Arnold Walfisz

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. VI. Abh

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 1, 1--19

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122899`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Sechste Abhandlung.

Arnold Walfisz, Radość (Polen).

(Eingegangen am 21. August 1936.)

Es seien:

$k \geqq 4$ ganz (wenn der Fall $k = 4$ nicht besonders hervorgehoben wird, sei sogar $k \geqq 5$);

$$Q = Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}) \tag{1}$$

eine positiv definite Form mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante D;

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rationale Zahlen mit dem Hauptnenner H;

$$A(n) = A_{Q;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(n) = \sum_{Q(m_1,\ldots,m_k)=n} \exp\{2\pi i\,(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)\} \tag{2}$$

für ganzes $n \geqq 0$ (falls der Wert $n = 0$ nicht ausdrücklich zugelassen wird, sei stets $n > 0$).

Mit B werden unterschiedslos Zahlen bezeichnet, deren absolute Beträge gewisse, nur von Q und H abhängige Schranken nicht überschreiten. Eine Ausnahme bilden die beiden Hilfssätze, in denen die B-Schranken von anderen Parametern abhängen; ich komme darauf noch zurück.

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich die Summe $\sum\limits_{n=1}^{N} |A(n)|^2$ für $N \geqq 3$.

* * *

Satz 1: *Mit einer geeigneten Konstanten*

$$\lambda = \lambda_{Q;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_k} > 0 \tag{3}$$

ist für $k \geqq 5$

$$\sum_{n=1}^{N} |A(n)|^2 = \lambda N^{k-1} + BN^{k-2} + BN^{\frac{1}{2}k}. \tag{4}$$

Beweis: q und q' seien natürliche, p und p' ganze Zahlen. In Summen, die nach p oder p' laufen, soll Σ' andeuten, dass neben den anderen Summationsbedingungen noch $(p, q) = 1$ oder $(p', q') = 1$ verlangt wird. Ich setze

$$S_{p,q} = S_{p,q;\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \sum_{a_1,\ldots,a_k=0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} Q(a_1, \ldots, a_k) + \right. \left. + 2\pi i (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k)\right\}, \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{\pi^k}{(k-1) D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, H)}}^{\infty} \sum_{0 \leqq p < q}{}' \frac{|S_{p,q}|^2}{q^{2k}}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, H)}}^{\infty} \sum_{0 \leqq p < q}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \exp\left\{-2\pi i n \frac{p}{q}\right\}. \tag{7}$$

Wegen

$$S_{p,q} = B q^{\frac{1}{2}k} \text{ [1]} \tag{8}$$

konvergieren die Reihen (6) und (7) absolut und es ist

$$\mathfrak{S}(n) = B.$$

Nimmt man noch

$$A(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\sqrt{D}\,\Gamma(\frac{1}{2}k)} \mathfrak{S}(n)\, n^{\frac{1}{2}k-1} + B n^{\frac{1}{4}k} \text{ [2]} \tag{9}$$

hinzu, so folgt

$$|A(n)|^2 = \frac{\pi^k}{D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2} + B n^{\frac{3}{4}k-1},$$

$$\sum_{n=1}^{N} |A(n)|^2 = \frac{\pi^k}{D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \sum_{n=1}^{N} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2} + B N^{\frac{3}{4}k}, \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2}$$

$$= \sum_{\substack{q,q'=1 \\ q,q' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, H)}}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leqq p < q \\ 0 \leqq p' < q'}}{}' \frac{S_{p,q}\overline{S}_{p',q'}}{q^k q'^k} \sum_{n=1}^{N} n^{k-2} \exp\left\{-2\pi i n \left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right)\right\}.$$

Wegen

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right| < 1, \ (p, q) = 1, \ (p', q') = 1$$

---

[1] Vgl. die erste gleichnamige Abhandlung (im folgenden kurz E_I genannt): Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307, Formel (23a).
Einen Beweis dieser Abschätzung kann der Leser auch weiter unten kennen lernen, vgl. Fussnote [3]).

[2] E_I, Formel (14).

sind nur die beiden Fälle möglich

$$p = p', \ q = q'; \ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1.$$

Es ist also, mit Rücksicht auf (8),

$$\sum_{n=1}^{N} | \mathfrak{S}(n) |^2 n^{k-2} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ H)}}^{\infty} \ \sum_{0 \leqq p < q}{}' \frac{| S_{p,q} |^2}{q^{2k}} \sum_{n=1}^{N} n^{k-2} \tag{11}$$

$$+ B \sum_{q,q'=1}^{\infty} \ \sum_{\substack{0 \leqq p < q,\ 0 \leqq p' < q' \\ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1}} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \operatorname{cosec} \left(\pi \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| \right) N^{k-2},$$

falls die Reihe im B-Glied konvergiert. Dies ist aber der Fall, wegen

$$\sum_{q,q'=1}^{N} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{\substack{0 \leqq p < q,\ 0 \leqq p' < q' \\ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1}} \operatorname{cosec} \left(\pi \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| \right) = \sum_{d=1}^{N} \sum_{\substack{q,q'=1 \\ (q,q')=d}}^{N}$$

$$= \sum_{d=1}^{N} d^{-k} \sum_{\substack{q,q' \leqq \frac{N}{d} \\ (q,q')=1}} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{\substack{0 \leqq p < dq,\ 0 \leqq p' < dq' \\ 0 < \left| \frac{p}{dq} - \frac{p'}{dq'} \right| < 1}} \operatorname{cosec} \frac{\pi \, | pq' - qp' |}{dqq'}$$

(ich habe q, q' durch dq, dq' ersetzt)

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{2-k} \sum_{\substack{q,q'=1 \\ (q,q')=1}}^{N} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{1 \leqq a < dqq'} \operatorname{cosec} \frac{\pi a}{dqq'}$$

(ich habe $| pq' - qp' | = a$ gesetzt und beachtet, dass jedes a nur Bd^2 mal vorkommen kann, weil entweder $pq' - qp' \equiv a$ (mod qq') oder $pq' - qp' \equiv -a$ (mod qq') sein muss, und in jeder dieser Kongruenzen p mod q, p' mod q' eindeutig bestimmt sind)

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{3-k} \sum_{q,q'=1}^{N} (qq')^{1-\frac{1}{2}k} \sum_{1 \leqq a < dqq'} a^{-1}$$

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{-2} \sum_{q,q'=1}^{\infty} (qq')^{-\frac{3}{2}} \log (dqq') = B.$$

Zugleich ergibt sich aus (11)

$$\sum_{n=1}^{N} | \mathfrak{S}(n) |^2 n^{k-2} = \frac{1}{k-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ H)}}^{\infty} \ \sum_{0 \leqq p < q}{}' \frac{| S_{p,q} |^2}{q^{2k}} N^{k-1} + BN^{k-2}.$$

Setzt man dies in (10) ein, so folgt (4) mit (6). Ich habe noch (3) für den Ausdruck (6) nachzuweisen.

Aus (5) und (1) folgt

$$
\begin{aligned}
|S_{p,q}|^2 &= \sum_{a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_k=0}^{q-1} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(a_1,\dots,a_k) - \\
&\qquad - Q(b_1,\dots,b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu (a_\nu - b_\nu)\Bigr\} \\
&= \sum_{b_1,\dots,b_k=0}^{q-1} \sum_{c_1=-b_1}^{q-1-b_1} \dots \sum_{c_k=-b_k}^{q-1-b_k} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(b_1+c_1,\dots,b_k+c_k) - \\
&\qquad - Q(b_1,\dots,b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\Bigr\}
\end{aligned}
$$

(ich habe neue Summationsbuchstaben $b_1,\dots,b_k, c_1,\dots,c_k$ durch $a_1 = b_1 + c_1, \dots, a_k = b_k + c_k$ eingeführt)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{b_1,\dots,b_k,c_1,\dots,c_k=0}^{q-1} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(b_1+c_1,\dots,b_k+c_k) - \\
&\qquad - Q(b_1,\dots,b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\Bigr\}
\end{aligned}
$$

(wegen $q \equiv 0 \pmod H$) hat $\exp\{\ \}$ bei jedem c die Periode q)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{b_1,\dots,b_k,c_1,\dots,c_k=0}^{q-1} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1,\dots,c_k) + 4\pi i \frac{p}{q} \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} b_\mu c_\nu + \\
&\qquad + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\Bigr\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{c_1,\dots,c_k=0}^{q-1} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1,\dots,c_k) + \\
&\qquad + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\Bigr\} \prod_{\mu=1}^{k} \sum_{b_\mu=0}^{q-1} \exp\Bigl\{4\pi i \frac{p}{q} \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} c_\nu \,.\, b_\mu\Bigr\}
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^k \sum_{\substack{c_1,\dots,c_k=0 \\ 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}c_\nu \equiv 0,\dots,\, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}c_\nu \equiv 0 \pmod q}}^{q-1} \exp\Bigl\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1,\dots,c_k) + \\
&\qquad + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\Bigr\},
\end{aligned} \tag{13}
$$

denn das μ-Produkt in (12) ist nur dann von Null verschieden, und zwar $= q^k$, wenn die unter dem c-Summenzeichen von (13) aufgeschriebenen Kongruenzen erfüllt sind. Da diese linearen Kongruenzen

$$2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}c_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}c_\nu \equiv 0 \pmod q \tag{14}$$

die Determinante 2^kD haben, so erfüllen die Lösungen $c_1, \ldots, c_k$ auch die folgenden Kongruenzen

$$2^kDc_1 \equiv 0, \ldots, 2^kDc_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ q).^{3)} \tag{15}$$

Es sei (nur für den Augenblick)

$$D = 2^dD',\ d \geqq 0,\ D' \text{ ungerade.} \tag{16}$$

Dann setze ich

$$q = 2^kDH,\ p = 1 \text{ für gerades } H;\ q = 1,\ p = 0 \text{ für } H = 1;$$
$$q = D'H,\ p = 2 \text{ für ungerades } H \geqq 3$$

und bekomme, mit Rücksicht auf (13) — (16),

$$c_1 \equiv 0, \ldots, c_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ H),$$

$$2Q(c_1, \ldots, c_k) = 2\sum_{\mu=1}^{k} c_\mu \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu}c_\nu \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ Hq),$$

$$pQ(c_1, \ldots, c_k) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ q),$$

$$|S_{p,q}|^2 = q^k \sum_{\substack{c_1, \ldots, c_k = 0 \\ 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}c_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}c_\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ q)}}^{q-1} 1 \geqq q^k > 0, \tag{17}$$

weil die c-Summe mindestens das eine Glied mit $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ enthält, also nicht leer ist.

(3) folgt aus (6) und (17).

Bemerkungen: 1. Die Landausche Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = BN^{\frac{1}{2}k-1} \quad (H > 1)^{4)}$$

ist scharf. Aus Satz 1 folgt nämlich

$$A(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}k-1}), \tag{18}$$

---

[3]) Da das System (15) nur B Lösungen hat, so ist (8) eine Folge von (13).

[4]) E. Landau: „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" [Mathematische Zeitschrift 21 (1924), S. 126—132], für $k \geqq 8$ auch in E_I.

also

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = \Omega(N^{\frac{1}{2}k-1}). \tag{19}$$

2. (18) gilt auch für $k = 4$, also gilt (19) für $k = 4$. Gesetzt nämlich, dass für eine geeignete quaternäre Form $Q = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ und ein dazugehöriges System $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$

$$A_{Q;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_4}(n) = o(n)$$

wäre, so folgte hieraus nach (2) für $Q' = Q + u_5^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, $0 = \alpha_5$

$$A_{Q';\,\alpha_1,\ldots,\alpha_5}(n) = \sum_{Q(m_1,\ldots,m_4)+m_5^2=n} \exp\{2\pi i\,(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)\}$$

$$= \sum_{0 \leqq |m_5| \leqq \sqrt{n}} \; \sum_{Q(m_1,\ldots,m_4)=n-m_5^2} \exp\{2\pi i\,(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)\}$$

$$= \sum_{0 \leqq |m_5| \leqq \sqrt{n}} A_{Q;\,\alpha_1,\ldots,\alpha_4}(n - m_5^2) = o(n^{\frac{3}{2}}),$$

im Gegensatz zu (18) mit $k = 5$.

Nach oben ist für $k = 4$ durch Landau[4])

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = BN \log^2 N \quad (H > 1)$$

bekannt. Hier ist also noch eine Spanne von der Grössenordnung $\log^2 N$ vorhanden.

* * *

Von jetzt ab nehme ich $H = 1$ an, setze also $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Es sei für $k \geqq 4$

$$A_{Q;0,\ldots,0}(n) = \sum_{Q(m_1,\ldots,m_k)=n} 1 = r_Q(n).$$

Im Spezialfall

$$Q = K_k = u_1^2 + \ldots + u_k^2, \; D = 1$$

setze ich

$$r_{K_k}(n) = r_k(n).$$

Satz 2: *Für $k \geqq 5$ gilt die scharfe Abschätzung*

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{(k-1)\,\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \frac{1}{1-2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} N^{k-1} + BN^{k-2}. \tag{20}$$

Beweis: Für $Q = K_k$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, $(p, q) = 1$ ist nach (13)

$$| S_{p,q} |^2 = q^k \sum_{\substack{c_1, \ldots, c_k = 0 \\ 2c_1 \equiv 0, \ldots, 2c_k \equiv 0 \pmod q}}^{q-1} \exp \left\{ 2\pi i \frac{p}{q} (c_1^2 + \ldots + c_k^2) \right\}$$

$$= \left(q \sum_{\substack{c=0 \\ 2c \equiv 0 \pmod q}}^{q-1} \exp \left\{ 2\pi i \frac{p}{q} c^2 \right\} \right)^k = \begin{cases} q^k & \text{für ungerade } q \\ q^k (1 + (-1)^{\frac{1}{2}pq})^k & \text{für gerade } q, \end{cases}$$

d. h.

$| S_{p,q} |^2 = q^k$ für $q \equiv 1 \pmod 2$, $= 0$ für $q \equiv 2 \pmod 4$, $= (2q)^k$ für $q \equiv 0 \pmod 4$.

Setzt man dies in (6) ein, so folgt aus (4)

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) =$$

$$= \frac{\pi^k}{(k-1)\, \Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^k \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod 4}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} \right) N^{k-1} \tag{21}$$

$$+ BN^{k-2} + BN^{\frac{1}{4}k}.$$

Hierin kann man jedoch das Glied $BN^{\frac{1}{4}k}$ streichen, denn es tritt nur für $k \leqq 7$ auf, und da gilt nach Hardy

$$r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \mathfrak{S}(n)\, n^{\frac{1}{2}k-1} \qquad (5 \leqq k \leqq 8).[5]$$

Verwendet man dies statt (9), so folgt, für unseren Spezialfall, (4) mit (6), ohne das Glied $BN^{\frac{1}{4}k}$.

Es verbleibt noch nachzuweisen, dass 1. die Koeffizienten von N^{k-1} in (20) und (21) übereinstimmen, d. h.

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^k \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod 4}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} = \frac{1}{1 - 2^{-k}} \cdot \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} \tag{22}$$

ist, und 2. das Restglied von (20) nicht durch $o(N^{k-2})$ ersetzt werden kann. Von nun an sei, bis zum Schluss dieser Arbeit, der Buchstabe p für Primzahlen vorbehalten.

1. Die linke Seite von (22) ist

---

[5]) G. H. Hardy: „On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five" [Transactions of the American Mathematical Society 21 (1920), S. 255—284], vgl. auch L. E. Dickson: „Studies in the theory of numbers" (Chicago 1930), Kapitel 13.

Einen verhältnismässig einfachen Beweis dieser tiefliegenden Identität gab kürzlich T. Estermann: „On the representations of a number as a sum of squares" [Acta Arithmetica 2 (1936), S. 47—79].

$$= \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^{-k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(4q)}{q^k} =$$

$$= \left(1 + 2^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(4 \, . \, 2^m)}{2^{mk}}\right) \sum_{\substack{q=1\\ q\equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} =$$

$$= \frac{1}{1-2^{1-k}} \prod_{p>2} \frac{1-p^{-k}}{1-p^{1-k}} = \frac{1}{1-2^{1-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} \frac{1-2^{1-k}}{1-2^{-k}} =$$

$$= \frac{1}{1-2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}.$$

2. Aus

$$z_k = \frac{1}{1-2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)},$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{(k-1)\, \Gamma^2 (\frac{1}{2}k)} z_k N^{k-1} + o(N^{k-2})$$

folgte

$$r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{\Gamma^2 (\frac{1}{2}k)} z_k n^{k-2} + o(n^{k-2}),$$

$$r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma (\frac{1}{2}k)} z_k^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}k-1} + o(n^{\frac{1}{2}k-1}),$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} N^{\frac{1}{2}k} = \sum_{n=1}^{N} r_k(n) + o(N^{\frac{1}{2}k}) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} z_k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}k} + o(N^{\frac{1}{2}k}),$$

$$z_k = 1,$$

während nach (22)

$$z_k > 1 + 2^k \frac{\varphi(4)}{4^k} = 1 + 2^{1-k} \tag{23}$$

ist.

Bemerkung: Für den Gitterrest

$$\mathsf{P}_k(x) = \sum_{n \leqq x} r_k(n) - \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma (\frac{1}{2}k+1)} x^{\frac{1}{2}k} \qquad (x > 0)$$

der k-dimensionalen Kugel $K_k \leqq x$ folgt aus Satz 2: Wird

$$M_k = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{2\Gamma (\frac{1}{2}k)}$$

gesetzt, so ist für jedes $\delta_k < \sqrt{z_k}$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}_k(n) > M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}, \quad \mathsf{P}_k(n-0) < - M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}$$

unendlich oft erfüllt.

Wäre nämlich für ein geeignetes $\delta_k < \sqrt{z_k}$ und alle hinreichend grossen n

$$\mathsf{P}_k(n) \leqq M_k\delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}, \quad \mathsf{P}_k(n-0) \geqq - M_k\delta_k n^{\frac{1}{2}k-1},$$

so wäre zuletzt

$$r_k(n) = \mathsf{P}_k(n) - \mathsf{P}_k(n-0) \leqq 2M_k\delta_k n^{\frac{1}{2}k-1},$$

d. h. es folgte

$$\limsup_{N=\infty} N^{-k+1} \sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) \leqq \frac{(2M_k\delta_k)^2}{k-1} < \frac{4M_k^2 z_k}{k-1},$$

wo ganz rechts der Koeffizient von N^{k-1} in (20) steht.

Nach (23) kann z. B.

$$\delta_k = \sqrt{1+2^{1-k}}$$

angenommen werden.

Für $\mathsf{P}_k(n)$ und $\mathsf{P}_k(n-0)$ gibt es indessen bessere Abschätzungen.[6])

* * *

Ich will jetzt $\sum_{n=1}^{N} r_4^2(n)$ abschätzen. Um den folgenden Hilfssatz besser ausnutzen zu können, betrachte ich neben K_4 noch die beiden quaternären Formen

$$K'_4 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + 2u_4^2, \quad D = 4$$
$$K''_4 = u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2 + 4u_4^2, \quad D = 16$$

mit

$$r'_4(n) = \sum_{m_1^2+m_2^2+2m_3^2+2m_4^2=n} 1,$$
$$r''_4(n) = \sum_{m_1^2+2m_2^2+2m_3^2+4m_4^2=n} 1.$$

$\sigma(n)$ sei die Teilersumme von n:

$$\sigma(n) = \sum_{d/n} d,$$

r eine nicht negative ganze Zahl (nicht mit den Funktionszeichen $r_4(n)$, $r'_4(n)$, $r''_4(n)$ zu verwechseln), x eine stetige Veränderliche $\geqq 3$ (diese Bedeutung habe x bis zum Schluss dieser Arbeit),

$$S_r(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma(2^r n)\,\sigma(n). \tag{24}$$

Im folgenden Hilfssatz hängt die B-Schranke nur von r ab.

---

[6]) Vgl. H. Petersson: „Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), S. 116—150], § 5 und V. Jarník: „O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích“ [Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 57 (1928), S. 123—128].

Hilfssatz 1:

$$S_r(x) = (\tfrac{7}{6}2^r - \tfrac{1}{3})\,\zeta(3)\,x^3 + Bx^2\log^2 x. \tag{25}$$

Bemerkung: Für $r = 0$ ist hierin die Ramanujansche Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma^2(n) = \tfrac{5}{6}\,\zeta(3)\,N^3 + BN^2\log^2 N\ ^{7)} \tag{26}$$

enthalten.

Beweis: Ich führe die Restklassen $a_0, a_1, \ldots, a_r$ wie folgt ein:

$$a_0 \equiv 0 \pmod{2^r};\ a_\varrho \equiv 2^{\varrho-1} \pmod{2^\varrho}\ \text{für}\ 1 \leqq \varrho \leqq r \tag{27}$$

und beachte, dass

$$\sum_{\substack{a,c=1\\(a,c)=1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} = \tfrac{5}{2}, \tag{28}$$

$$\sum_{\substack{a,c=1\\(a,c)=1,\ a\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} = 2 \tag{29}$$

ist.[8] Mit Hilfe von (27) — (29) wird nun $S_r(x)$ so abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
S_r(x) &= \sum_{n\leqq x}\ \sum_{a|2^rn} a \sum_{c|n} c = \sum_{ab=2^rcd\leqq 2^rx} ac\\
&= \sum_{a\leqq 2^rx} a \sum_{b\leqq\frac{2^rx}{a}}\ \sum_{c\leqq x} c \sum_{\substack{d\leqq\frac{x}{c}\\ d=\frac{ab}{2^rc}}} 1\\
&= \sum_{a\leqq 2^rx} a \sum_{b\leqq\frac{2^rx}{a}}\ \sum_{c\leqq x} c \sum_{d=\frac{ab}{2^rc}} 1\\
= \sum_{a\leqq 2^rx} a \sum_{b\leqq\frac{2^rx}{a}}\ \sum_{\substack{c\leqq x\\ 2^rc|ab}} c &= \sum_{t\leqq 2^rx}\ \sum_{a\leqq 2^rx} a \sum_{\substack{c\leqq x\\(2^rc,a)=t}} c \sum_{\substack{b\leqq\frac{2^rx}{a}\\ 2^rc|ab}} 1\\
&= \sum_{\varrho=0}^{r}\ \sum_{t\leqq 2^rx}\ \sum_{a_\varrho\leqq 2^rx} a_\varrho \sum_{\substack{c\leqq x\\(2^rc,a_\varrho)=t}} c \sum_{\substack{b\leqq\frac{2^rx}{a_\varrho}\\ 2^rc|a_\varrho b}} 1 = \sum_{\varrho=0}^{r} S_{r\varrho}.
\end{aligned}$$

---

[7]) S. Ramanujan: „Some formulae in the analytic theory of numbers“ [Messenger of Mathematics 45 (1916), S. 81—84 oder auch Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge 1927), S. 133—135], Formel (19).

[8]) Vgl. meine „Teilerprobleme. Zweite Abhandlung“ [Mathematische Zeitschrift 34 (1931), S. 448—472], Formeln (39) und (115).

$$S_{r0} = \sum_{t \leqq x} \sum_{a \leqq x} 2^r a \sum_{\substack{c \leqq x \\ (a,a)=t}} c \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{a} \\ c|ab}} 1$$

(ich habe t, a_0 durch $2^r t$, $2^r a$ ersetzt)

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} \sum_{\substack{a,c \leqq x \\ (a,c)=t}} ac \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{a} \\ c|ab}} 1$$

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a,c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} ac \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{ta} \\ c|b}} 1$$

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a,c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^r \sum_{\substack{a,c \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{t \leqq \frac{x}{abc}} t^2$$

$$= 2^r \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{t \leqq \frac{x}{abc}} t^2$$

$$= 2^r \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \left(\frac{x^3}{3a^3b^3c^3} + \frac{Bx^2}{a^2b^2c^2} \right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \frac{1}{b^3} + Bx^2 \sum_{a,c \leqq x} \frac{1}{ac}$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} \left(\zeta(3) + \frac{Ba^2c^2}{x^2} \right) + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{a,c=1 \\ (a,c)=1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{5}{6}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x.$$

$$(1 \leqq \varrho \leqq r) \quad S_{r\varrho} = \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1} x \\ t \equiv 1}} \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1} x \\ a \equiv 1}} 2^{\varrho-1} a \sum_{\substack{c \leqq x \\ (a,c)=t}} c \sum_{\substack{b \leqq 2^{r-\varrho+1} \frac{x}{a} \\ 2^{r-\varrho+1} c|ab}} 1$$

(ich habe 1. t, a durch $2^{\varrho-1}t'$, $2^{\varrho-1}a'$ ersetzt und beachtet, dass t', a' ungerade sein müssen; 2. wieder t, a für t', a' geschrieben — die Kongruenzen unter den Summenzeichen sind mod 2 zu verstehen)

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1}x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1}\frac{x}{t} \\ a \equiv 1}} a \sum_{\substack{c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} c \sum_{\substack{b \leqq 2^{r-\varrho+1}\frac{x}{ta} \\ 2^{r-\varrho+1}c \mid b}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1}x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1}\frac{x}{t} \\ a \equiv 1}} a \sum_{\substack{c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} c \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{ac \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{abc} \\ t \equiv 1}} t^2$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \left(\frac{x^3}{6a^3b^3c^3} + \frac{Bx^2}{a^2b^2c^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{12}\, 2^{\varrho} x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} \frac{1}{a^2c^2}\left(\zeta(3) + \frac{Ba^2c^2}{x^2}\right) + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{12}\, 2^{\varrho}\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{a,c=1 \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{6}\, 2^{\varrho}\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x.$$

$$S_r(x) = \left(\tfrac{5}{6}\, 2^r + \tfrac{1}{6} \sum_{\varrho=1}^{r} 2^{\varrho}\right) \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x$$

$$= (\tfrac{7}{6} 2^r - \tfrac{1}{3})\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x. \qquad (25)$$

Satz 3:

$$\sum_{n=1}^{N} r_4^2(n) = 32\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N, \qquad (30)$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_4'^2(n) = \tfrac{15}{2}\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N, \qquad (31)$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_4''^2(n) = \tfrac{29}{16}\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N. \qquad (32)$$

Beweis: Für $n = 2^h u$, $h \geqq 0$ ganz, u ungerade ist nach Jacobi[9])

$$r_4(n) = 8\sigma(u) \text{ für } h = 0, \; = 24\sigma(u) \text{ für } h > 0 \tag{33}$$

und nach Liouville[10])

$$r'_4(n) = 4\sigma(u) \text{ für } h = 0, \; = 8\sigma(u) \text{ für } h = 1, \; = 24\sigma(u) \text{ für } h > 1, \tag{34}$$

$$r''_4(n) = 2\sigma(u) \text{ für } h = 0, \; = 4\sigma(u) \text{ für } h = 1, \; = 8\sigma(u) \text{ für } h = 2, \; = 24\sigma(u) \text{ für } h > 2. \tag{35}$$

Hieraus folgt, falls $\sigma(\;)$ für nicht ganzes Argument Null bedeutet,

$$r_4(n) = 8\sigma(n) - 32\sigma(\tfrac{1}{4}n), \tag{36}$$

$$r'_4(n) = 4\sigma(n) - 4\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 8\sigma(\tfrac{1}{4}n) - 32\sigma(\tfrac{1}{8}n), \tag{37}$$

$$r''_4(n) = 2\sigma(n) - 2\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 8\sigma(\tfrac{1}{8}n) - 32\sigma(\tfrac{1}{16}n). \tag{38}$$

Aus (36) — (38) und (24) ergibt sich für $x \geqq 48 = 16 . 3$

$$\sum_{n \leqq x} r_4^2(n) = 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{4}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{4}n) \tag{39}$$

$$= 2^6 S_0(x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{4}x) - 2^9 S_2(\tfrac{1}{4}x), \tag{40}$$

$$\sum_{n \leqq x} r'^2_4(n) = 2^4 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^4 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{4}n) + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{8}n) \tag{41}$$

$$- 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{4}n) - 2^8 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{8}n)$$

$$- 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\,\sigma(\tfrac{1}{4}n) + 2^8 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\,\sigma(\tfrac{1}{8}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{4}n)\,\sigma(\tfrac{1}{8}n)$$

$$\begin{aligned} &= 2^4 S_0(x) + 2^4 S_0(\tfrac{1}{2}x) + 2^6 S_0(\tfrac{1}{4}x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{8}x) - 2^5 S_1(\tfrac{1}{2}x) \\ &+ 2^6 S_2(\tfrac{1}{4}x) - 2^8 S_3(\tfrac{1}{8}x) - 2^6 S_1(\tfrac{1}{4}x) + 2^8 S_2(\tfrac{1}{8}x) - 2^9 S_1(\tfrac{1}{8}x), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\sum_{n \leqq x} r''^2_4(n) = 2^2 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^2 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{8}n) + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{16}n) \tag{43}$$

$$- 2^3 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{8}n) - 2^7 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\,\sigma(\tfrac{1}{16}n)$$

$$- 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\,\sigma(\tfrac{1}{8}n) + 2^7 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\,\sigma(\tfrac{1}{16}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{8}n)\,\sigma(\tfrac{1}{16}n)$$

[9]) Vgl. P. Bachmann: „Niedere Zahlentheorie. Zweiter Teil. Additive Zahlentheorie" (Leipzig 1910), S. 353—354.

[10]) Bachmann a. a. O., S. 414 und 418.

$$= 2^2 S_0(x) + 2^2 S_0(\tfrac{1}{2}x) + 2^6 S_0(\tfrac{1}{8}x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{16}x) - 2^3 S_1(\tfrac{1}{2}x) \quad (44)$$
$$+ 2 \; S_3(\tfrac{1}{8}x) - 2^7 S_4(\tfrac{1}{16}x) - 2^5 S_2(\tfrac{1}{8}x) + 2^7 S_3(\tfrac{1}{16}x) - 2^9 S_1(\tfrac{1}{16}x).$$

Die Behauptungen (30) — (32) folgen aus (40), (42), (44) und (25).

Bemerkungen: 1. Das Restglied in (30) — (32) ist $\Omega\,(N \log\log N)^2$. Lässt man nämlich u die ungeraden Zahlen von der Form

$$u = u_m = 1 \,.\, 3 \ldots (2m+1); \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

durchlaufen, so ist

$$\sigma(u) \geqq u\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2m+1}\right) \sim \tfrac{1}{2}u \log m \sim \tfrac{1}{2}\, u \log\log u,$$

d. h., mit Rücksicht auf (33) — (35),

$$r_4(n) = \Omega\,(n \log\log n),\; r'_4(n) = \Omega\,(n \log\log n),$$
$$r''_4(n) = \Omega\,(n \log\log n),$$

woraus die Ω-Behauptung folgt. Wie man sieht, ist hier zwischen dem B-und Ω-Ergebnis noch eine Spanne von der Grössenordnung $\left(\dfrac{\log N}{\log\log N}\right)^2$.

Satz 2 ist somit für $k = 4$ falsch. Dagegen stimmt das Hauptglied, denn es ist

$$\frac{\pi^4}{3\Gamma^2(2)} \frac{1}{1-2^{-4}} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} = 32\zeta(3).$$

2. Für $S_0(N)$ hatte Ramanujan, als Gegenstück zu (26), sogar

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma^2(n) = \tfrac{5}{6}\,\zeta(3)\, N^3 + \Omega\,(N^2 \log N)$$

bekommen. Das folgt sofort aus seiner Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta^2(s-1)\,\zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)} \quad (\Re(s) > 3)\,^{11}), \qquad (45)$$

da die rechte Seite in $s = 2$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt.

Das zu (45) führende einfache Verfahren[12]) kann man auch dazu verwenden, um für die drei Funktionen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_4^2(n)\, n^{-s}, \ldots$ ähnliche Darstellungen durch die Zetafunktion zu gewinnen. Hier ist aller-

---

[11]) Ramanujan a. a. O., Formel (15) mit $a = b = 1$.

[12]) B. M. Wilson: „Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan" [Proceedings of the London Mathematical Society (2), 21 (1922), S. 235—255]; vgl. auch E. C. Titchmarsh: „The theory of functions" (Oxford 1932), S. 316.

dings in $s = 2$ nur ein Pol erster Ordnung vorhanden. Ich will dennoch die Formeln herleiten, weil sie vielleicht an sich Beachtung verdienen:

Satz 4: *Mit*

$$Z(s) = \frac{(1 - 2^{1-s})(1 - 2^{2-s})\,\zeta(s)\,\zeta^2(s-1)\,\zeta(s-2)}{(1 + 2^{1-s})\,\zeta(2s-2)} \tag{46}$$

ist für $\Re(s) > 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4^2(n)}{n^s} = (2^6 + 2^{9-s})\,Z(s), \tag{47}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^2_4(n)}{n^s} = (2^4 + 3 \,.\, 2^{4-s} + 2^{9-2s})\,Z(s), \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r''^2_4(n)}{n^s} = (2^2 + 3 \,.\, 2^{2-s} + 3 \,.\, 2^{4-2s} + 2^{9-3s})\,Z(s). \tag{49}$$

Beweis: Für $\Re(s) > 3$ ist nach (39), (41) und (43)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4^2(n)}{n^s} = (2^6 + 2^{10-2s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} - 2^{9-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} \tag{50}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^2_4(n)}{n^s} = (2^4 + 2^{4-s} + 2^{6-2s} + 2^{10-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} \tag{51}$$

$$- (2^{5-s} + 2^{6-2s} + 2^{9-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(2n)\,\sigma(n)}{n^s}$$

$$+ (2^{6-2s} + 2^{8-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{8-3s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(8n)\,\sigma(n)}{n^s},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r''^2_4(n)}{n^s} = (2^2 + 2^{2-s} + 2^{6-3s} + 2^{10-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s}$$

$$- (2^{3-s} + 2^{9-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(2n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{5-3s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} \tag{52}$$

$$+ (2^{5-3s} + 2^{7-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(8n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{7-4s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(16n)\,\sigma(n)}{n^s}.$$

Andererseits gilt ebenda für ganze $r \geqq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2^r n)\,\sigma(n)\,n^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma(2^{m+r})\,\sigma(2^m)\,2^{-ms} \,.\, \prod_{p>2} \left(\sum_{a=0}^{\infty} \sigma^2(p^a)\,p^{-as} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2^{m+r+1} - 1)(2^{m+1} - 1)\, 2^{-ms} \,.$$

$$\cdot \prod_{p>2} \left((p-1)^{-2} \sum_{a=0}^{\infty} (p^{a+1} - 1)^2 p^{-as} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2^{2m+r+2} - 2^{m+r+1} - 2^{m+1} + 1)\, 2^{-ms} \,.$$

$$\cdot \prod_{p>2} \left(\frac{1 - p^{2-2s}}{(1 - p^{-s})(1 - p^{1-s})^2 (1 - p^{2-s})} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - 2^{-s}} - \frac{2^{r+1} + 2}{1 - 2^{1-s}} + \frac{2^{r+2}}{1 - 2^{2-s}} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(1 - 2^{-s})(1 - 2^{1-s})^2 (1 - 2^{2-s})\, \zeta(s)\, \zeta^2(s-1)\, \zeta(s-2)}{(1 - 2^{2-2s})\, \zeta(2s-2)}$$

$$= (2^{r+1} - 1 - (2^{r+1} - 4)\, 2^{-s})\, \frac{\zeta(s)\, \zeta^2(s-1)\, \zeta(s-2)}{(1 + 2^{1-s})\, \zeta(2s-2)} . \tag{53}$$

Die Behauptungen (47) — (49) mit (46) folgen durch Einsetzen von (53) in (50) — (52).

* * *

Zum Schluss will ich die Summe $\sum_{n=1}^{N} r^2_Q(n)$ für $k = 4$ abschätzen. Ich komme jedoch hier zu einem viel ungünstigeren Ergebnis, als vorhin bei den drei Formen K_4, K'_4, K''_4 des Satzes 3.[13])

Es sei q eine natürliche Zahl; α, β, α_1, β_1, α_2, β_2 seien ganze Zahlen $\geqq 1$ und $\leqq q$. Kongruenzen ohne Angabe des Moduls gelten modulo q. Es sei

$$\sigma_{\alpha,\beta}(n) = \sum_{\substack{ab=n \\ a \equiv \alpha,\, b \equiv \beta}} a,$$

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma_{\alpha_1, \beta_1}(n)\, \sigma_{\alpha_2, \beta_2}(n). \tag{54}$$

Beim folgenden Hilfssatz hängt die B-Schranke nur von q ab.

Hilfssatz 2: *Mit einer geeigneten Konstanten* $\varrho_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}$ *ist*

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(x) = \varrho_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} x^3 + B x^2 \log^2 x. \tag{55}$$

Beweis:

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(x) = \sum_{n \leqq x} \sum_{\substack{a_1 b_1 = n \\ a_1 \equiv \alpha_1,\, b_1 \equiv \beta_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 b_2 = n \\ a_2 \equiv \alpha_2,\, b_2 \equiv \beta_2}} a_2 = \sum_{\substack{a_1 b_1 = a_2 b_2 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1,\, b_1 \equiv \beta_1 \\ a_2 \equiv \alpha_2,\, b_2 \equiv \beta_2}} a_1 a_2$$

[13]) Das liegt sicher an der primitiven Art, in der ich weiter unten die Summe $\sum_{n \leqq qx} c_n \sigma_{\alpha,\beta}(n)$ abschätze.

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2}} a_2 \sum_{\substack{b_2 \leqq \frac{x}{a_2} \\ b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2},\, b_2 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2}} a_2 \sum_{\substack{b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2} \\ b_2 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x,\, a_2 \equiv \alpha_2 \\ a_2 \mid a_1 b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} a_2$$

$$= \sum_{t \leqq x} \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = t}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1},\, b_1 \equiv \beta_1 \\ a_2 \mid a_1 b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a_1 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = 1}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{t a_1},\, b_1 \equiv \beta_1 \\ a_2 \mid b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a_1 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = 1}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{t a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} a_1 a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{a_1 a_2 b_1} \\ t a_1 \equiv \alpha_1,\, t a_2 \equiv \alpha_2}} t^2. \tag{56}$$

Gehört t einer festen Restklasse mod q an, so gilt

$$\sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{a_1 a_2 b_1} \\ t \bmod q \text{ fest}}} t^2 = \frac{x^3}{3q a_1^3 a_2^3 b_1^3} + \frac{B x^2}{a_1^2 a_2^2 b_1^2}. \tag{57}$$

Bezeichnet daher $T = T_{a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2}$ die Anzahl der Restklassen mod q, die den Kongruenzen

$$t a_1 \equiv \alpha_1, \quad t a_2 \equiv \alpha_2 \tag{58}$$

genügen, so folgt aus (56) — (58)

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(x) = \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} T a_1 a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \left(\frac{x^3}{3q a_1^3 a_2^3 b_1^3} + \frac{B x^2}{a_1^2 a_2^2 b_1^2} \right)$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2)=1}} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2)=1}} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1=1 \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}}^{\infty} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1,\, a_2=1 \\ (a_1, a_2)=1}}^{\infty} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1=1 \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}}^{\infty} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \varrho_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} x^3 + Bx^2 \log^2 x. \tag{55}$$

Satz 5: *Mit geeignetem* $\varrho_Q > 0$ *ist für* $k = 4$

$$\sum_{n=1}^{N} r_Q^2(n) = \varrho_Q N^3 + BN^{\frac{5}{2}}. \tag{59}$$

Beweis: Nach Hecke[14]) gibt es eine natürliche Zahl $q = q(Q)$ und eine geeignete Funktion $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta; Q)$, so dass für jedes τ mit $\mathfrak{J}(\tau) > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n)\, e^{2\pi i n \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{q}},$$

$$a_n = \sum_{\alpha, \beta=1}^{q} f(\alpha, \beta)\, \sigma_{\alpha,\beta}(n) + c_n, \quad \sum_{n \leqq x} c_n^2 = Bx^2.$$

Hieraus folgt, in Verbindung mit (54) und (55),

$$\sum_{n \leqq x} r_Q^2(n) = \sum_{n \leqq qx} a_n^2$$

$$= \sum_{n \leqq qx} \left(\sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, \sigma_{\alpha_1, \beta_1}(n) + c_n \right) \left(\sum_{\alpha_2, \beta_2=1}^{q} f(\alpha_2, \beta_2)\, \sigma_{\alpha_2, \beta_2}(n) + c_n \right)$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2=1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, f(\alpha_2, \beta_2) \sum_{n \leqq qx} \sigma_{\alpha_1, \beta_1}(n)\, \sigma_{\alpha_2, \beta_2}(n)$$

$$+ 2 \sum_{\alpha, \beta=1}^{q} f(\alpha, \beta) \sum_{n \leqq qx} c_n\, \sigma_{\alpha,\beta}(n) + \sum_{n \leqq qx} c_n^2$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2=1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, f(\alpha_2, \beta_2)\, S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(qx)$$

[14]) E. Hecke: „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik“ [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199—224], § 4.

$$+ B \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \left(\sum_{n \leqq qx} c_n^2 \cdot \sum_{n \leqq qx} \sigma_{\alpha,\beta}^2(n) \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n \leqq qx} c_n^2$$

$$= x^3 \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 = 1}^{q} \varrho_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} f(\alpha_1, \beta_1) f(\alpha_2, \beta_2) q^3 + Bx^2 \log^2 x$$

$$+ Bx^{\frac{2+3}{2}} + Bx^2,$$

woraus (59) unmittelbar folgt.

Verschwände endlich für ein geeignetes Q die Konstante ϱ_Q in (59), so folgte

$$\frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} N^2 = \sum_{n=1}^{N} r_Q(n) + o(N^2) = B \left(\sum_{n=1}^{N} 1 \cdot \sum_{n=1}^{N} r_Q^2(n) \right)^{\frac{1}{2}} + o(N^2) = o(N^2).$$

Radość, den 15. August 1936.

*

O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech.

Šesté pojednání.

(Obsah předešlého článku.)

Budiž $k \geqq 4$ celé číslo;

$$Q = Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \quad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}),$$

budiž positivně definitivní kvadratická forma s celistvými koeficienty; buďte $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ racionální čísla; pro celé $n \geqq 0$ položme

$$A(n) = A_{Q;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k}(n) = \sum_{Q(m_1, \ldots, m_k) = n} \exp \{2\pi i (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)\}.$$

Hlavním předmětem této práce je vyšetřování výrazu

$$\sum_{n=1}^{N} |A(n)|^2$$

pro velká N.