrt{D},$$

plyne z rovnosti dokázané $a_n=2a$ ihned $N_n=1$, $M_n=a=M_1$ a $x_n=\sqrt{D}+a$. Dále z (18) pro $k=n-1$

$$a_{n-1}=E-\frac{1}{-\sqrt{D}+a}=E\frac{1}{\sqrt{D}-a}=Ex_1=a_1.$$

Z rovnic $M_{n-1}+M_n=a_{n-1}N_{n-1}$, $D-a^2=N_{n-1}.1$ následuje, jelikož $M_n=M_1$, $a_{n-1}=a_1$, nejprve (z druhé) $N_{n-1}=N_1$ a pak (z prvé) $M_{n-1}=M_2$. Obecně dokážeme

$$N_{n-k+1}=N_{k-1}, \quad M_{n-k+1}=M_k, \quad k=2,3,4,\ldots, n-1 \tag{22}$$

a to úplnou indukcí. Budeme tyto rovnice předpokládati pro určité k a dokážeme, že jsou platny pro k o jednotku větší. To jest budeme předpokládati, že jest

$$x_{n-k+1} = \frac{\sqrt{D} + M_k}{N_{k-1}} \tag{23}$$

a dokážeme, že jest

$$x_{n-k} = \frac{\sqrt{D} + M_{k+1}}{N_k}. \tag{24}$$

Jest podle (18), (23), (13) a (7)

$$a_{n-k} = E\left(-\frac{1}{x'_{n-k+1}}\right) = E\frac{N_{k-1}}{\sqrt{D} - M_k} = E\frac{\sqrt{D} + M_k}{N_k} = a_k$$

a tedy

$$x_{n-k} = a_{n-k} + \frac{1}{x_{n-k+1}} = a_k + \frac{N_{k-1}}{\sqrt{D} + M_k} = a_k + \frac{\sqrt{D} - M_k}{N_k} =$$

$$= \frac{\sqrt{D} + a_k N_k - M_k}{N_k} = \frac{\sqrt{D} + M_{k+1}}{N_k},$$

čímž žádaný důkaz proveden a zároveň dokázáno, že i $a_{n-k} = a_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Sestavíme-li si tedy nejmenší periody řad číselných a_k, M_k, N_k o sudém počtu členů, dostaneme tyto tvary ($n = 2m$)

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_2, a_1, 2a; \\ &N_1, N_2, \ldots, N_{m-2}, N_{m-1}, N_m, N_{m-1}, N_{m-2}, \ldots, N_2, N_1, 1; \\ &M_1, M_2, \ldots, M_{m-2}, M_{m-1}, M_m, M_m, M_{m-1}, \ldots, M_3, M_2, M_1 = a. \end{aligned} \tag{25}$$

Perioda řady čísel a_k se skládá z čísla $2a$ (na posledním místě) a ze symetrické řady o lichém počtu členů; střední člen a_m se vyskytuje tam jedenkrát. Obdobně jest tomu při řadě čísel N_k. Perioda řady čísel M_k jest symetrická řada o sudém počtu členů, obsahuje dva (stejné) střední členy rovné M_m.

Okolnosti, že $M_m = M_{m+1}$ použijeme nejdříve k výpočtu středního koeficientu a_m.*) Z prvé rovnice (13) následuje pro $k = m$

$$2M_m = a_m N_m, \quad a_m = \frac{2M_m}{N_m}. \tag{26}$$

Avšak podle (7) jest současně

$$a_m = E\frac{\sqrt{D} + M_m}{N_m}.$$

Jest nyní dvojí případ možný:

1. a_m jest sudé, pak jest v důsledku posledních rovnic

$$a_m = 2E\frac{\sqrt{D}}{N_m}.$$

*) Tento výpočet byl právě cílem mého pojednání z Rozprav.

2. a_m jest liché, tu jest

$$a_m = 1 + 2E\left(\frac{\sqrt{D}}{N_m} - \frac{1}{2}\right).$$

Podle (26) jest v případu prvém (a_m sudé) M_m dělitelno číslem N_m, v případu druhém pak pouze polovička čísla N_m dělí M_m. Značí-li tedy $\varepsilon = 1$, $1/2$ podle toho, jde-li o případ prvý či druhý, pak plyne z rovnic (10) a (11) při $k = m - 1$

$$\left.\begin{array}{r} P_{m-1}^2 - Q_{m-1}^2 D \equiv 0, \\ P_{m-1}P_{m-2} - Q_{m-1}Q_{m-2}D \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod } \varepsilon N_m)$$

$$\text{aneb } \begin{cases} P_{m-1}P_{m-1} - Q_{m-1}D \,.\, Q_{m-1} \equiv 0, \\ P_{m-1}P_{m-2} - Q_{m-1}D \,.\, Q_{m-2} \equiv 0 \end{cases}$$

a tedy podle (4)

$$P_{m-1} \equiv 0, \quad Q_{m-1}D \equiv 0 \ (\text{mod } \varepsilon N_m).^{*)}$$

Jelikož však P_{m-1} a Q_{m-1} nemají podle (4) společné míry, jest εN_m dělitelem čísla D, označíme je D_1, kladouce zároveň $D = D_1 D_2$. Můžeme pak psáti

$$a_m = 2E\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \text{ v případě prvém,}$$

$$a_m = 1 + 2E\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} - 1\right) \text{ v případě druhém.} \tag{27}$$

Z těchto výrazů jest zároveň patrno, že $\varepsilon N_m = D_1$ jest menší než D_2. Klademe-li dále $P_{m-1} = D_1 u$, $Q_{m-1} = v$, $1/\varepsilon = \varrho$ ($= 1$ v případě prvém, $= 2$ v případě druhém), můžeme rovnici (11) při $k = m - 1$ psáti ve tvaru — krátivše ji celou D_1 —

$$D_1 u^2 - D_2 v^2 = (-1)^m \varrho. \tag{28}$$

D_1 může býti rovno i 1. V tomto případě, je-li $\varrho = 1$, musí býti m liché. Neboť, když $D_1 = 1$, $\varrho = 1$, jest $N_m = 1$, $a_m = 2a$ a stejně jako svrchu z okolnosti $a_n = 2a$ jsme pro řadu $a_1, a_2, \ldots a_n$ dospěli k tvaru (25), dospíváme při $a_m = 2a$ pro řadu $a_1, a_2, \ldots a_m$ ke tvaru $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_3, a_2, a_1, 2a$, tedy kdyby m bylo sudé, neměla by nejmenší perioda o sudém počtu členů n členů, nýbrž buď m členů anebo ještě méně.

---

*) Při tom, je-li $\varepsilon = \frac{1}{2}$, jest podíl čísla P_{m-1} a čísla εN_m číslo liché; neboť kdyby byl sudý, bylo by P_{m-1} a tudíž i D a tedy i M_m dělitelno N_m a nemohlo by býti $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Z rovnice (28) následuje umocněním a jednoduchou úpravou

$$\left.\begin{aligned}(D_1u^2+D_2v^2)^2-D(2uv)^2&=1, \text{ je-li } \varrho=1,\\ \left(\frac{D_1u^2+D_2v^2}{2}\right)^2-D(uv)^2&=1, \text{ je-li } \varrho=2,\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

tedy v každém případě řešení rovnice Pellovy.

Můžeme dokonce vysloviti tuto větu: Vedle rovnice Pellovy při daném D

$$\xi^2-D\eta^2=1 \tag{I}$$

jest vždy řešitelna jedna a *jenom jedna* z rovnic

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}u^2-Dv^2&=-1,\\ u^2-Dv^2&=\pm 2,\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&D_1=1,\ D_2=D\\ &u \text{ nesoudělno s } D,\end{aligned}\\ &\left.\begin{aligned}D_1u^2-D_2v^2&=\pm 1,\\ D_1u^2-D_2v^2&=\pm 2,\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&D=D_1D_2,\ 1<D_1<D_2,\\ &u \text{ nesoudělno s } D_2,\ v \text{ s } D_1,\end{aligned}\end{aligned}\right.\tag{II}$$

čísly celými u, v (společná míra čísel D_1, D_2 jest buď 1 anebo 2).*) Nejmenší řešení rovnice Pellovy vyplývá z nejmenšího řešení jedné z rovnic (II) způsobem ve (29) vyznačeným.**)

K důkazu této věty nejprve budeme potřebovati důkaz výroku, že nejmenší řešení rovnice Pellovy jest dáno rovnicemi $\xi=P_{n-1}$, $\eta=Q_{n-1}$, kde P_{n-1}, Q_{n-1} vztahují se k řetězci (1) pro $x=\sqrt{D}$ a n jest, jako svrchu, počet členů nejmenší periody o sudém počtu členů. Dejme tomu totiž, že by bylo jiné nejmenší řešení, na př. X, Y, kde $X>0$, $Y>0$, $Y<Q_{n-1}$ a kde

$$X^2-DY^2=1.$$

Rozvineme X/Y v řetězec tvaru

$$\frac{X}{Y}=a'+1/a'_1+1/a'_2+\ldots+1/a'_{\nu-1},$$

a', a'_k celá kladná, ν sudé. Jelikož

$$\frac{X^2}{Y^2}=D+\frac{1}{Y^2} \text{ a tedy } \frac{X^2}{Y^2}<D+\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{4DY^4},$$

jest

$$\frac{X}{Y}-\sqrt{D}<\frac{1}{2\sqrt{D}\,Y^2}.$$

---

*) Společná míra čísel D_1, D_2 může nastati pouze tenkráte, když $D_1D_2=D$ jest dělitelno 2^λ, kde $\lambda>2$, pak u, v jsou čísla lichá a jedno z čísel D_1, D_2 jest dělitelno 2^1, druhé $2^{\lambda-1}$.

**) Tento výsledek odvodil, jak jsem během tisku zjistil, již Lejeune-Dirichlet v práci »Einige neue Sätze über unbestimmte Gleichungen«. (Abhandlungen der Preuss. Akademie der Wiss. z roku 1834, Werke I, str. 219.) Odvození jeho není v souvislosti s teorií zlomků řetězových.

Vzhledem k této nerovnině a k známým větám o apromixaci čísel iracionálných pomocí zlomků řetězových jest $a' = a$, $a'_i = a_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Poněvadž pak $X = P_{\nu-1}$, $Y = Q_{\nu-1}$, jest $N_\nu = 1$, tedy $M_\nu = a$*) a $a_\nu = 2a$ a existuje tedy perioda o ν členech při ν sudém, což jest nemožno, jelikož n jest nejmenší počet členů u periody o sudém počtu členů a $n > \nu$, jelikož $Q_{n-1} > Y$.

Jest tedy $(\xi, \eta) = (P_{n-1}, Q_{n-1})$ nejmenším řešením rovnice Pellovy a my položíme za předpokladu, že $\xi = P_{n-1}$, $\eta = Q_{n-1}$,

$$\Theta = \xi + \eta\sqrt{D}, \text{ pak jest } \Theta^{-1} = \xi - \eta\sqrt{D}$$

a $\Theta > 1$. Dále lze λ-tou mocninu Θ psáti ve tvaru — λ celé číslo kladné —

$$\Theta^\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda\sqrt{D} \text{ a tudíž } \Theta^{-\lambda} = \xi_\lambda - \eta_\lambda\sqrt{D},$$

kde ξ_λ, η_λ jsou čísla celá. Z toho následuje $\Theta^\lambda \cdot \Theta^{-\lambda} = 1 = \xi_\lambda^2 - \eta_\lambda^2 D$. Jsou tedy ξ_λ, η_λ také řešení rovnice Pellovy a dostaneme tak (nehledě ke znaménkům čísel dávajících řešení) všecka řešení rovnice Pellovy, což bylo by lze snadně dokázati.

Pišme dále (za předpokladu $D_1 u = P_{m-1}$, $v = Q_{m-1}$)

$$\sqrt{\frac{D_1}{\varrho}}\, u + \sqrt{\frac{D_2}{\varrho}}\, v = \Delta,$$

pak

$$\Delta^2 = \left[\frac{D_1 u^2 + D_2 v^2}{\varrho} + \sqrt{D}\frac{2uv}{\varrho}\right] = \Theta.$$

Neboť nejprve jest jasno, že Δ^2 jest mocninou čísla Θ. Neboť, klademe-li $\Delta^2 = A + B\sqrt{D}$, jest $A^2 - B^2 D = 1$ a tedy nutně podle toho, co bylo řečeno, $\Delta^2 = \Theta^\lambda$; avšak, jak snadno z významu čísel u, v, ξ, η následuje, jest $0 < \lambda < 2$, tudíž $\lambda = 1$.

Zbývá nám jenom dokázati, že z rovnic ve (II) uvedených toliko jedna jest řešitelna. Budiž u_0, v_0 řešení jedné z těch rovnic a to rovnice $D'_1 u^2 - D'_2 v^2 = \pm\varrho'$ a buď $u_0 > 0$, $v_0 > 0$; uvažujme pak číslo

$$\sqrt{\frac{D'_1}{\varrho'}}\, u + \sqrt{\frac{D'_2}{\varrho'}}\, v_0 = \Delta_0 > 0.$$

Utvoříme-li čísla

$$\Delta_0 \Theta^\lambda = \sqrt{\frac{D'_1}{\varrho'}}\, u_\lambda + \sqrt{\frac{D'_2}{\varrho'}}\, v_\lambda > 0, \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

---

*) Neboť $M^2_\nu = D - N_\nu N_{\nu-1}$ i jelikož pak $N_\nu = 1$, $N_{\nu-1} \leqq 2a$, jest $M^2_\nu \geqq D - 2a$ a je-li $D > a^2 + 1$ i $M^2_\nu > a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2$, $M_\nu \geqq a$ a tedy $M_\nu = a$. Případ, že $D = a^2 + 1$ lze snadno řešiti, neboť lze v tomto případě udati i nejmenší řešení rovnice Pellovy obecně pro každé a i řetězový zlomek pro $\sqrt{D}$ jest totiž $\sqrt{D} = a + 1/2a + 1/2a + \ldots$

budou očividně u_λ, v_λ řešení téže rovnice; jest, jak snadným počtem plyne
$$u_\lambda = \xi_\lambda u_0 + D'_2 \eta_\lambda v_0, \qquad v_\lambda = \xi_\lambda v_0 + D'_1 \eta_\lambda u_0.$$

Můžeme, vhodně volíce λ, docíliti, aby $1 < \Delta_0 \Theta^\lambda < \Theta$. Pak, když λ tak volíme, jest $\Delta'^2 = \Theta$ při $\Delta' = \Delta_0 \Theta^\lambda$. Jest tedy $\Delta'^2 = \Delta^2$ a tudíž $\Delta' = \Delta$, to jest, píšeme-li k vůli symetrii $u_\lambda = u'$, $v_\lambda = v'$,
$$\sqrt{\frac{D'_1}{\varrho'}}\, u' + \sqrt{\frac{D'_2}{\varrho'}}\, v' = \sqrt{\frac{D_1}{\varrho}}\, u + \sqrt{\frac{D_2}{\varrho}}\, v.$$

Aspoň jedna z odmocnin na pravé a jedna na levé straně jsou čísla iracionálná. I jest tedy každý člen levé strany roven jednomu členu pravé. Jsou celkem dvě možnosti; stačí uvažovati jednu, na př.
$$\sqrt{\frac{D'_1}{\varrho'}}\, u' = \sqrt{\frac{D_1}{\varrho}}\, u; \qquad \sqrt{\frac{D'_2}{\varrho'}}\, v' = \sqrt{\frac{D_2}{\varrho}}\, v. \qquad (+)$$

Má-li D'_1/ϱ' lichý kvadratický činitel, který není v D_1/ϱ, pak v důsledku první z napsaných rovnic má u za činitel druhou jeho odmocninu a D_2/ϱ následkem toho, že $D'_1 D'_2 = D_1 D_2$, má rovněž onen lichý kvadratický činitel. Tento případ však nemůže nastat, neboť pak by čísla $D_1 u^2$ a $D_2 v^2$ měla společnou míru různou od 2. Mohou se tedy čísla D_1, D_2, u, v od čísel D'_1, D'_2, u', v' lišiti jenom činiteli, jež jsou mocninami čísla 2. V další úvaze značiti nám bude znak $a \backsim b$, že čísla a, b mají touž mocninu čísla 2 za činitele. Pak pro čísla v (+) mohou nastati případy:

a) $\sqrt{\dfrac{D'_1}{\varrho'}}\, u' = \sqrt{\dfrac{D_1}{\varrho}}\, u \backsim \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. V tomto případě jest $\varrho = \varrho' = 2$; $D_1 \backsim D'_1 \backsim 1$ a tedy $D_1 = D'_1$, $u = u'$, $D_2 = D'_2$, $v = v'$. Čísla Δ a Δ' i příslušné k nim rovnice typu (II) jsou identické.

b) $\sqrt{\dfrac{D_1}{\varrho}}\, u \backsim 1$; pak, je-li $\varrho' = \varrho$ $(= 1, 2)$ jsou opět $D_1 = D'_1$, u, u', ... a čísla Δ a Δ' jsou identická. Jestliže $\varrho = 2$, $\varrho' = 1$, pak $D_1 = 2D'_1 \backsim 2$, $2D_2 = D'_2$ $u = u' \backsim 1$, $v = 2v'$ a příslušné rovnice k Δ a Δ' mají tvar
$$D_1 u^2 - D_2 v^2 = \pm 2, \qquad \frac{1}{2} D_1 u^2 - 2 D_2 \left(\frac{1}{2} v\right)^2 = \pm 1,$$

avšak první z napsaných rovnic jest podmínkami pro u, v ve (II) zavedenými vyloučena, neboť v a D_1 mají společnou míru a není tedy Δ příslušno k žádné z rovnic (II). Obdobně by tomu tak bylo, kdyby $\varrho = 1$, $\varrho' = 2$.

c), *d)*. V těchto případech totéž, co bylo v *a)*, *b)*, předpokládáme o $\sqrt{\dfrac{D_1}{\varrho}}\, u$ se předpokládá o $\sqrt{\dfrac{D_2}{\varrho}}\, v$ a dospíváme k týmž důsledkům.

I jest tedy prokázáno, že z rovnic ve (II) jest řešitelna jenom jediná.

II.

Probereme některé zajímavější případy dokázané věty a odvodíme si v nich příslušné, z části ovšem dávno známé, další důsledky.

1. D jest tvaru $4r+1$; $D \equiv 1 \pmod 4$. Pak, je-li $D = D_1 . D_2$, $D_1 \equiv D_2 \pmod 4$ a rovnice

$$D_1u^2 - D_2v^2 = \pm 2$$

nemůže býti řešitelna. Neboť u a v musí býti nejprve stejné parity; avšak potom jest levá strana dělitelna 4 a nemůže býti rovna ± 2. V tomto případě jest tedy řešitelna jedna a jenom jedna z rovnic

$$u^2 - Dv^2 = -1 \qquad (\alpha)$$

$$D_1u^2 - D_2v^2 = \pm 1 \qquad 1 < D_1 < D_2 \qquad (\beta)$$

a prostřední částečný jmenovatel a_m jest dán rovnicí

$$a_m = 2E\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}.\ *)$$

Jestliže $D_1 = 1$, t. j., jestliže jest řešitelna rovnice $u^2 - Dv^2 = -1$, jest prostřední částečný jmenovatel rovný $2a$ a jak ze svrchu podané úvahy vyplývá, rozpadá se perioda n členná na dvě stejné periody o m členech; číslo m jest nutně liché i z té příčiny, že nejmenší počet členů periody o sudém počtu členů jest právě $n = 2m$. Z okolnosti pak, že $a_m = 2a$ vyplývá, stejně jako svrchu, že řada $a_1, a_2, \ldots a_{m-2}, a_{m-1}$ jest podle středu symetrická, t. j., že $a_1 = a_{m-1}, a_2 = a_{m-2}, \ldots$ a rovněž tak řada $N_1, N_2, \ldots, N_{m-1}$. Označíme-li tudíž $\nu = \frac{1}{2}(m-1)$, jest

$$N_\nu = N_{\nu+1}$$

a z druhé rovnice (13) pak následuje

$$D = M_{\nu+1}^2 + N_{\nu+1}^2$$

t. j. jestliže jest řešitelna rovnice $u^2 - Dv^2 = -1$, jest D rozložitelno v součet dvou čtverců.

Zejména pak, jestliže D jest prvočíslo (tvaru $4r+1$), poněvadž nutně musí býti řešitelna rovnice (α), jest D rozložitelno v součet dvou čtverců. Jestliže $D = p_1p_2$, kde p_1, p_2 jsou prvočísla tvaru $4r+1$ a, kde p_1 jest nezbytek kvadratický podle p_2, nemůže býti řešitelna rovnice

$$p_1u^2 - p_2v^2 = \pm 1$$

a jest tedy řešitelna rovnice

$$u^2 - p_1p_2v^2 = -1.$$

Jestliže $D \equiv 3$ a jest prvočíslem, pak může býti řešitelna toliko rovnice

$$u^2 - Dv^2 = \pm 2$$

*) Tento výsledek induktivně (z tabulek) odvodil M. Thielmann v Math. Annalen sv. 95 (1926) str. 635 a to v případě, že D_1, D_2 jsou prvočísla.

a pro střední částečný jmenovatel máme vztah

$$a_m = 1 + 2E\frac{1}{2}(\sqrt{D} - 1) = \text{lichému z čísel } a - 1,\ a.$$

O tom, jak by bylo lze použíti výsledků odvozených pro zkrácení počtů při rozvinování $\sqrt{D}$ v zlomek řetězový netřeba se šířiti.*)

*

Sur l'équation de Pell.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre, en s'appuyant sur le développement de $\sqrt{D}$ en une fraction continue, qu'outre l'équation de Pell

$$\xi^2 - D\eta^2 = 1 \qquad D \text{ entier positif} \tag{I}$$

est résoluble, en même temps, par des nombres entiers u, v, une et une seulement des équations

$$\begin{matrix} D_1u^2 - D_2v^2 = \pm 1 & D_1D_2 = D \\ D_1u^2 - D_2v^2 = \pm 2 & D_1 < D_2 \end{matrix} \tag{II}$$

Si $D_1 = 1$, il faut prendre le second signe dans la première équation. Dans la deuxième u est premier par rapport à D_2, v premier par rapport à D_1. Les racines, ayant la moindre valeur, de l'équation de Pell sont liées, aux racines, ayant la même propriété, de celle des équations (II) qui est résoluble dans le cas considéré, par les formules

$$\xi = \left(\frac{D_1u^2 + D_2v^2}{\varrho}\right)^2, \qquad \eta = \left(\frac{2uv}{\varrho}\right)^2,$$

où $\varrho = 1$, resp. $= 2$, si la première ou la deuxième équation (II) est résoluble.

Si l'on développe, de la manière bien connue, $\sqrt{D}$ en une fraction continue de la forme

$$a + 1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n + 1/a_1 + \ldots$$

où $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est une période et n est le plus petit nombre pair ayant cette propriété, on a, comme on sait, $a_n = 2a = 2E\sqrt{D}$, et de plus, si l'on pose $n = 2m$:

$$a_m = 2E\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}, \text{ si la première équation (II) est résoluble;}$$

$$a_m = 1 + 2E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} - 1\right), \text{ si la deuxième équation (II)}$$

est résoluble.

---

*) Že v případě, kdy dvě po sobě následující čísla M_k, M_{k+1} jsou sobě rovna, lze zkrátiti na polovičku výpočet zlomku řetězového, na to poukázal ve své práci »Sur quelques points de la théorie des fractions continues« ruský mat. D. Selivanov (Věstník Kr. Č. Spol. Nauk, r. 1925).