Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 5, 462--518

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122950

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1906

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Jako nápadný takovýto příklad uvádí Newcomb hvězdu 2. velikosti ζ Orionis. Tato má nepatrného průvodce ve vzdálenosti 2·5″ a kdyby její hustota a povrchová svítivost byly tytéž jako u Slunce, měla by dokončiti jeden oběh ve 14ti letech. Ale skutečně pohybuje se tak pomalu, že po padesáti letech je změna polohy sotva znatelná, neboť se mění v roce jen asi o desetinu stupně. Dle toho bychom vypočítali, že $h : i^{\frac{3}{2}} = 0{\cdot}0001$. Ovšem, že tento výsledek může býti značně změněn, až bude dráha této dvojhvězdy propočítána, neboť dosud nevíme nic o excentričnosti její, ani o sklonu, tak že zdánlivé vzdálenosti 2·5″ může odpovídati daleko větší hodnota velké poloosy.

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x + y + x^2 + y^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = 1.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Jos. Ščerba*, stud. gymn. v Místku.

Zavedeme-li nové neznámé rovnicemi $x + y = u$, $xy = v$, máme nejprve $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^4 + y^4 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2$. Rovnice dané pak změní se v tyto

$$u + (u^2 - 2v) = 1, \qquad (1)$$
$$u^2 - 2v + (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = 1. \qquad (2)$$

Dosadíme-li z prvé rovnice do druhé $(u^2 - 2v)^2 = (1 - u)^2$, bude míti druhá rovnice po jednoduché úpravě tvar

$$u^2 - v^2 - (u + v) = 0,$$

aneb

$$(u + v)\,(u - v - 1) = 0.$$

I jest buď

$$\text{I.}\quad u + v = 0, \quad \text{aneb II.}\quad u - v - 1 = 0.$$

Přibereme-li ku jedné z těchto dvou rovnic rovnici (1), dostaneme vyloučením rovnici druhého stupně a snadným počtem tyto čtyři systémy hodnot pro u, v:

$$u_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \quad v_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2};$$
$$u_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \quad v_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2};$$
$$u_3 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad v_3 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2};$$
$$u_4 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad v_4 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Hodnoty pro x vyplývají pak z rovnice

$$x^2 - ux + v = 0;$$

příslušné pak hodnoty pro y ze vztahu $y = u - x$. Dostáváme v celku osm soustav řešení pro x, y; totiž

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{4}\left[-3+\sqrt{13} \pm \sqrt{-2+2\sqrt{13}}\right],$$
$$x_{3,4} = \tfrac{1}{4}\left[-3-\sqrt{13} \pm \sqrt{-2-2\sqrt{13}}\right],$$
$$x_{5,6} = 1, \qquad x_{7,8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$
$$y_{1,2} = \tfrac{1}{4}\left[-3+\sqrt{13} \mp \sqrt{-2+2\sqrt{13}}\right],$$
$$y_{3,4} = \tfrac{1}{4}\left[-3-\sqrt{13} \mp \sqrt{-2-2\sqrt{13}}\right],$$
$$y_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \qquad y_{7,8} = 1.$$

Úloha 2.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = x^5 + y^5.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Fr. Galle,* stud. gymn. v Brně.

Rovnicím $x^2 + y^2 = x^3 + y^3$, $x^2 + y^2 = x^5 + y^5$ dejme tento tvar

$$x^2(1-x) + y^2(1-y) = 0,$$
$$x^2(1-x^3) + y^2(1-y^3) = 0.$$

První z těchto rovnic násobme $1 + y + y^2$, druhou pak zároveň od první tak znásobené odčítejme. Dostaneme tak za výsledek

$$x^2(1-x)(1+y+y^2) - x^2(1-x)(1+x+x^2) = 0,$$

anebo po snadném rozkladu

$$x^2(1-x)(y-x)(1+y+x) = 0.$$

Jsou tedy možné tyto případy:

1. $x = 0$; příslušné $y = 0$.
2. $x = 1$; příslušné $y = 0$ anebo $y = 1$.
3. $x = y$; pro tento případ jest buď $x = y = 0$, anebo $x = y = 1$.
4. $x + y + 1 = 0$; tu dostáváme pro x rovnici kvadratickou

$$5x^2 + 5x + 2 = 0;$$

řešení příslušná jsou

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{10}, \qquad y = \frac{-5 \mp \sqrt{-15}}{10}.$$

Úloha 3.

Ukázati jest, že při řešení reciprokých rovnic lze užíti s úspěchem substituce

$$x = \frac{1-y}{1+y}.$$

r.

Řešení zaslal p. *Jan Hlávka*, stud. reálky v Brně.

Reciproká rovnice jest taková rovnice, která, má-li kořen α, má též za kořen převratnou hodnotu čísla α, t. j. $\frac{1}{\alpha}$. Vyšetřme, jaké hodnoty pro y v rovnici transformované budou odpovídati kořenům α, $\frac{1}{\alpha}$. K tomu cíli řešiti postačí rovnice

$$\alpha = \frac{1-y}{1+y}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1-y}{1+y}.$$

Na prvý pohled však jest patrno, že, dostáváme-li z prvé z těchto rovnic hodnotu $y = \beta$, že z druhé dostaneme $y = -\beta$. Bude tudíž míti rovnice transformovaná udanou substitucí tu vlastnost, že vedle kořene β přísluší jí též kořen $-\beta$. Upravíme-li ji na obvyklý tvar, bude její levá strana obsahovati jenom sudé anebo jenom liché mocniny neznámé y.

Ku př. rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

mění se uvedenou substitucí v rovnici

$$y^4 (2a - 2b + c) + y^2 (12a - 2c) + (2a + 2b + c) = 0.$$

Úloha 4.

Řešení zaslal p. *Václav Simandl*, stud. gymn. v Mladé Boleslavi.

Předpokládáme-li pro x_n tvar

$$x_n = a_1 q_1^n + a_2 q_2^n + a_3 q_3^n,$$

dostáváme ihned ze vztahu

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 4y_n \tag{1}$$

pro y_n tento výraz

$$4y_n = a_1 q_1^n \left(q_1 - 2 + \frac{1}{q_1}\right) + a_2 q_2^n \left(q_2 - 2 + \frac{1}{q_2}\right) + a_3 q_3^n \left(q_3 - 2 + \frac{1}{q_3}\right),$$

anebo

$$y_n = b_1 q_1^n + b_2 q_2^n + b_3 q_3^n,$$

kde

$$\begin{gathered} b_1 = \tfrac{1}{4} a_1 \left(q_1 - 2 + \frac{1}{q_1}\right) = \frac{a_1}{4q_1} (q_1 - 1)^2, \\ b_2 = \frac{a_2}{4q_2} (q_2 - 1)^2, \quad b_3 = \frac{a_3}{4q_3} (q_3 - 1)^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Z výrazů právě napsaných plyne, že, možno-li řadu $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vytvořiti sečtením členů stejnolehlých tří geometrických řad, totéž platí i pro řadu $y_0, y_1, y_2, \ldots$

Z rovnice

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = 4x_n \tag{3}$$

plyne podobně *)

$$a_1 = \frac{b_1}{4q_1}(q_1 - 1)^2,\ a_2 = \frac{b_2}{4q_2}(q_2 - 1)^2,\ a_3 = \frac{b_3}{4q_3}(q_3 - 1)^2; \quad (4)$$

porovnáním pak (2) a (4) obdržíme ihned, že q_1, q_2, q_3 hoví této rovnici

$$1 = \frac{(q-1)^4}{16q^2}.$$

Rovnice tato má, jak snadno odmocněním a řešením dvou rovnic druhého stupně se přesvědčíme, tři různé kořeny: -1, $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$, $(1 - \sqrt{2})^2$. Položíme tudíž

$$q_1 = -1,\ q_2 = (1 + \sqrt{2})^2,\ q_3 = (1 - \sqrt{2})^2.$$

Zároveň plyne dosazením do (2) za q_1, q_2, q_3

$$b_1 = -a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 = a_3.$$

K určení a_1, a_2, a_3 použijeme, že $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $y_0 = 0$; dostaneme tak pro tato čísla rovnice

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1, \\ -a_1 + a_2(1 + \sqrt{2})^2 + a_3(1 - \sqrt{2})^2 &= 3, \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme a_1, a_2, a_3 a tím konečně tyto výrazy pro x_n, y_n

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{1}{2}(-1)^n + \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{2})^{2n+1} + \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{2})^{2n+1}, \\ y_n &= -\tfrac{1}{2}(-1)^n + \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{2})^{2n+1} + \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{2})^{2n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Jelikož x_n a y_n vyhovují rovnicím (1) a (3), jelikož dále x_0, x_1, y_0, a jak snadno se přesvědčíme i y_1, nabývají hodnot úlohou daných, shodují se řady pro $x_0, x_1, x_2 \ldots$ a $y_0, y_1, y_2 \ldots$ určené v (5) s řadami danými.

Zcela podobnou úvahou zjednáme si výraz

$$z_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{2})^{2n+1} - \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{2})^{2n+1}.$$

Vztah $x_n - y_n = (-1)^n$ jest z rovnic (5) bezprostředně patrný, vztah $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$ z výrazů odvozených rovněž snadno se potvrdí.

---

*) Dva výrazy $Aq_1^n + A_2q_2^n + A_3q_3^n$, $B_1q_1^n + B_2q_2^n + B_3q_3^n$ jsou jenom tenkráte pro všecka celistvá n sobě rovny při různých q_1, q_2, q_3 když $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$.

Pro součet $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ ze známého vzorce pro součet řady geometrické odvodíme snadno tento výsledek

$$\tfrac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1}) + \tfrac{1}{8}((1 + \sqrt{2})^{2n+2} - 1)$$

$$+ \tfrac{1}{8}((1 - \sqrt{2})^{2n+2} - 1) = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right]^2.$$

Výraz však nacházející se v hranaté závorce jest celé číslo a jest tedy součet $x_0 + x_1 + \ldots x_n$ čtverec celého čísla, jakož bylo dokázati; pro n sudé $n = 2\nu$ jest toto celé číslo z_ν a máme tudíž $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{2\nu} = z_\nu^2$.

Že součet $y_0 + y_1 + \ldots + y_n$ jest střídavé čtverec a číslo o 1 menší nežli čtverec, plyne z výsledku pro $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ a ze vztahu $x_n - y_n = (-1)^n$.

Pro součet $z_0 - z_1 + z_2 - \ldots + (-1)^n z_n$ zjednáme si tento výraz

$$(-1)^n \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right]^2,$$

a jest tedy absolutní hodnota toho součtu úplný čtverec a rovna součtu $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$. Konečně jsou platny ještě tyto vztahy:

$$y_n - y_{n-1} = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}\right]^2,$$

$$x_n - x_{n-1} = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{\sqrt{2}}\right]^2,$$

a jest tudíž rozdíl $y_n - y_{n-1}$ pro každé $n > 0$ čtverec celého čísla a rozdíl $x_n - x_{n-1}$ dvojnásobný čtverec. Zvláště pak jest tento vztah platný

$$y_{2n+1} - y_{2n} = 4z_n^2.$$

Úloha 5.

Stanoviti racionální trojúhelníky pravoúhlé, při nichž poměr odvěsen se rovná přibližně poměru dvou čísel celých. Zvlášť pak propočítejte případ, že poměr odvěsen jest blízký poměru 1 : 2. (Srovnej úlohu předcházející.)

r.

Řešení zaslal p. *Josef Jandásek*, stud. gymn. ve Strážnici.

Odvěsny a, b a přepona c trojúhelníka pravoúhlého racionálního dají se, jak známo, vyjádřiti ve tvaru

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2, \tag{1}$$

kde m a n jsou čísla celá kladná, jež můžeme předpokládati jako nesoudělná, (omezíme-li se pro a, b, c na hodnoty bez společné míry, což, jak patrno, jest přípustno). Požadavek, aby poměr odvěsen byl rovný poměru dvou čísel celých $M : N$, jest vyjádřen rovnicí

$$(m^2 - n^2) : 2mn = M : N,$$

anebo jinak

$$m^2N - 2mnM - n^2N = 0,$$

anebo konečně

$$\frac{m}{n} = \frac{M + \sqrt{M^2 + N^2}}{N} = \frac{M + \sqrt{D}}{N}, \tag{2}$$

znamenáme-li k vůli stručnosti

$$D = M^2 + N^2.$$

Rovnici poslední nelze vyhověti čísly celými pro m, n, vyjma v tom případě, že D jest úplný čtverec; není-li však D úplný čtverec, lze jí vyhověti jenom přibližně, jakž také úlohou požadováno.

Stačí tudíž v rovnici poslední zvoliti si místo pravé strany přibližnou její hodnotu a klásti místo ní podíl dvou čísel celých nesoudělných. Číslo m položíme rovno dělenci a číslo n děliteli; z rovnic pak (1) vypočítáme a, b, c. Dostaneme tak strany trojúhelníka pravoúhlého, pro něž tím přesněji bude splněna podmínka, že poměr odvěsen jest rovný poměru číslu celých $M : N$, čím více přiblížené byla zvolena hodnota za výraz $\frac{M + \sqrt{D}}{N}$.

Poznámka od r.

Abychom určitého přiblížení dosáhli co nejmenšími čísly, jest výhodno rozvinout zlomek $\frac{M + \sqrt{D}}{N}$ ve zlomek řetězový; tento zlomek bude nekonečný a periodický. Jest však možno zlomky řetězové obejít tímto způsobem.

Budiž $\frac{m_0}{n_0}$ přibližná hodnota pro $\frac{M+\sqrt{D}}{N}$ tak volená, aby rozdíl

$$m_0 - n_0 \frac{M+\sqrt{D}}{N} = \varepsilon_0 \tag{3}$$

byl pravý zlomek, t. j. aby $|\varepsilon_0| < 1$. Takovýmto způsobem lze kladná a celá čísla m_0 a n_0 vždy zvoliti; stačí zvoliti si n_0 libovolně, číslo m_0 jest pak dvojznačně určeno; buďto zvolíme si totiž za m_0 největší celé číslo obsažené v

$$n_0 \frac{M+\sqrt{D}}{N},$$

anebo číslo, které jest o jednotku větší nežli toto největší celé číslo. Budiž dále $T : U$ podíl dvou čísel celých kladných tak volených, aby

$$T - U\sqrt{D} = \eta, \tag{4}$$

kde $|\eta| < 1$; pak jest ten podíl přibližnou hodnotou pro $\sqrt{D}$.

Znásobme spolu rovnice (3) a (4); dostaneme rovnici, jíž lze dáti tvar

$$[m_0 T + (m_0 M + n_0 N) U] \\ - [n_0 T + (m_0 N - n_0 M) U] \frac{M+\sqrt{D}}{N} = \varepsilon_0 \eta;$$

anebo klademe-li

$$m_1 = m_0 T + (m_0 M + n_0 N) U, \quad n_1 = n_0 T + (m_0 N - n_0 M) U, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \eta,$$

tvar

$$m_1 - n_1 \frac{M+\sqrt{D}}{N} = \varepsilon_1;$$

a jest tudíž $\frac{m_1}{n_1}$ přibližná hodnota pro $\frac{M+\sqrt{D}}{N}$ téže vlastnosti základní jako $\frac{m_0}{n_0}$. Jako jsme odvodili z m_0, n_0 dvojici novou m_1, n_1, odvodíme z této další dvojici m_2, n_2, atd. a dostaneme neomezenou řadu přibližných hodnot

$$\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots \frac{m_k}{n_k}, \ldots,$$

jež s rostoucím indexem konvergovati budou k hodnotě $\frac{M+\sqrt{D}}{N}$; při tom jest platný tento rekurrentní vztah

$$\begin{aligned} m_k &= m_{k-1} T + (m_{k-1} M + n_{k-1} N) U, \\ n_k &= n_{k-1} T + (m_{k-1} N - n_{k-1} M) U. \end{aligned} \tag{5}$$

Řadu $m_0, m_1, m_2, \ldots$ (jakož i řadu $n_0, n_1, n_2, \ldots$) lze vytvořiti sčítáním stejnolehlých členů dvou geometrických řad způsobem vyloženým v úloze předcházející a dostaneme snadným počtem

$$\begin{aligned} m_k &= r_1 (T + U\sqrt{D})^k + r_2 (T - U\sqrt{D})^k, \\ n_k &= s_1 (T + U\sqrt{D})^k + s_2 (T - U\sqrt{D})^k, \end{aligned} \tag{6}$$

kde

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_0 (M + \sqrt{D}) + n_0 N}{2\sqrt{D}}, \quad r_2 = -\frac{m_0 (M - \sqrt{D}) + n_0 N}{2\sqrt{D}}, \\ s_1 &= \frac{m_0 N - n_0 (M - \sqrt{D})}{2\sqrt{D}}, \quad s_2 = -\frac{m_0 N - n_0 (M + \sqrt{D})}{2\sqrt{D}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Použitím formulí (1) dostaneme ze dvou řad čísel celých $m_0, m_1, \ldots$; $n_0, n_1, n_2, \ldots$ tři řady čísel celých $a_0, a_1, a_2, \ldots$; $b_0, b_1, b_2, \ldots$; $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Obecné členy těchto řad jsou dány tvarem

$$\begin{aligned} a_k &= t_1 (T^2 - U^2 D)^k + t_2 (T + U\sqrt{D})^{2k} + t_3 (T - U\sqrt{D})^{2k}, \\ b_k &= v_1 (T^2 - U^2 D)^k + v_2 (T + U\sqrt{D})^{2k} + v_3 (T - U\sqrt{D})^{2k}, \\ c_k &= \qquad\qquad\qquad\quad w_2 (T + U\sqrt{D})^{2k} + w_3 (T - U\sqrt{D})^{2k}, \end{aligned} \tag{8}$$

kde lze čísla $t_1, t_2, t_3, v_1, \ldots$ snadno pomocí $r_1, s_1, \ldots$ vypočísti. Pro řady tyto platí jednak vztah

$$a_k^2 + b_k^2 = c_k^2,$$

jednak vztah

$$N a_k - M b_k = (m_0^2 N - 2 m_0 n_0 M - n_0^2 N)(T^2 - U^2 D)^k. \tag{9}$$

Jsou tedy celá čísla a_k, b_k, c_k měrná čísla stran trojúhelníka pravoúhlého, v němž poměr odvěsen přibližně se rovná poměru daných čísel $M : N$. Přiblížení pak bude tím větší, čím pravou stranu rovnice (9) vhodnou volbou čísel T, U, m_0, n_0

učiníme menší. A tu jest nejprve známo, že lze *vždycky* řešiti rovnici *)

$$T^2 - DU^2 = 1 \qquad (10)$$

a někdy i rovnici

$$T^2 - DU^2 = -1 \qquad (11)$$

čísly celými kladnými. Zvolíme-li si T a U tak, aby splněna byla jedna z rovnic (10), (11), při čemž účelně si zvolíme co možná nejmenší čísla jednu z těch rovnic splňující, jest rozdíl

$$Na_k - Mb_k = (m_0^2N - 2m_0n_0M - n_0^2N)\,.\,(\pm 1)^k$$

a jest absolutní hodnota tohoto rozdílu nezávislá na k. V tomto případě můžeme za k do (6) a do (8) dosazovati i čísla záporná, dostáváme řady pro a_k, b_k, c_k v obou směrech neomezené.

Výsledek nám podává neomezené množství trojin řad, jež řeší celými čísly předložený úkol. Mezi těmito řadami zvláštní zájem mají ty, pro které $m_0^2N - 2m_0n_0M - n_0^2N$ má hodnotu co nejmenší.

Jestliže $M = 2$, $N = 1$, jest $D = 5$ a můžeme ve výraze $m_0^2 - 4m_0n_0 - n_0^2$ učiniti $m_0 = \pm 1$, $n_0 = 0$, výraz pak dostane hodnotu 1 (anebo $m_0 = 0$, $n_0 \pm 1$, výraz dostane hodnotu -1). Rovnice

$$T^2 - 5U^2 = -1$$

jest řešitelna, nejmenší kladné řešení jest dáno čísly $T = 2$, $U = 1$. Dostáváme v tomto případě tyto tři řady

a_k . . . . . , 1, 15, 273, 4895, 87841, 1576239, . . .
b_k . . . . . , 0, 8, 136, 2448, 43920, 788120, . . .
c_k . . . . . , 1, 17, 305, 5473, 98209, 1762289, . . .

Členy těchto řad jsou obecně vyjádřeny výrazy

$$a_k = \frac{(-1)^k}{5} + \frac{(2+\sqrt{5})^{2k+1}}{5} + \frac{(2-\sqrt{5})^{2k+1}}{5},$$

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}\,2}{5} + \frac{(2+\sqrt{5})^{2k+1}}{10} + \frac{(2-\sqrt{5})^{2k+1}}{10},$$

$$c_k = \frac{(2+\sqrt{5})^{2k}(5+2\sqrt{5})}{10} + \frac{(2-\sqrt{5})^{2k}(5-2\sqrt{5})}{10}.$$

*) Rovnice (10) sluje rovnice Pellova. Že jest vždycky (při $D > 0$) řešitelna čísly celými, kladnými, dokázal prvně Lagrange; všecka řešení této rovnice lze odvoditi z jednoho, ve kterém jsou T a U nejmenší kladná.

Úloha 6.

Řešení zaslal p. *Vl. Živanský*, stud. gymn. v Brně.

Nejprve lze poznamenati, že rozdíl

$$E\,\frac{a}{b} - E\,\frac{a-1}{b}, \qquad a \geqq 1 \tag{1}$$

jest dle významu značky E buď rovný 1 anebo nulle, dle toho, je-li a dělitelno b či ne. Vycházejíce z této poznámky, dokážeme vztahy v úloze uvedené úplnou indukcí. Vztahy ty jsou totiž platny pro $N = 1$; neboť pak ty vztahy redukují se patrně na identity $1 = 1$, $0 = 0$, $0 = 0, \ldots$ Dokážeme, že, jsou-li platny pro N, jsou též platny, píšeme-li $N + 1$ místo N. Obraťme se nejprve ke vztahu prvnímu; tu předpokládajíce, že

$$N - [1]_N + [2]_N - [3]_N + \ldots = 1, \tag{2}$$

vyhledáme hodnotu výrazu

$$N + 1 - [1]_{N+1} + [2]_{N+1} - [3]_{N+1} + \ldots \tag{3}$$

Ve výrazech $[1]_N$, $[2]_N, \ldots$ atd. můžeme předpokládati, že v příslušných součtech jsou členy, jež vztahují se nejenom k prvočíslům menším anebo rovným N, ale i členy, které vztahují se ku všem prvočíslům menším nežli číslo $N_1 > N + 1$, neboť tím patrně ke každému součtu jenom členy rovné nulle přidáváme. Učiňme tento předpoklad a vyšetřme, oč jest výraz (3) větší nežli výraz na levé straně (2). Nechť jest $N + 1$ dělitelno λ různými prvočísly. Pak dle svrchu učiněné poznámky (1) a dle významu čísel $[1]_N$, $[2]_N, \ldots$ plyne ihned

$$[1]_{N+1} - [1]_N = \binom{\lambda}{1},\ [2]_{N+1} - [2]_N = \binom{\lambda}{2}, \ldots \tag{4}$$

a jest tudíž výraz (3) větší o

$$1 - \binom{\lambda}{1} + \binom{\lambda}{2} - \binom{\lambda}{3} + \ldots = 0$$

čísla té rovnici hovící, způsobem, jakým svrchu odvozena byla čísla m_1, n_1 z čísel m_0, n_0. Aby rovnice (11) byla řešitelna čísly celými, kladnými, k tomu jest nejprve nutno, aby D bylo součtem dvou čtverců (jakož v našem případě vždy splněno, $D = M^2 + N^2$), avšak tato podmínka není postačitelná, t. j. jsou čísla D, jež lze rozložiti v součet dvou čtverců a přece rovnice (11) není pro ně řešitelna. Jistě jest řešitelna na př., když D jest prvočíslo tvaru $4n + 1$.

nežli levá strana (2). Následkem toho jest platný vztah

$$N+1-[1]_{N+1}+[2]_{N+1}-\ldots=1,$$

platný-li jest vztah (2). A poněvadž vztah (2) jest platný pro $N=1$, platí pro každé N.

Zcela podobně dokáží se ostatní vztahy. Nechť jest ku př. vztah k-tý

$$[k]_N-\binom{k+1}{1}[k+1]_N+\binom{k+2}{2}[k+2]_N\ldots=\{k\}_N \qquad (5)$$

správný. Pak jest se zřetelem ku (4)

$$\left\{[k]_{N+1}-\binom{k+1}{1}[k+1]_{N+1}+\binom{k+2}{2}[k+2]_{N+1}-\ldots\right\}$$
$$-\left\{[k]_N-\binom{k+1}{1}[k+1]_N+\ldots\right\}$$
$$=\binom{\lambda}{k}-\binom{k+1}{1}\binom{\lambda}{k+1}+\binom{k+2}{2}\binom{\lambda}{k+2}-\ldots$$
$$=\frac{\lambda!}{(\lambda-k)!\,k!}-\frac{\lambda!}{1!(\lambda-k-1)!\,k!}+\frac{\lambda!}{2!(\lambda-k-2)!\,k!}-\ldots$$
$$=\frac{\lambda!}{(\lambda-k)!\,k!}\left(1-\binom{\lambda-k}{1}+\binom{\lambda-k}{2}-\ldots\right)$$
$$=0,\ \text{pro}\ \lambda\gtrless k;$$
$$=1,\ \text{pro}\ \lambda=k.$$

Avšak i $\{k\}_{N+1}-\{k\}_N=0$ pro $\lambda\gtrless k$ a rovno jest 1, jestliže $\lambda=k$ a tedy z rovnice (5) plyne ihned rovnice

$$[k]_{N+1}-\binom{k+1}{1}[k+1]_{N+1}+\ldots=\{k\}_{N+1}$$

a poněvadž rovnice (5) platna jest pro $N=1$, platí pro každé N.

Poznámka. Snadno bychom odvodili podobným způsobem pravé strany rovnic (2) a (5), kdyby součty na levé straně těchto rovnic se nacházející nevztahovaly se ke *všem* prvočíslům menším anebo rovným číslu N, nýbrž jenom k některým prvočíslům $p_1, p_2, \ldots p_\mu$. Tu ku př. pravá strana rovnice (2) by byla v tomto případě počet všech čísel menších anebo rovných N, jež nejsou žádným z prvočísel $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ dělitelna. Jsou-li $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ všecka prvočísla $\leq\sqrt{N}$, jest tudíž výraz

$$N-\Sigma E\frac{N}{p_i}+\Sigma E\frac{N}{p_ip_k}-\Sigma E\frac{N}{p_ip_kp_e}+\ldots \qquad (6)$$

rovný počtu všech prvočísel menších nebo rovných N zmenšenému o $\mu - 1$. Tento vztah mezi počtem prvočísel a výrazem (6) jest užitečným, jak známo, při stanovení počtu prvočísel v daných mezích.

Úloha 7.

Čísla $[1]_N$, $[2]_N$, $[3]_N \ldots [k]_N, \ldots$ *v úloze předešlé stanovená vyjádřiti jest pomocí čísel* $\{1\}_N$, $\{2\}_N$, $\{3\}_N \ldots \{k\}_N \ldots$ *rovněž v úloze předešlé definovaných.*

r.

Řešení zaslal p. *Karel Vaněk*, soukr. stud. v Praze.

Číslo $\{k\}_N$ stanovíme eliminací z těchto rovnic:

$$[k]_N - \binom{k+1}{1}[k+1]_N + \binom{k+2}{2}[k+2]_N - \ldots = \{k\}_N,$$

$$[k+1]_N - \binom{k+2}{1}[k+2]_N + \ldots = \{k+1\}_N$$

$$[k+2]_N - \ldots = \{k+2\}_N,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

První z těchto rovnic násobíme po obou stranách 1, druhou $\binom{k+1}{1}$, třetí $\binom{k+2}{2}, \ldots,$ l-tou číslem $\binom{k+l}{l}, \ldots$; rovnice výsledné pak sčítáme. Bude pak míti číslo $[k+r]_N$ v součtu tento součinitel (nehledě ke znaménku):

$$\binom{k+r}{r}\cdot 1 - \binom{k+r}{r-1}\binom{k+1}{1} + \binom{k+r}{r-2}\binom{k+2}{2} - \ldots$$
$$+ (-1)^l \binom{k+r}{r-l}\binom{k+l}{l} - \ldots.$$

Píšeme-li v tomto výraze $\frac{m!}{(m-n)!\,n!}$ místo $\binom{m}{n}$, dostaneme po snadné úpravě, že tento výraz jest rovný, jestliže $r > 0$,

$$\frac{(k+r)!}{k!\,r!}\left\{1 - \frac{r!}{(r-1)!\,1!} + \frac{r!}{(r-2)!\,2!} - \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^l \frac{r!}{(r-l)!\,l!} - \ldots\right\} = \frac{(k+r)!}{k!\,r!}(1-1)^r = 0.$$

Zůstane tudíž na levé straně jediný člen $[k]_N$ a obdržíme jako výsledek tento vztah

$$[k]_N = \{k\}_N + \binom{k+1}{1}\{k+1\}_N + \binom{k+2}{2}\{k+2\}_N + \ldots,$$

kterýmžto vztahem úloha jest řešena.

Úloha 8.

Dokažte ze vztahu prvního úlohy 6., že počet prvočísel menších anebo rovných N jest rovný součtu těchto dvou řad *)

$$\Sigma E\frac{N}{p_1} - 2\Sigma E\frac{N}{p_1p_2} + 3\Sigma E\frac{N}{p_1p_2p_3} - \ldots,$$

$$-\Sigma E\frac{N}{p_1^2} + \Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2} - \Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2p_3} + \ldots,$$

při čemž význam znamének součtových jest týž jako v úloze 6.

r.

Řešení zaslal p. *Boh. Kladivo,* stud. gymn. v Brně.

Do vztahu v úloze 6. dokázaného

$$1 = N - \Sigma E\frac{N}{p_1} + \Sigma E\frac{N}{p_1p_2} - \Sigma E\frac{N}{p_1p_2p_3} + \ldots \tag{1}$$

dosadíme za N všechna čísla

$$E\frac{N}{p_1},\quad E\frac{N}{p_2},\quad E\frac{N}{p_3}, \ldots E\frac{N}{p_n},$$

kde $p_1, p_2, \ldots p_n$ jsou všechna prvočísla menší anebo rovná N. Rovnice tak získané pak sčítáme. I dostaneme na levé straně n, t. j. počet všech prvočísel menších anebo-rovných N. Na pravé straně bude součet prvních členů rovný $\Sigma E\frac{N}{p_1}$; v součtech druhých členů objeví se sčítanci tvaru jednak $-E\frac{N}{p_1p_2}$, jednak $-E\frac{N}{p_1^2}$, při čemž sčítanec $-E\frac{N}{p_1p_2}$ objeví se dvakráte, jednak v rovnici, která vznikla dosazením $E\frac{N}{p_1}$ do (1) za N, jednak

*) Vztah tento odvodil ruský mathematik Bugajev pomocí t. zv. »theorie funkcí derivovaných«. (Viz Bull. sc. math. astr. 10. 1876. str. 13.)

v rovnici, která vznikla dosazením $E\frac{N}{p_2}$. I bude tedy součet druhých členů

$$-2\Sigma E\frac{N}{p_1p_2}-\Sigma E\frac{N}{p_1^2}.$$

Podobně bude součet třetích členů

$$+3\Sigma E\frac{N}{p_1p_2p_3}+\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2},$$

atd. I dostáváme tak vskutku vztah úlohou daný.

Jiné řešení zaslal p. *Vl. Živanský*, stud. gymn. v Brně.

Jestliže N jest dělitelno čtverci prvočísel $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots p_{k_\varrho}$ a mimo to ještě prvočísly $p_{k_{\varrho+1}}, p_{k_{\varrho+2}}, \ldots p_{k_i}$ (a již žádným jiným prvočíslem), jest jako v úloze 6.

$$\Sigma E\frac{N}{p_1p_2,\ldots p_k}=\Sigma E\frac{N-1}{p_1p_2,\ldots p_k}+\binom{i}{k}$$

a podobnými úvahami obdržíme ještě ze vztahu (1) úlohy 6.:

$$\Sigma E\frac{N}{p_1^2}=\Sigma E\frac{N-1}{p_1^2}+\varrho\binom{i-1}{0}$$

$$\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2}=\Sigma E\frac{N-1}{p_1^2p_2}+\varrho\binom{i-1}{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2\ldots p_k}=\Sigma E\frac{N-1}{p_1^2p_2\ldots p_k}+\varrho\binom{i-1}{k-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je-li

$$S_N=\Sigma E\frac{N}{p_1}-2\Sigma E\frac{N}{p_1p_2}+3\Sigma E\frac{N}{p_1p_2p_3}\ldots$$
$$-\Sigma E\frac{N}{p_1^2}+\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2}-\Sigma E\frac{N}{p_1^2p_2p_3}+\ldots,$$

jest tedy

$$S_N=S_{N-1}+(\varrho-i)\left[\binom{i-1}{0}-\binom{i-1}{1}+\binom{i-1}{2}-\ldots\right].$$

Má-li S_N značiti počet prvočísel $\leqq N$, musí býti $S_N=S_{N-1}$, je-li N číslem složeným a $S_N=S_{N-1}+1$, je-li N kmenné.

V případě prvém jest $i > 1$, pak $\binom{i-1}{0} - \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} - \ldots = 0$, a $S_N = S_{N-1}$; v druhém případě je $\varrho = 0$, $i = 1$, pak

$$\binom{i-1}{0} - \binom{i-1}{1} + \binom{i-1}{2} - \ldots\ldots\ldots = \binom{i-1}{0} = 1,$$

a $S_N = S_{N-1} + 1$.

Konečně $S_2 = 1$; odkud tedy patrno, že S_N značí počet prvočísel $\leqq N$.

Úloha 9.

Na delší straně obdélníka jest dán bod. a) Jest najíti obdélník, jehož jedním vrcholem je tento bod, a ostatní leží na ostatních stránkách daného obdélníka. b) Jaká musí býti poloha daného bodu, aby úloha měla řešení? c) Značí-li a, b $(a > b)$ strany původního, a', b' $(a' > b')$ strany vepsaného obdélníka, dokažte, že vždy, pro jakoukoli polohu daného bodu,

$$\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}.$$

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *L. Štětka*, stud. gymn. na Malé straně.

a) Označme vrcholy daného obdélníka A, B, C, D, a buď $AB = CD = a$, $BC = DA = b$. Vrcholy vepsaného obdélníka nechť jsou E, F, G, H a nechť jest vrchol E na straně AB, vrchol F na straně BC, atd.

Nejprve jest patrna shodnost trojúhelníků EBF a GDH, jakož i shodnost trojúhelníků FCG a HAE (jedna strana a úhly přilehlé). Ze shodnosti plyne $EB = GD$, $BF = DH$, atd. Z těchto rovností pak následuje, že přímky GE a FH procházejí průsekem úhlopříček daného obdélníka. I jest tedy průsek úhlopříček vepsaného obdélníka zároveň průsekem úhlopříček daného obdélníka. Tato věta nám dává bezprostředně bod G, dán-li jest bod E, jak úlohou se předpokládá. Ostatní vrcholy vepsaného obdélníka dostaneme, opíšeme-li z průseku úhlopříček O jakožto středu kruh poloměrem OE. Kde nám tento kruh protne strany BC a

DA, tam jenom se mohou nacházeti zbývající vrcholy vepsaného obdélníka.

b) Úloha má patrně dvě řešení, když $OE > \frac{a}{2}$, jedno řešení, když $OE = \frac{a}{2}$ a žádné reálné řesení, když $OE < \frac{a}{2}$. Při tom jest ještě požadovati $OE < OB$, neboť jenom v tomto případě jest bod E mezi body A a B.

c) Z podobnosti trojúhelníků EBF a FCG plynou tyto úměry

$$\frac{EF}{FG} = \frac{BF}{CG} = \frac{EB}{FC}. \tag{m}$$

Stačí nyní uvažovati dvojí možnost, buď $EF < FG$, anebo $EF > FG$; neboť případ $EF = FG$ jest nemožný, jelikož by pak všecky čtyři trojúhelníky EBF, FCG, GDH, HAE byly shodny a čtyřúhelník $ABCD$ byl by čtverec, což však úlohou jest vyloučeno ($a > b$).

I. Buď tedy nejprve $EF < FG$, pak jest $EF = b'$, $FG = a'$ a z úměr (m) plyne též, že $FC > EB$; úměrám pak lze dáti tento tvar

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b - FC}{a - EB} = \frac{EB}{FC} = \frac{b - (FC - EB)}{a + (FC - EB)}.$$

Poslední poměr jest však menší než $\frac{b}{a}$, neboť $FC - EB$ jest kladné a tudíž

$$\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}.$$

II. Buď $EF > FG$, pak jest $EF = a'$, $FG = b'$ a z úměr (m) plyne též, že $BF > CG$; lze pak podobně jako svrchu psáti

$$\frac{b'}{a'} = \frac{CG}{BF} = \frac{FC}{EB} = \frac{b - BF}{a - CG} = \frac{b - (BF - CG)}{a + (BF - CG)} < \frac{b}{a}.$$

Jest tedy vždy, pokud E nachází se mezi body A a B při přijatém označení $\frac{b'}{a'} < \frac{b}{a}$. (Nerovnina tato pozbývá platnosti, připustíme-li obdélníky vepsané, jichž vrchol E nachází se vně bodů A a B.)

Vedle nerovniny právě dokázané platí ještě tato: $a'b' < ab$, kterou dostáváme z porovnání ploských obsahů obou obdélníků. Z obou pak nerovnin vyplývá znásobením, že $b' < b$.

Úloha 10.

Dvěma danými koncovými body průměru pevné kružnice jest vésti kružnici, jež protíná jinou pevnou kružnici rovněž v koncových bodech průměru, tak že půlí její obvod (planimetricky.)

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Jan Svoboda*, stud. reálky v Jevíčku.

Buďtež dány kruh K_1 s průměrem $\overline{a_1 b_1}$ a kruh K_2. Kružnice hledaná K, jež K_1 protíná v bodech a_1, b_1, nechť protíná K_2 v bodech a_2, b_2, koncových to bodech průměru. Přímky $\overline{a_1 b_1}$ a $\overline{a_2 b_2}$ protnou se na chordále kružnic K_1 a K_2, poněvadž $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$ jsou vlastně chordály hledaného kruhu K a daných K_1, K_2 a všecky tři chordály tří kruhů protínají se v jediném bodě. Z toho vyplývá tato konstrukce:

Prodlužme $\overline{a_1 b_1}$, až protne chordálu kruhů K_1, K_2, a průsečík spojme se středem kruhu K_2. Kde tato přímka spojující průsečík a střed kruhu K_2 protne kružnici K_2, jsou body a_2, b_2. Znajíce čtyři body a_1, b_1, a_2, b_2, jimiž prochází kruh K, snadno jej sestrojíme.

Úloha 11.

Dokažte na základě věty o chordálách tří kružnic, že geometrické místo středů kružnic, jež půlí obvody dvou pevných kružnic, je přímka stojící kolmo na spojnici středů obou pevných kružnic; sestrojte tuto přímku!

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *J. Pilnáček*, stud. reálky v Kladně.

Mějme pevné kružnice K_1 (o_1), K_2 (o_2) a dále K (o), jež půlí obvody kružnic K_1, K_2. Sestrojme chordálu Ch kružnice K_1, K_2 (protíná centrálu $\overline{o_1 o_2}$ kolmo a v bodě, jejž označíme p). Prodloužené průměry kružnic K_1, K_2, jichž koncovými body prochází K, protnou se v bodě ch na Ch, jelikož tyto průměry jsou další dvě chordály k trojině kružnic K_1, K_2, K.

Mění-li se poloha kružnice K, pohybuje se bod ch po Ch. Zbývá tedy dokázati, že, šine-li se bod ch po Ch, probíhá střed o přímku P kolmou k $\overline{o_1 o_2}$.

Čtyřúhelníku $o_1 o o_2 ch$ lze opsati kružnici $K'(w)$ o průměru $\overline{och}$, tedy $\overline{ow} = \overline{wch}$. Vedeme-li v kružnici K' z koncových bodů průměru och kolmice P a Ch na tětivu $\overline{o_1 o_2}$ a je-li pata kolmice z bodu o v bodě q, jest, jak snadně nahlédnouti, $\overline{o_1 q} = \overline{po_2}$. Ježto však pro libovolnou polohu bodu ch jest $\overline{po_2}$ stálé, jest i $\overline{o_1 q}$ stálé, čili geom. místo středu o jest kolmice v bodě q k centrále $\overline{o_1 o_2}$.

Sestrojení přímky P vysvítá ze vztahu $\overline{o_1 q} = \overline{po_2}$.

Úloha 12.

Opírajíce se o výsledek předchozí úlohy, sestrojte kružnici, jež půlí obvody tří pevných kružnic!

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *J. Svoboda*, stud. reálky v Jevíčku.

Nechť jsou dány kruhy K_1 (o_1), K_2 (o_2), K_3 (o_3). Sestrojme geometrická místa středů kružnic, jež půlí obvody kruhů K_1 a K_2, K_1 a K_3. Průsečíkem jich prochází patrně třetí geometrické místo. V onom průsečíku jest zároveň střed hledaného kruhu K. Abychom pak seznali délku poloměru hledaného kruhu, spojme onen průsečík ku př. s o_1 a k té spojnici veďme bodem o_1 kolmici, jež protne obvod K_1 ve dvou bodech přináležejících hledané kružnici.

Úloha 13.

Podobně řešte úlohu obecnější: Jsou dány tři pevné kružnice K_1, K_2, K_3 a tři pevné body m_1, m_2, m_3. Jest sestrojiti kružnici, jež protíná

kružnici	K_1	*v*	*bodech,*	*jichž*	*spojnice*	*jde bodem*	m_1,
„	K_2	„	„	„	„	„	m_2,
„	K_3	„	„	„	„	„	m_3.

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Jar. Pilnáček*, stud. reálky na Kladně.

Hledaná kružnice $K(o)$ nechť protíná K_1 v bodech a_1, b_1, K_2 v a_2, b_2, K_3 v a_3, b_3. Sestrojme chordály Ch_3 ke K_1 a K_2, Ch_2 ke K_1 a K_3, Ch_1 ke K_2 a K_3. Jak patrno, přímky

$a_1 b_1$ a $a_2 b_2$ protínají se na Ch_3 v bodě c,
$a_1 b_1$ a $a_3 b_3$ „ „ „ Ch_2 „ b,
$a_2 b_2$ a $a_3 b_3$ „ „ „ Ch_1 „ a.

Nalezneme tedy $\triangle\, abc$, jehož strany procházejí m_1, m_2, m_3 a vrcholy leží na Ch_1, Ch_2, Ch_3.

Nejprve sestrojme $\triangle\, \alpha\beta\gamma$, jehož vrcholy leží na Ch_1, Ch_2, Ch_3 a dvě jeho strany — ku př. $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\alpha\gamma}$ — procházejí dvěma z daných bodů — ku př. m_1, m_2. Jak ihned patrno, jsou $\triangle\, abc$ a $\triangle\, \alpha\beta\gamma$ perspektivní, neboť Ch_1, Ch_2, Ch_3 protínají se v jednom bodě; i leží průsečíky stejnolehlých stran v jedné přímce P, totiž $\overline{m_1 m_2}$.

Bod x_3, v němž se protínají $\alpha\beta$ a ab je v průsečíku P s $\alpha\beta$. Body x_3, m_3 pak stanoví přímku ab, jejíž průsečíky s Ch_1, Ch_2 jsou vrcholy a, b trojúhelníka hledaného. Pak am_2 a bm_1 protínají se na Ch_3 v třetím vrcholu c.

Máme-li již $\triangle\, abc$, máme tím také průsečíky a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, kterými bude procházeti kružnice K; střed se najde známým způsobem.

Úloha 14.

Najděte bod, z něhož se promítá čtveřina bodů harmonických čtyřmi paprsky, z nichž první s třetím, druhý se čtvrtým svírá úhel pravý. Nalezněte úhly, které svírá každý paprsek se svým následujícím!

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Ad. Tesař*, stud. gymn. v Olomouci.

Body A, B; C, D buďtež harmonicky sdružené, tak že $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$.

Kružnice nad průměry $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ protínají se v žádaném bodě M; neboť jest vskutku

$$\sphericalangle\, AMB = R = \sphericalangle\, CMD.$$

Ježto body A, B, C, D jsou harmonicky sdružené, jsou též i paprsky $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}, \overline{MD}$ harmonicky sdružené, t. j. platí následující relace

$$\frac{\sin A\hat{M}C}{\sin B\hat{M}C} : \frac{\sin A\hat{M}D}{\sin B\hat{M}D} = -1,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - R)} : \frac{\sin (R + \alpha)}{\sin \alpha} = -1,$$

$$-\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -1,$$

t. j. $$tg^2 \alpha = 1; \; \alpha = \pm 45^0 + k\pi.$$

Jsou-li tedy dané čtyři body v pořádku A, C, B, D, jest

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMB = \sphericalangle BMD = 45^0.$$

Úloha 15.

Dokažte, že dvě kružnice, jež stanoví na spojnici středů dvě dvojice bodů, které se oddělují harmonicky, protínají se kolmo!

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Rud. Novotný*, stud. gymn. v Kyjově.

Označme průseky kružnic s centrálou v pořadí, jak se s nimi po centrále postupujíce setkáváme, písmeny A, C, B, D; průsek kružnic označme M a středy jich písmeny O_1, O_2.

Body $A, B; C, D$ jsou dle úlohy harmonicky sdružené, tak že

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1;$$

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD = 90^0,$$

poněvadž jsou to úhly nad polokruhem. Z úlohy předešlé plyne: $\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMB = \sphericalangle BMD = 45^0$, a tedy $\sphericalangle AMD = 135^0$ a $\sphericalangle DAM + \sphericalangle MDA = 45^0$.

Poněvadž $\sphericalangle DAM + \sphericalangle MDA = \sphericalangle AMO_1 + \sphericalangle O_2MD = 45^0$, jest

$$\sphericalangle O_1MO_2 = 90^0.$$

Poloměry O_1M a O_2M spojují středy kružnic s bodem průsečným a poněvadž stojí na sobě kolmo, jest poloměr jedné kružnice zároveň tečnou kružnice druhé a tedy kružnice ony protínají se kolmo.

Úloha 16.

K bodu, v němž libovolný paprsek ohniskem ellipsy vedený protne řídící přímku, ležící na téže straně s ohniskem, najděte poláru; dokažte, že tato polára jde zase ohniskem; nalezněte úhel, který svírá s původním paprskem!

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *Václav Simandl*, stud. gymn. v Mladé Boleslavi.

Rovnice paprsku procházejícího ohniskem jest

$$y = A(x - e)$$

a rovnice přímky řídící ležící na téže straně s ohniskem

$$x = \frac{a^2}{e}.$$

Souřadnice x_0, y_0 průseku p nalezneme řešením rovnic obou těchto přímek

$$x_0 = \frac{a^2}{e}$$

$$y_0 = \frac{b^2}{e} A.$$

Jest tedy rovnice poláry k bodu p

$$\frac{a^2b^2}{e} x + \frac{a^2b^2}{e} Ay = a^2b^2;$$

ježto rovnici té hoví souřadnice ohniska $(e, 0)$, prochází jím P, což bylo dokázati.

Dále z rovnice té poláry vychází její směrnice A'

$$A' = -\frac{1}{A}.$$

Proto jest úhel, který tato polára svírá s původním paprskem *pravý*.

Úloha 17.

Bod m hyperboly rovnostranné promítněte dvěma paprsky z obou reálních vrcholů. Když bod x probíhá hyperbolu, otáčejí se oba paprsky kolem vrcholů opačnými směry stejnou *rychlostí, t. j., otočí-li se jeden paprsek o jistý úhel, otočí se druhý směrem opačným o týž úhel.*

Dr. *B. Bydžovský.*

Řešení zaslal p. *L. Jandásek,* stud. gymn. v Kyjově.

Buďtež $a_1\,(a, o)$, $a_2\,(-a, o)$ vrcholy hyperboly rovnoramenné o rovnici

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Bod m na hyperbole mějž souřadnice x, y; úhel Xa_1m značme α_1, úhel Xa_2m pak α_2; i jest

$$tg\,\alpha_1 = \frac{y}{x-a},$$

$$tg\,\alpha_2 = \frac{y}{x+a}.$$

Znásobíme-li a použijeme-li rovnice hyperboly, dostáváme

$$tg\,\alpha_1 \,.\, tg\,\alpha_2 = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = 1;$$

t. j.

$$tg\,\alpha_1 = cotg\,\alpha_2,$$

z čehož buď

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2,$$

anebo

$$\alpha_1 = \frac{3\pi}{2} - \alpha_2,$$

máme-li na zřeteli jenom úhly menší nežli 180°.

Z toho patrno, že paprsky skutečně otáčejí se kolem vrcholů hyperboly stejnou rychlostí směry opačnými; neboť součet úhlů, jež oba paprsky tvoří s osou X, jest stálý. Věta tato jest obdobou známé věty o kružnici, ve které však místo součtu nastupuje rozdíl úhlů, jenž jest stále rovný $\pm\frac{\pi}{2}$.

Úloha 18.

Půdice trojúhelníka je dána; střed kružnice vepsané leží na dané přímce, která stojí kolmo na půdici. Které jest geom. místo třetího vrcholu, a kde leží střed kružnice trojúhelníku při půdici zevně vepsané?

Dr. *Marian Haas.*

Řešení zaslal p. *Jan Zelený*, stud. reálky v Novém Městě.

1. Půdice trojúhelníka budiž AB, vrchol třetí C. Dotyčný bod pevný, ve kterém se proměnlivý kruh dotýká půdice, budiž C_1, dotyčné body na druhých stranách trojúhelníka buďtež A_1, B_1. Z věty, že délky tečných z jednoho bodu ke kruhu vedených, jsou stejné, plynou tyto rovnice

$$B_1A = AC_1, \; C_1B = BA_1, \; A_1C = CB_1.$$

I jest tudíž jednak

$$B_1A - BA_1 = (CB_1 + B_1A) - (BA_1 + A_1C) = CA - BC;$$

jednak $$B_1A - BA_1 = AC_1 - C_1B,$$

z čehož $$CA - BC = AC_1 - C_1B.$$

Jelikož body A, B, C_1 jsou na proměnlivém poloměru kruhu nezávisly, jest výraz $AC_1 - C_1B$ stálý a jest tudíž geometrické místo bodu C dle poslední rovnice jedna větev hyperboly, jejížto ohniska jsou body A, B a jejížto poloosa má délku $\frac{1}{2} \mid AC_1 - C_1B \mid$.

2. Kruh zevně vepsaný trojúhelníku ABC při půdici AB nechť dotýká se této půdice v bodě C_2 a druhých stran v bodech A_2, B_2. I jest ze symmetrie vzhledem k centrále obou kruhů patrno, že $A_2A_1 = B_1B_2$, či jinak psáno

$$A_2B + BA_1 = B_1A + AB_2,$$
$$A_2B - AB_2 = B_1A - BA_1 = AC_1 - C_1B.$$

Avšak dle svrchu uvedené věty jest $A_2B = C_2B$ a $AB_2 = AC_2$ a tedy

$$AC_2 - C_2B = -(AC_1 - C_1B) = konst.,$$

a jest tedy C_2 pevným a geom. místem pro středy kruhů vně vepsaných trojúhelníku ABC přímka kolmá k AB a protínající úsečku v bodě, jenž jest ku C_1 symmetricky položen vzhledem ke středu úsečky AB.

Úloha 19.

Uvnitř kruhu s poloměrem R probíhá kružnice s poloměrem r. Vyšetřiti podmínky, za kterých lze sestrojiti řadu n kružnic tak, aby každá z těchto n kružnic se dotýkala zevně kružnic sousedních a n-tá prvé, současně pak, aby každá do-

týkala se kružnice o poloměru R uvnitř a kružnice o poloměru r zevně. Podmínky ony jest najíti:

1. jsou-li kružnice o poloměrech R a r soustředné;

2. je-li délka centrály těchto kružnic $2e < R - r$.

Aug. Žáček.

Řešení zaslal p. *Jos. Jandásek,* stud. gymn. ve Strážnici.

Dané kružnice o poloměrech R a r označíme K, k. Řadu kruhů, jež prvé kružnice dotýkají se uvnitř, druhé zevně, budeme značiti k_1, k_2, ... k_n.

1. Jsou-li K a k soustředné, jsou středy kruhů k_1, k_2, ... vesměs na kruhu o poloměru $\frac{R+r}{2}$ a jehožto střed jest ve společném středu kruhů K a k. Poloměry kruhů k_1, k_2, ... jsou vesměs stejné a rovny $\frac{1}{2}(R-r)$. Předpokládáme-li, že kruh k_1 dotýká se k_2, k_2 pak kruhu k_3, ... a konečně kruh k_n kruhu k_1, jest středná dvou sousedních z kruhů k_1, k_2, ... délky $R-r$ a jest zároveň délkou strany pravidelného n-úhelníka vepsaného do kruhu o poloměru $\frac{1}{2}(R+r)$. Jest tedy platný tento vztah

$$\tfrac{1}{2}(R-r) = \tfrac{1}{2}(R+r)\sin\frac{2\pi}{2n}$$

aneb

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin\frac{\pi}{n}, \tag{1}$$

což jest hledanou podmínkou v tom případě, že K a k jsou soustředné.

2. Buďtež K a k kružnice v poloze obecné, jenom předpokládejme, že se neprotínají a že k probíhá uvnitř K. Pak lze pomocí inverse převésti tento obecnější případ na předcházející *).

Nejprve jest patrno, že střed kruhu, jenž protíná oba kruhy K a k orthogonálně, leží vždy na chordále, neboť střed toho kruhu musí míti k oběma kruhům stejnou mocnost. Takových kruhů jest neomezené množství a mají všecky ty kruhy společnou chordálu, jež jest centrálou kruhů K, k; neboť střed

*) O inversi viz článek p. B. Hostinského v tomto ročníku přílohy k Časopisu pro p. p. m. a fys. Zvláště pak na str. 153., 154. najde čtenář poučení o inversi, které dva kruhy převádí v kruhy soustředné.

kruhu K má ke všem těm kruhům touž mocnost R^2 a rovněž střed kruhu k má ke všem těm kruhům rovněž stejnou mocnost r^2. Tvoří tudíž kruhy, jež protínají oba kruhy K a k kolmo, svazek; body společné všem kruhům tohoto svazku leží na centrále; označíme je A_1, A_2. V našem případě jsou A_1 a A_2 reálné a leží jeden vně kruhu K, druhý uvnitř kruhu k.

Zvolíme-li si jeden z bodů A_1, A_2, ku př. A_1 vně kruhu K položený za střed inverse, změní se tou inversí kruhy K a k v kruhy K' a k' o poloměrech R' a r', svazek kružnic kolmo protínajících K a k se změní ve svazek přímek o vrcholu A'_2 kolmo protínajících kružnice K', k'. *Jsou tudíž K' a k' kruhy soustředné se středem v A'_2*; (při tom jest A'_2 bod inversí přidružený ku A_2.) Kruhy k_1, k_2, ... k_n změní se inversí v kruhy, jež se dotýkají kruhu K' uvnitř a kruhu k' zevně a bude se k'_1 dotýkati k'_2, k'_2 pak kruhu k'_3, ... a k'_n kruhu k'_1, jestliže obdobnou vlastnost mají k_1, k_2, ... k_n, jak chceme předpokládati. I jest tak obecný případ převeden na případ v odst. 1. řešený a jest tedy mezi R' a r' dle (1) tento vztah

$$\frac{R'-r'}{R'+r'} = sin\,\frac{\pi}{n}. \tag{2}$$

Vypočteme-li R', r' pomocí veličin daných R, r, e a dosadíme-li do této rovnice, obdržíme žádaný vztah mezi R, r, e. Aby relace mezi R, r, e a R', r' byly co nejjednodušší, zvolíme poloměr inverse tak, aby kruh K inversí sám v sebe přecházel; (k tomu stačí zvoliti si základní kruh inverse o středu A_1 tak, že protíná kolmo kruh K). Pak jest $R' = R$; a bod A'_2 splývá se středem O kruhu K. Střed kruhu k označíme o. Vedeme-li centrálu Oo, protíná tato kruh K v bodech, jež označíme po řadě od bodu A_1 vycházejíce B_1, B_2, kruh k v bodech, jež podobně označíme b_1, b_2 a kruh k' konečně v bodech b'_1, b'_2.

Tu jsou k bodům B_1, b_1, b_2 inversí přidruženy body B_2, b'_2, b'_1 a tedy vzhledem k definici inverse

$$A_1B_1 \,.\, A_1B_2 = A_1b_1 \,.\, A_1b'_2 = A_1b_2 \,.\, A_1b'_1$$

aneb zavedeme-li do těchto rovnic R, r, r'

$$\begin{aligned}(A_1O - R)(A_1O + R) &= (A_1o + r)(A_1O - r')\\ &= (A_1o - r)(A_1O + r').\end{aligned}$$

Položíme-li v těchto rovnicích ještě $A_1 o = A_1 O + Oo = A_1 O - 2e$ *), dostaneme dvě rovnice k určení $A_1 O$ a obdržíme pro tuto délku jednak

$$A_1 O = \frac{2er'}{r' - r},$$

jednak
$$A_1 O = \frac{R^2 - rr' + 2er'}{2e - r + r'}.$$

Srovnáním těchto dvou výsledků obdržíme rovnici pro r':

$$\frac{2er'}{r' - r} = \frac{R^2 - rr' + 2er'}{2e - r + r'},$$

jíž lze dáti tento tvar

$$r'^2 r + r'(4e^2 - R^2 - r^2) + R^2 r = 0.$$

Abychom této rovnici dali tvar pro nás co nejpříhodnější, násobme po obou stranách $4R$ a pišme ji takto

$$4r'^2 . R + 4r'R . (4e^2 - R^2 - r^2) + 4R^2 . Rr = 0;$$

nahraďme pak v prvním činiteli každého členu $2r'$ výrazem $(R + r') - (R - r')$ a $2R$ výrazem $(R + r') + (R - r')$. Dostaneme tak po krátké úpravě, že

$$\left(\frac{R - r'}{R + r'}\right)^2 = \frac{(R - r)^2 - 4e^2}{(R + r)^2 - 4e^2}.$$

Tudíž konečně obdržíme jakožto podmínku žádanou se zřetelem ku vztahu (2) a k tomu, že $R' = R$, tuto rovnici

$$\frac{(R - r)^2 - 4e^2}{(R + r)^2 - 4e^2} = sin^2 \frac{\pi}{n}. \tag{3}$$

3. Připustíme-li, že řada kruhů $k_1, k_2, \ldots . k_n$ může pokrývati prostor mezi kruhy K, k (resp. jednotlivá místa toho prostoru) několikráte, ku př. m-kráte, dostáváme patrně místo podmínky (3) tuto obecnější

$$\frac{(R - r)^2 - 4e^2}{(R + r)^2 - 4e^2} = sin^2 \frac{m\pi}{n}.$$

---

*) Kdybychom psali $A_1 o = A_1 O + 2e$, dospěli bychom k téže rovnici výslední.

Úloha 20.

Vyjádřiti jest chybu vzniklou při dělení úhlu na tři stejné díly konstrukcí na str. 76 *vyloženou, jakož i hranice této chyby, jestliže dělený úhel jest v intervalech* 0°—30°, 30°—60°, 60°—90°, 90°—120°.

Řešení zaslal p. *Vl. Živanský,* stud. gymn. v Brně.

Mimo označení, jehož užito na obr. na str. 77 tohoto ročníku časopisu, buď K' pravoúhlou projekcí bodu K na prodl. $\overline{OF}$. Dále poznamenejme $\overline{BF} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OK} = c$, $\sphericalangle KOF = \beta$, $\sphericalangle FOD = \varphi$.

Pak

$$a = 2b \sin\frac{\alpha}{2},\quad c = \sqrt{\overline{KK'}^2 + (\overline{OF} + \overline{FK'})^2} = \frac{b}{3}\sqrt{9 + 40 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{b}{3}\sqrt{29 - 20\cos\alpha}.$$

Jest však dále

$$tg\,\beta = \frac{\overline{KK'}}{\overline{OF} + \overline{FK'}} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\alpha}{5 - 2\cos\alpha}.$$

Z $\triangle DOK'$ je

$$\cos(\beta + \varphi) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10 - \cos\alpha}{3\sqrt{29 - 20\cos\alpha}}.$$

Odkud

$$tg\,(\beta + \varphi) = \frac{\sqrt{161 - 160\cos\alpha - \cos^2\alpha}}{10 - \cos\alpha};$$

tím pro dané α určíme β a φ. Chyba trisekcí vzniklá jest pak $\psi = \varphi - \frac{\alpha}{3}$. V daných intervalech nabývá ψ hodnoty extremní při horní mezi, jak snadno se přesvědčíme způsobem užitým v úloze následující. Pak v intervalech

0° — 30° je pro $\alpha = 30°$, $\varphi = 9°59'58''$ a $\psi = -2''$.
30° — 60° „ „ $\alpha = 60°$, $\varphi = 19°59'40''$ „ $\psi = -20''$.
60° — 90° „ „ $\alpha = 90°$, $\varphi = 29°57'25''$ „ $\psi = -2'35''$.
90° — 120° „ „ $\alpha = 120°$, $\varphi = 39°48'39''$ „ $\psi = -11'21''$.

Úloha 21.

Řešení zaslal p. *Vlad. Živanský*, stud. gymn. v Brně.

Buď O počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic pravoúhlých, OA osou úseček. Půlící bod úsečky MH označme N, průměty bodů M, N, H na OA označme M', N', H'; $OA = OB = r$, $\sphericalangle AON = \varphi$.

Buď $\psi = \varphi - \frac{\alpha}{3}$ chyba při dané trisekci úhlu α vzniklá. Pro ty α, pro které ψ nabude extremních hodnot, jest první derivace ψ dle α rovna nulle. (Máme na zřeteli pouze interval pro α od 0^0 do 90^0, pro $\alpha = 0^0$ i pro $\alpha = 90^0$ jest $\psi = 0$.) Označíme-li první derivaci ψ dle α dle ustáleného zvyku ψ', máme tuto podmínku

$$\psi' = \varphi' - \frac{1}{3} = 0.$$

Avšak

$$tg\,\varphi = \frac{\overline{NN'}}{\overline{ON'}},\quad \varphi = arctg\,\frac{\overline{NN'}}{\overline{ON'}};$$

a tedy

$$\varphi' = \frac{\overline{ON'}\,.\,(\overline{NN'})' - \overline{NN'}\,.\,(\overline{ON'})'}{(\overline{ON'})^2 + (\overline{NN'})^2} = \frac{1}{3}.$$

Dostáváme tudíž pro extremní hodnoty podmínku

$$\overline{ON'}\,[\overline{ON'} - 3\,(\overline{NN'})'] + \overline{NN'}\,[\overline{NN'} + 3\,(\overline{ON'})'] = 0. \qquad (A)$$

Dále jest

$$\overline{NN'} = \tfrac{1}{2}\,(\overline{MM'} + \overline{HH'}),\quad \overline{ON'} = \tfrac{1}{2}\,(\overline{OM'} + \overline{OH'});$$
$$\overline{MM'} = \tfrac{1}{2}\,r\,sin\,\alpha,$$
$$\overline{HH'} = 2r\,sin\,15^0\,sin\,\alpha\,sin\,(\alpha + 15^0),$$
$$\overline{OM'} = \overline{OD} + \overline{DM'} = r\,cos\,\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\,r\,sin\,\alpha,$$
$$\overline{OH'} = \overline{OA} + \overline{AH'} = r + 2r\,sin\,15^0\,sin\,\alpha\,cos\,(\alpha + 15^0).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (A), obdržíme rovnici

$$\begin{aligned}&[(-10 + 6\sqrt{3}) + (-8 + 4\sqrt{3})\,sin\,\alpha + (-2 + 2\sqrt{3})\,sin^3\,\alpha]\\ &+ [(-10 + 6\sqrt{3}) + (-8 + 4\sqrt{3})\,sin\,\alpha\\ &+ (2 - 2\sqrt{3})\,sin^2\,\alpha]\,cos\,\alpha = 0.\end{aligned}$$

Každá z hranatých závorek jest dělitelna výrazem $1 + \sin\alpha$, odstraníme-li tento bezvýznamný pro nás činitel, dostaneme, zavedeme-li ještě poloviční úhly, zkrátivše $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, tuto rovnici

$$(-7 + 5\sqrt{3})\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1 - \sqrt{3})$$
$$+ \cos^2\frac{\alpha}{2}(-5 + 3\sqrt{3}) = 0,$$

aneb

$$13\,tg^2\frac{\alpha}{2} - 2\,tg\frac{\alpha}{2}(4 + \sqrt{3}) + (5 - 2\sqrt{3}) = 0,$$

z čehož

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{4 + \sqrt{3} \pm \sqrt{-46 + 34\sqrt{3}}}{13}.$$

Jest tedy buď $tg\frac{\alpha_1}{2} = 0{\cdot}164754$, $\alpha_1 = 18^0\,42'\,41''$,

aneb $tg\frac{\alpha_2}{2} = 0{\cdot}717100$, $\alpha_2 = 71^0\,17'\,19''$.

Pro tyto úhly jest chyba ψ maximální. Pro α_1 jest $\varphi = 6^0\,6'\,2''$, pro α_2 jest $\varphi = 23^0\,53'\,58''$. V případě prvním jest $\psi = -8'\,12''$, v druhém $\psi = 8'\,12''$.

Jest tedy v intervalu $0^0 - 90^0$ absolutní hodnota největší možné chyby vzniklé udanou trisekcí $8'\,12''$.

Úloha 22.

V rovině buďtež dány tři body svými pravoúhlými souřadnicemi $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Pro jaká čísla p_1, p_2, p_3 závisí výraz

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 + (p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2$$

pouze na délkách $A_1A_2 = c$, $A_2A_3 = a$, $A_3A_1 = b$? Dokažte pak z okolnosti, že výraz daný jest kladný anebo rovný nulle, že $a + b \geqq c$.

r.

Řešení zaslal p. *Boh. Kladivo*, stud. gymn. v Brně.

Aby výraz

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 + (p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2 \qquad (1)$$

závisel pouze na délkách a, b, c, pro něž, jak známo, platí

$$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad b = \ldots, \qquad (2)$$

k tomu jest nutno a stačí, aby čísla p_1, p_2, p_3 mohla býti tak stanovena, by splněno bylo identicky

$$\begin{aligned}(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 &+ (p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2 \\ = P_3 & [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \\ + P_1 & [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] \\ + P_2 & [(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2];\end{aligned}$$

neboť, jak snadno nahlédnouti, jest každý jiný vztah mezi (1) a výrazy (2) nemožný. Při tom jsou P_1, P_2, P_3 tři neurčená dosud čísla.

Umocněním a srovnáním součinitelů na obou stranách dostaneme tyto vztahy

$$\begin{aligned} p_1^2 &= P_2 + P_3, & p_2^2 &= P_3 + P_1, & p_3^2 &= P_1 + P_2, \\ p_1p_2 &= -P_3, & p_2p_3 &= -P_1, & p_3p_1 &= -P_2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Sčítáním první rovnice se čtvrtou a šestou obdržíme

$$p_1(p_1 + p_2 + p_3) = 0;$$

podobně dostáváme

$$p_2(p_1 + p_2 + p_3) = 0, \quad p_3(p_1 + p_2 + p_3) = 0.$$

Aby tyto tři vztahy byly současně splněny, k tomu jest nutno, aby $p_1 + p_2 + p_3 = 0$. Jestliže však tento vztah jest splněn, a učiníme-li v (3) $p_3 = -p_1 - p_2$, dostaneme místo 6 vztahů pro P_1, P_2, P_3 tři podstatně různé vztahy pro P_1, P_2, P_3, jimiž tato čísla jsou stanovena. Jest tudíž podmínka $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ postačitelná a jest za této podmínky tato rovnost platna

$$\begin{aligned}(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)^2 &+ (p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2 \\ = - p_2p_3a^2 &- p_3p_1b^2 - p_1p_2c^2.\end{aligned}$$

Jelikož levá strana právě napsané rovnice jest vždy kladná aneb rovná nulle, jest i pravá strana kladná nebo nulla; t. j.

$$p_2p_3a^2 + p_3p_1b^2 + p_1p_2c^2 \leqq 0,$$

anebo vzhledem ku podmínce $p_1 + p_2 + p_3 = 0$

$$(p_1 + p_2)(p_2a^2 + p_1b^2) \geqq p_1p_2c^2.$$

Položme p_1 a p_2 rovny dvěma kladným číslům a úměrným délkám a, b; $p_1 = \lambda a$, $p_2 = \lambda b$. Pak dostaneme dosazením a krácením kladným číslem $\lambda^2 ab$

$$(a+b)^2 \geqq c^2,$$

z čehož

$$a+b \geqq c. \tag{4}$$

Kdybychom byli položili $p_1 = \lambda_1 a$, $p_2 = -\lambda_2 b$, dostali bychom

$$|a-b| \leqq c. \tag{5}$$

Znaménko rovnosti jenom tenkráte jest v těchto vztazích (4), (5) přípustno, když body A_1, A_2, A_3 jsou v jedné přímce. Aby však výraz (1) byl rovný nulle, k tomu jest při reálných $p_1, p_2, p_3, x_1, y_1, \ldots$ nutno a postačitelno, aby

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0,$$
$$p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 = 0,$$

t. j., je-li bod A_3 na přímce procházející body A_1, A_2, jsou souřadnice bodu A_3 stanoveny těmito rovnicemi

$$x_3 = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2},$$
$$y_3 = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2}{p_1 + p_2}.$$

Úloha 23.

*Jest dán kruh (ω, r) *) a v jeho rovině pevný bod O. Polára bodu M zvoleného na průměru kruhu (ω, r) ku $O\omega$ kolmém nechť protne přímku OM v bodu M'. Nalézti jest rovnici geometrického místa bodu M', je-li O počátkem a $O\omega$ osou X pravoúhlé soustavy souřadnic.*

Řed. *V. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *Rud. Burša*, stud. gymn. v Kroměříži.

Střed dané kružnice nechť má souřadnice (a, o), rovnice pak oné kružnice jest:

$$K \equiv (x-a)^2 + y^2 = r^2.$$

Bod M má souřadnice (a, y_0), při čemž y_0 jest hodnota libovolná.

---

*) To jest kruh o středu ω a poloměru r.

Polára k pólu M má rovnici:

$$P \equiv y = \frac{r^2}{y_0}$$

a přímka jdoucí bodem M a počátkem

$$P \equiv y = \frac{y_0}{a} x;$$

vyloučením y_0 z rovnic přímek P a P_0, kteréžto vyloučení provedeme snadno pouhým znásobením těch rovnic, obdržíme rovnici geom. místa

$$y^2 = \frac{r^2}{a} x.$$

Geometrické místo jest tedy parabola, jejížto osa splývá s přímkou $O\omega$, tečna vrcholová s kolmicí na tuto přímku v bodě O a která prochází koncovými body průměru kruhu (ω, r) kolmého ku $O\omega$.

Úloha 24.

Jest dán kruh (O, b) a v jeho průměru X dva souměrně sdružené body A, B dle středu O. Na průměru Y ku X kolmém budiž zvolen bod M a jeho polára vzhledem ke kruhu (O, b) nechť Y protne v bodu M'. Nalézti jest v pravoúhlé soustavě souřadnic $O(X, Y)$ rovnici geom. místa bodu M', v němž se AM a BM_1 (nebo AM_1 a BM) protínají.

Řed. *V. Jeřábek.*

Řešení zaslal p. *J. Hraše,* stud. gymn. na Malé straně.

Označme oba dané, dle O souměrně sdružené body: $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$. Souřadnice bodu M jsou $(0, y_0)$, kde y_0 proměnné. Pořadnice bodu M_1, jsouc zároveň úsekem poláry na ose Y-ové, jest rovna $\frac{b^2}{y_0}$; má tedy přímka AM rovnici

$$x \cdot y_0 + ay = a \cdot y_0$$

a přímka BM_1

$$-b^2 x + ay \cdot y_0 = ab^2.$$

Vyloučením proměnného y_0 z obou těchto rovnic nabudeme rovnice hledaného geom. místa — neboť průsek přímek AM a BM_1

svými souřadnicemi x, y oběma rovnicím vyhovuje. Má pak geom. místo rovnici

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a jest ellipsou dané kružnici buď opsanou nebo vepsanou dle toho, leží-li body A, B vně či vnitř kružnice Pro případ $OA = b$, splývá hledané geom. místo s danou kružnicí. Poloha i délka os ellipsy jest z rovnice její patrna.

Úloha 25.

Dokažte, že kterémukoli polárnímu) trojúhelníku paraboly opsaná kružnice má střed svůj na ředitelce.*

Dr. *Marian Haas.*

Řešení zaslal p. *V. Lenz*, stud. reálky v Karlíně.

Budiž rovnice paraboly $y^2 = 2px$ a souřadnice vrcholů polárního trojúhelníka buďtež $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$. Rovnice poláry k bodu A_1 jest

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Na této poláře leží body A_2, A_3, i jest tedy rovnice její splněna, dosadíme-li za x, y souřadnice bodu A_2; dostaneme tak vztah

$$y_1y_2 = p(x_1 + x_2) \tag{1}$$

a cyklickou záměnou plynou vztahy další

$$y_2y_3 = p(x_2 + x_3), \tag{2}$$

$$y_3y_1 = p(x_3 + x_1). \tag{3}$$

Rovnice symmetrály strany A_1A_2 jest

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

aneb

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

Avšak z (2) a (3) plyne odčítáním

$$(y_1 - y_2) = \frac{p}{y_3}(x_1 - x_2).$$

*) Polárním se nazývá onen trojúhelník, jehož každá strana je polárou protějšího vrcholu vzhledem na danou kuželosečku.

Dosadíme-li za $y_1 - y_2$ do rovnice symmetrály a krátíme $x_1 - x_2$, dostaneme jakožto rovnici symmetrály

$$2x + \frac{p}{y_3} y - x_1 - x_2 - (y_1 + y_2) \frac{p}{y_3} = 0,$$

anebo se zřetelem ku (1)

$$2xy_3 + py - \frac{1}{p} y_1 y_2 y_3 - p(y_1 + y_2) = 0. \qquad (4)$$

Podobně obdržíme jako rovnici symmetrály úsečky A_2A_3

$$2xy_1 + py - \frac{1}{p} y_1 y_2 y_3 - p(y_2 + y_3) = 0. \qquad (5)$$

Průsečík těchto dvou symmetrál jest střed opsaného kruhu trojúhelníku $A_1A_2A_3$; vypočteme-li úsečku tohoto průsečíku (odečtením rovnice (4) a (5), dostaneme, že

$$x = -\frac{p}{2};$$

t. j. střed opsaného kruhu trojúhelníku $A_1A_2A_3$ nachází se na ředitelce, jakož bylo dokázati.

Úloha 26.

Řešení zaslal p. *Ant. Schindler*, stud. reálky v Plzni.

Souřadnice bodu P jsou $\left(\frac{x}{1+k}, \frac{y}{1+k}\right)$, bodu Q pak $\left(\frac{xa^2}{a^2+kb^2}, \frac{ya^2}{a^2+kb^2}\right)$; má tudíž bod R souřadnice

$$\xi = \frac{xa^2}{a^2+kb^2}, \qquad \eta = \frac{y}{1+k}. \qquad (1)$$

Leží tedy bod R na ellipse E_1, jejížto rovnice jest $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$. Neboť dosadíme-li do této rovnice nalezené právě hodnoty za (ξ, η), dostaneme pro (x, y) právě rovnici ellipsy E, na které bod (x, y) dle předpokladu se nachází. Normála k ellipse E_1 bodem (ξ, η) má rovnici

$$Y - \eta = \frac{a^2\eta}{b^2\xi} (X - \xi).$$

Že na této normále jest bod $M(x, y)$, plyne dosazením (x, y) za (X, Y) a hodnot pro (ξ, η) v (1). Dostáváme tak rovnici identickou.

Ellipsa E jest kruhem, jestliže

$$a^2\left(1 + \frac{kb^2}{a^2}\right)^2 = b^2(1 + k)^2,$$

t. j. jestliže

$$k = \pm \frac{a}{b}.$$

Rovnice kruhu, ve který ellipsa za této podmínky přechází, jest

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2.$$

Konstrukce jedné normály z kteréhokoliv bodu M na této kružnici provésti lze dle právě dokázaného takto. Přímku OM rozdělíme jednou v poměru $\pm \frac{a}{b}$, jednou v poměru $\pm \frac{b}{a}$, dělícími body vedeme rovnoběžky jednak s osou X, jednak s osou Y. Kde se tyto dvě rovnoběžky protnou, jest druhý bod (pata) normály.

Úloha 27.

Dokázati jest, že normály ellipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sestrojené v průsecích ellipsy s přímkou rovnoběžnou s průměrem $y = \frac{b}{a}x$ protínají se na přímce $y = \frac{a}{b}x$ a naopak, že čtyři paty normál vedených z některého bodu této přímky k ellipse nacházejí se na dvou přímkách rovnoběžných s průměrem $y = \frac{b}{a}x$.

r.

Řešení zaslal p. *J. Svoboda*, stud. reálky v Jevíčku.

Přímka rovnoběžná s průměrem $y = \frac{b}{a}x$ má rovnici

$$y = \frac{b}{a}x + k.$$

Souřadnice průsečíků této přímky s ellipsou jsou

$$x_{1,2} = \frac{-ak \pm a\sqrt{\Delta}}{2b}, \qquad y_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \Delta = 2b^2 - k^2.$$

Rovnice pak normály v bodě ellipsy (x_1, y_1) k ellipse sestrojené je

$$a^2 x y_1 - b^2 y x_1 = (a^2 - b^2)\, x_1 y_1.$$

Dosadíme-li svrchu uvedené hodnoty a upravíme, dostaneme rovnici tuto ve tvaru

$$k\left[ax + by - \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - k^2)}{kb}\right] + \sqrt{\Delta}\,(ax - by) = 0.$$

Rovnici normály v (x_2, y_2) odvodíme z této, změníme-li znaménko u $\sqrt{\Delta}$:

$$k\left[ax + by - \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - k^2)}{kb}\right] - \sqrt{\Delta}\,(ax - by) = 0.$$

Z rovnic těchto jest přímo patrno, že průsek normál v bodech (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest také průsekem přímek o rovnicích

$$ax + by - \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - k^2)}{kb} = 0, \quad ax - by = 0,$$

a že se tedy vskutku nachází na průměru $y = \frac{a}{b}\, x$, jakož bylo dokázati.

Že všecky čtyři paty normál z jednoho bodu M tohoto průměru vedené leží na dvou přímkách rovnoběžných s $ay - bx = 0$, plyne snadno takto. Mějž jedna normála z bodu M patu v (x_1, y_1), vedeme-li tímto bodem rovnoběžku s přímkou $ay - bx = 0$, protne tato ellipsu v bodě (x_2, y_2), jehož normála dle právě dokázané věty prochází také bodem M. Leží tedy dvě paty normál (x_1, y_1) (x_2, y_2) na přímce rovnoběžné s průměrem $ay - bx = 0$. Podobně se dokáže o patách druhých dvou normál, že leží rovněž na takové přímce.

Poznámka. Důsledek věty dokázané jest známá věta, že konstrukci normál k ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ z jednoho bodu na průměru $by - ax = o$ lze provésti pomocí pravítka a kružítka, neboť vyhledání pak těchto normál se převádí větou dokázanou na řešení rovnic kvadratických.

Úloha 28.

Vyšetři, zdali, kdy a kolikráte za rok vychází slunce v místech A a B, jichž délky jsou d_1, d_2 a šířky φ_1, φ_2, současně.

K. Čupr.

Řešení zaslal p. *Lad. Štětka*, stud. gymn. na Malé straně.

Obě místa, ve kterých slunce současně vychází, leží současně na světelné mezi, kterážto jest, zanedbáváme-li rozměry země proti vzdálenosti země od slunce, největším kruhem na zeměkouli. Označme deklinaci slunce δ, i bude ostrý úhel sevřený světelnou mezí a rovníkem $90 \mp \delta$; označme dále průseky meridiánů obou míst $A(d_1, \varphi_1)$, $B(d_2, \varphi_2)$ s rovníkem A', B'; průsek světelné meze s rovníkem budiž C, střed zeměkoule O. Ze sférických trojúhelníků pravoúhlých plyne

$$sin\ A'\hat{O}C = \pm\ tg\ \varphi_1\ tg\ \delta \tag{1}$$

$$sin\ B'\hat{O}C = \pm\ tg\ \varphi_2\ tg\ \delta. \tag{2}$$

Dosadíme-li za $\sphericalangle B'OC = d_2 - d_1 + \sphericalangle A'OC$, dostaneme po krátké úpravě dělením rovnice (2) rovnicí (1)

$$cotg\ A'\hat{O}C = \frac{tg\ \varphi_2 - tg\ \varphi_1\ cos\ (d_2 - d_1)}{tg\ \varphi_1\ sin\ (d_2 - d_1)}, \tag{3}$$

odkudž

$$sin\ A'\hat{O}C = \frac{tg\ \varphi_1\ sin\ (d_2 - d_1)}{\sqrt{tg^2\ \varphi_1 - 2\ tg\ \varphi_1\ tg\ \varphi_2\ cos\ (d_2 - d_1) + tg^2\ \varphi_2}};$$

dosazením tohoto výrazu do rovnice (1) dostaneme konečně

$$tg\ \delta = \pm \frac{sin\ (d_2 - d_1)}{\sqrt{tg^2\ \varphi_1 - 2\ tg\ \varphi_1\ tg\ \varphi_2\ cos\ (d_2 - d_1) + tg^2\ \varphi_2}}. \tag{4}$$

Znaménko na pravé straně možno určiti jednoznačně; leží-li jižnější místo východněji nežli severnější, jest deklinace slunce pro dobu, ve které slunce v obou místech současně vychází, severní a $tg\ \delta$ kladná; v případě opačném jest deklinace jižní ($tg\ \delta$ záporná).

Slunce tedy vychází v obou místech současně, má-li deklinaci stanovenou rovnicí (4) a znaménka právě určeného, což jest nejvýše dvakráte do roka.

Ježto $\delta \leqq \varepsilon$, kde ε jest odchylka ekliptiky od rovníku, jest také nutně

$$\frac{\sin^2 (d_2 - d_1)}{tg^2 \varphi_1 - 2\, tg\, \varphi_1\, tg\, \varphi_2 \cos (d_2 - d_1) + tg^2 \varphi_2} \leqq tg^2 \varepsilon.$$

Není-li tato podmínka pro souřadnice (φ_1, d_1), (φ_2, d_2) splněna, nemůže v místech A, B slunce vůbec současně vycházeti. Je-li podmínka splněna se znaménkem nerovnosti, vychází slunce za rok dvakráte v těch místech současně, je-li splněna se znaménkem rovnosti, jedenkráte, pakliže zároveň v těchto případech výraz

$$\begin{aligned} & tg^2 \varphi_1 - 2\, tg\, \varphi_1\, tg\, \varphi_2 \cos (d_2 - d_1) + tg^2 \varphi_2 \\ = & (tg\, \varphi_1 - tg\, \varphi_2)^2 + 2\, tg\, \varphi_1\, tg\, \varphi_2 (1 - \cos (d_2 - d_1)) \\ = & (tg\, \varphi_1 - tg\, \varphi_2)^2 + 4\, tg\, \varphi_1\, tg\, \varphi_2 \sin^2 \tfrac{1}{2} (d_2 - d_1) \end{aligned}$$

jest kladný. Tento výraz jest kladný ku př., jsou-li obě místa buď na severní anebo obě místa na jižní polokouli.

Úloha 29.

Stanovte součet řady

$$1 + 1 \,.\, 1! + 2 \,.\, 2! + \ldots n \,.\, n!$$

Ant. Lochmann.

Řešení zaslal p. *Ant. Šprinc,* stud. gymn. v Olomouci.

Dosazujme do rovnice identické

$$(n + 1)! - n! = n!\,(n + 1 - 1) = n \,.\, n!$$

za n 1, 2, 3 ....

$$\begin{aligned} 1 &= 1! \\ 1 \,.\, 1! &= 2! - 1! \\ 2 \,.\, 2! &= 3! - 2! \\ &\vdots \\ n \,.\, n! &= (n + 1)! - n! \end{aligned}$$

Sečtením dostaneme ihned

$$1 \,. + 1 \,.\, 1! + 2 \,.\, 2! + 3 \,.\, 3! + \ldots\ldots + n \,.\, n! = (n + 1)!$$

Úloha 30.

Ustanoviti jest součet

$$\binom{1}{r}+\binom{2}{r}+\binom{3}{r}+\ldots\ldots+\binom{n}{r}.$$

Ant. Lochmann.

Řešení zaslal p. *Jos. Křížek*, stud. reálky v Kutné Hoře.

Do známého vzorce

$$\binom{k}{r}+\binom{k}{r+1}=\binom{k+1}{r+1}$$

položme postupně za k hodnoty 1, 2, 3, ..., n; tak obdržíme rovnice

$$\binom{1}{r}+\binom{1}{r+1}=\binom{2}{r+1},$$
$$\binom{2}{r}+\binom{2}{r+1}=\binom{3}{r+1},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}.$$

Součet všech těchto rovnic jest

$$\binom{1}{r}+\binom{2}{r}+\binom{3}{r}+\ldots+\binom{n}{r}+\binom{1}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}.$$

Ježto pro jakékoliv $r > 0$ jest

$$\binom{1}{r+1}=0,$$

obdržíme pro součet naší řady hodnotu

$$S=\binom{n+1}{r+1}.$$

Úloha 31.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2-yz=a,\; y^2-xz=b,\; z^2-xy=c.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslala slč. *K. Lochmannová*, stud. na gymn. „Minervy" v Praze.

Označme rovnice dané po řadě (1), (2), (3) a utvořme z těchto rovnic rovnice určené operacemi, jež naznačeny jsou těmito symboly $(1)^2 - (2) . (3)$, $(2)^2 - (3) . (1)$, $(3)^2 - (1) . (2)$; dostaneme pak rovnice následující:

$$x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = a^2 - bc$$
$$y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = b^2 - ac$$
$$z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = c^2 - ab.$$

Z těchto 3 rovnic obdržíme úměru

$$x : y : z = (a^2 - bc) : (b^2 - ac) : (c^2 - ab),$$

z níž

$$y = \frac{b^2 - ac}{a^2 - bc} . x, \qquad z = \frac{c^2 - ab}{a^2 - bc} . x.$$

Dosaďme tyto výsledky do rovnice (1), dostaneme

$$x = \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}},$$
$$y = \frac{b^2 - ac}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}},$$
$$z = \frac{c^2 - ab}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}.$$

U odmocnin jest voliti současně buď kladné, buď záporné znaménko.

Jiné řešení zaslal p. *J. Pilnáček*, studující reálky na Kladně.

Jednoduchým způsobem zjednáváme si z rovnic daných tyto rovnice

(1) $$(x - y)(x + y + z) = a - b,$$

(2) $$(y - z)(x + y + z) = b - c,$$

(3) $$(z - x)(x + y + z) = c - a,$$

(4) $$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(a + b + c).$$

Položíme-li

(5) $$x + y + z = \sigma,$$

máme ihned

(6) $$x - y = \frac{a - b}{\sigma}, \quad y - z = \frac{b - c}{\sigma}, \quad z - x = \frac{c - a}{\sigma}$$

a z rovnice (4)

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a + b + c}},$$

z (5) a (6)

$$x = \frac{\sigma}{3} + \frac{1}{3\sigma}(2a - b - c), \text{ a t. d.}$$

Úloha 32.

Dokázati, že levou stranu rovnice

$$b_0x^3 + 3b_1x^2 + 3b_2x + b_3 = 0$$

lze vždy vyjádřiti ve tvaru

$$a_1(x + \lambda_1)^3 + a_2(x + \lambda_2)^3.$$

Řešiti pomocí toho výsledku rovnice:

$$x^3 + x^2 + 11x - 13 = 0,$$
$$2x^3 - 39x^2 + 66x - 18 = 0.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslala slč. *K. Lochmannová*, stud. na gymn. „Minervy" v Praze.

Veličiny a_1, a_2, λ_1, λ_2 obdržíme z násl. 4 rovnic

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b_0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 &= b_1 \\ a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2 &= b_2 \\ a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_2^3 &= b_3 \end{aligned}$$

Eliminuje-li vždy ze dvou po sobě jdoucích rovnic této skupiny a_2, nabudeme

$$\begin{aligned} a_1(\lambda_1 - \lambda_2) &= -b_0\lambda_2 + b_1 \\ a_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) &= -b_1\lambda_2 + b_2 \\ a_1\lambda_1^2(\lambda_1 - \lambda_2) &= -b_2\lambda_2 + b_3 \end{aligned}$$

Konečně dělíme-li každou z těchto rovnic předcházející, dostaneme

$$\lambda_1 = \frac{-b_1\lambda_2 + b_2}{-b_0\lambda_2 + b_1}, \qquad \lambda_1 = \frac{-b_2\lambda_2 + b_3}{-b_1\lambda_2 + b_2}$$

$$\lambda_2^2[b_1^2 - b_0b_2] - \lambda_2[b_1b_2 - b_0b_3] + [b_2^2 - b_1b_3] = 0. \qquad (a)$$

Z této rovnice můžeme vypočítati vždy λ_2, z rovnic pak předcházejících λ_1, a_1, a_2, vyjma v tom případě, že by první dva koefficienty v poslední rovnici byly rovny nulle:

$$b_1^2 - b_0 b_2 = 0,\ b_1 b_2 - b_0 b_3 = 0;$$

avšak z těchto rovnic plyne, že i $b_2^2 - b_1 b_3 = 0$; v tomto případě jest rovnice pro λ_2 identicky splněna a tudíž $a_2 = 0$. Můžeme tedy vždy danou rovnici psáti ve tvaru žádaném.

V příkladech číselných dostáváme postupně tyto rovnice a výsledky:

1. $$x^3 + x^2 + 11x - 13 = 0,$$
$$3x^2 + 3x^2 + 33x - 39 = 0,$$
$$b_0 = 3,\ b_1 = 1,\ b_2 = 11,\ b_3 = -39,$$
$$\lambda_2 = -5,\ \lambda_1 = 1,\ a_1 = \tfrac{8}{3},\ a_2 = \tfrac{1}{3},$$
$$\tfrac{8}{3}(x+1)^3 + \tfrac{1}{3}(x-5)^3 = 0,$$
$$(2x+2)^3 + (x-5)^3 = 0,$$
$$(2x + 2 + x - 5)\left[(2x+2)^2 - (2x+2)(x-5) + (x-5)^2\right] = 0,$$
$$x_1 = 1,\ x_{2,\,3} = -1 \pm 2i\sqrt{3},$$

2. $2x^3 - 39x^2 + 66x - 18 = 0;\ b_0 = 2,\ b_1 = -13,$
$$b_2 = 22,\quad b_3 = -18,$$
$$\lambda_2 = (-1-i),\ \lambda_1 = (-1+i),\ a_1 = \tfrac{1}{2}(2+11i),\ a_2 = \tfrac{1}{2}(2-11i).$$

Dosadivše $(2 \pm 11i) = (2 \pm i)^3$, obdržíme tvar tento:

$$\tfrac{1}{2}(2+i)^3[x-1+i]^3 + \tfrac{1}{2}(2-i)^3[x-1-i]^3 = 0,$$
$$[(2+i)(x-1+i)]^3 + [(2-i)(x-1-i)]^3 = 0,$$
$$(4x-6)\left[(2+i)^2(x-1+i)^2 - (2+i)(2-i)(x-1+i)\right.$$
$$\left.(x-1-i) + (2-i)^2(x-1-i)^2\right] = 0,$$
$$x_1 = \tfrac{3}{2},\quad x_{2,\,3} = 9 \pm 5\sqrt{3}.$$

Úloha 33.

Kdy jest možno rovnici pátého stupně

$$b_0x^5 + 5b_1x^4 + 10b_2x^3 + 10b_3x^2 + 5b_4x + b_5 = 0$$

vyjádřiti ve tvaru

$$a_1(x+\lambda_1)^5 + a_2(x+\lambda_2)^5 = 0.$$

Řešiti rovnici toho druhu

$$x^5 - 25x^4 + 170x^3 - 370x + 5x + 475 = 0.$$

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Vl. Živanský*, stud. gymn. v Brně.

Porovnáním obou výrazů dané úlohy dostáváme snadno těchto šest rovnic

$$a_1 + a_2 = b_0, \tag{1}$$
$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = b_1, \tag{2}$$
$$a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2 = b_2, \tag{3}$$
$$a_1\lambda_1^3 + a_2\lambda_2^3 = b_3, \tag{4}$$
$$a_1\lambda_1^4 + a_2\lambda_2^4 = b_4, \tag{5}$$
$$a_1\lambda_1^5 + a_2\lambda_2^5 = b_5. \tag{6}$$

Z prvních 4 rovnic můžeme vypočísti právě tak jako v úloze předcházející a_1, a_2, λ_1, λ_2; dosadíme-li pak do rovnic (5) a (6) vypočtené výrazy, obdržíme dvě podmínky mezi koefficienty $b_0, b_1, b_2 \ldots$, které nutně musí býti splněny, má-li býti možno rovnici 5. stupně na uvedený tvar převésti.

Avšak z rovnic (1)—(4) plyne dle rovnice (a) v předešlé úloze vztah

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{b_2^2 - b_1b_3}{b_1^2 - b_0b_2}.$$

Z rovnic pak (2)—(5), resp z rovnic (3)—(6) plynou pak tyto výrazy pro $\lambda_1\lambda_2$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{b_3^2 - b_2b_4}{b_2^2 - b_1b_3}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{b_4^2 - b_3b_5}{b_3^2 - b_2b_4}.$$

Porovnáním těchto výrazů máme ihned zmíněné dva vztahy

$$(b_2^2 - b_1b_3) : (b_1^2 - b_0b_2) = (b_3^2 - b_2b_4) : (b_2^2 - b_1b_3)$$
$$= (b_4^2 - b_3b_5) : (b_3^2 - b_2b_4);$$

t. j. čísla $b_1^2 - b_0b_2$, $b_2^2 - b_1b_3$, $b_3^2 - b_2b_4$, $b_4^2 - b_3b_5$, tvoří řadu geometrickou, je-li možno rovnici pátého stupně na tvar

$$a_1(x + \lambda_1)^5 + a_2(x + \lambda_2)^5$$

převésti.

V příkladě číselném jest

$$b_0 = 1,\ b_1 = -5,\ b_2 = 17,\ b_3 = -37,\ b_4 = 1,\ b_5 = 475$$

a čísla $b_1^2 - b_0b_2$, $b_2^2 - b_1b_3 \ldots$ jsou

$$8,\ 104 = 8\,.\,13,\ 1352 = 8\,.\,13^2,\ 17576 = 8\,.\,13^3$$

a splňuje tudíž rovnice předložená skutečně obě podmínky.

Řešením rovnic (1)—(4) dostáváme stejně jako v úloze předcházející

$$\lambda_1 = -3 + 2i, \qquad \lambda_2 = -3 - 2i;$$
$$a_1 = \frac{1+i}{2}, \qquad a_2 = \frac{1-i}{2}$$

a přechází tak daná rovnice ve tvar

$$(1+i)(x-3+2i)^5 + (1-i)(x-3-2i)^5 = 0,$$

z čehož řešením

$$\frac{x-3+2i}{x-3-2i} = \sqrt[5]{i} = \cos\frac{(4n+1)\pi}{10} + i\sin\frac{(4n+1)\pi}{10};$$
$$n = 0, 1, 2, 3, 4;$$

anebo po jednoduché úpravě

$$x = 3 + 2\cot\frac{(4n+1)\pi}{20}; \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Číselné hodnoty kořenů jsou

3·3168, 5, 15·6275, 1·9809, — 0·9252.

Úloha 34.

Nalézti trojúhelníky racionální (t. j. trojúhelníky, jichž strany i plocha jsou vyjádřeny racionálními čísly), jichž strany tvoří řadu arithmetickou.

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Otakar Hrubíšek*, stud. gymn. v Kyjově.

Omeziti se můžeme bez ujmy obecnosti řešení na trojúhelníky, jichž strany jsou vyjádřeny celými čísly bez společné míry. Buďtež strany trojúhelníka $b-d$, b, $b+d$. Pak jest plocha dána výrazem

$$P = \tfrac{1}{4} b \sqrt{3(b^2 - 4d^2)}.$$

Má-li číslo odpovídající ploše býti racionálním, musí býti $3(b^2 - 4d^2)$ úplný čtverec celého čísla. Toto celé číslo jest však nutně dělitelno 3 a lze tedy psáti

$$3(b^2 - 4d^2) = (3m)^2 \quad \text{aneb} \quad b^2 - 4d^2 = 3m^2.$$

Levá strana této rovnice dá se rozložiti ve dva činitele $b + 2d$, $b - 2d$. Společná míra těchto činitelů jest také společnou měrou jich součtu, resp. rozdílu, jež jsou $2b$, $4d$. Jelikož však b, d nemají společné míry, mají $b + 2d$ a $b - 2d$ za nejvyšší společnou míru buďto 4, anebo 2, anebo nemají vůbec společné míry.

1. Nechť $b + 2d$ a $b - 2d$ nemají společné míry. Pak položíme-li $m = x \,.\, y$, kde celá čísla x a y nemají společné míry, můžeme zvoliti (pro d jsou přípustna čísla kladná i záporná menší co do absolutní hodnoty nežli $\frac{b}{2}$)

$$b + 2d = 3x^2,\ b - 2d = y^2.$$

Z čehož

$$3x^2 + y^2 = 2b,\ 3x^2 - y^2 = 4d.$$

Avšak nelze čísla x, y tak zvoliti, aby $3x^2 - y^2$ bylo dělitelno 4; neboť čtverec lichého čísla jest tvaru $8p + 1$, a jsou-li x i y lichá, jest $3x^2 - y^2$ tvaru $8q + 2$ a tedy dělitelno pouze 2 (a ne 4). Jestliže pak jedno z čísel x, y jest sudé, druhé liché, jest i $3x^2 - y^2$ liché. Jest tedy tento případ nemožný.

2. Jestliže připustíme pro $b + 2d$ a $b - 2d$ společnou míru 2, zvolíme $m = 2 \,.\, x \,.\, y$ a položíme

$$b + 2d = 6x^2,\ b - 2d = 2y^2,$$

z čehož

$$b = 3x^2 + y^2,\ 2d = 3x^2 - y^2.$$

Aby $3x^2 - y^2$ bylo dělitelno 2, k tomu jest nutno, aby čísla nesoudělná x a y byla lichá, při čemž y nesmí býti dělitelno 3; pak i b i d jsou nesoudělná, prvé jest sudé, druhé liché.

3. Mají-li $b + 2d$ a $b - 2d$ společnou míru 4, obdržíme, jestliže $m = 4 \,.\, x \,.\, y$,

$$b + 2d = 12x^2,\ b - 2d = 4y^2$$

a

$$b = 2\,(3x^2 + y^2),\ d = 3x^2 - y^2,$$

Poněvadž b jest sudé a tedy d liché, jest jedno z čísel x, y liché, druhé sudé; y pak opět nesmí býti dělitelno třemi.

A tak máme tento výsledek: Všecky trojúhelníky racioonální, jichž strany tvoří řadu arithmetickou bez společné míry, dostaneme, jestliže ve vzorcích

$$b = 2x^2 + y^2, \qquad d = \frac{3x^2 - y^2}{2} \qquad (1)$$

dosazujeme za x i y všecka čísla lichá nesoudělná a ve vzorcích

$$b = 2\,(3x^2 + y^2) \qquad d = 3x^2 - y^2 \qquad (2)$$

za x i y čísla různé parity (t. j. jestliže jest x sudé, jest y liché a naopak) nesoudělná. Při tom jest ještě v obou případech bráti za y čísla nedělitelná 3.

Tak ku př. učiníme-li v (1) $x = 1$, $y = 1$ dostaneme trojúhelník o stranách 3, 4, 5 a o ploše 6; učiníme-li ve (2) $x = 1$, $y = 2$, obdržíme trojúhelník o stranách 15, 14, 13, a o ploše 84.

Úloha 35.

Označme s_k součet řady nekonečné

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots .$$

Jakou hodnotu má součet této nekonečné řady

$$s_2 + s_3 + s_4 + \dots + s_n + \dots\dots ?$$

K. Rychlík.

Řešil p. *Ant. Stára*, stud. reálky v Karlíně.

Pišme řadu, její součet jest stanoviti v tomto tvaru

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\dots + \frac{1}{k^2} + \dots\dots \\ & + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots\dots + \frac{1}{k^3} + \dots\dots \\ & + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots\dots + \frac{1}{k^4} + \dots\dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{3^l} + \frac{1}{4^l} + \dots\dots + \frac{1}{k^l} + \dots\dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Jelikož tato řada jest absolutně konvergentní, můžeme členy přičítati v libovolném pořádku. Sčítejme napřed podle sloupců. I dostaneme (součet členů jednoho sloupce jest součet členů řady geometrické):

$$S = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{(k-1)\,k} + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \ldots$$

I jest patrno, že $S = 1$.

Úloha 36.

Ukažte, značí-li k jakékoliv číslo celé $\geqq 0$, že při označení užitém v úloze předešlé jest

$$\binom{k+1}{k} . s_{k+2} + \binom{k+2}{k} s_{k+3} + \binom{k+3}{k} s_{k+4} + \ldots = 1.$$

r.

Řešení zaslal p. *Boh. Kladivo,* stud. gymn. v Brně.

Užijeme-li vztahu

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

lze součet

$$\Sigma = \binom{k+1}{k} s_{k+2} + \binom{k+2}{k} s_{k+3} + \ldots .$$

psáti také ve tvaru

$$\Sigma = s_{2,k} + s_{3,k} + s_{4,k} + \ldots,$$

kde

$$s_{n,k} = \binom{k+1}{1} \frac{1}{n^{k+2}} + \binom{k+2}{2} \frac{1}{n^{k+3}} + \binom{k+3}{3} \frac{1}{n^{k+4}} + \ldots .$$

Protože $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, jest

$$s_{n,k} = \binom{k}{0} \frac{1}{n^{k+2}} + \binom{k+1}{1} \frac{1}{n^{k+3}} + \binom{k+2}{2} \frac{1}{n^{k+4}} + \ldots\ldots +$$

$$+ \binom{k}{1} \frac{1}{n^{k+2}} + \binom{k+1}{2} \frac{1}{n^{k+3}} + \binom{k+2}{3} \frac{1}{n^{k+4}} + \ldots\ldots$$

a tudíž

$$s_{n,k} = \frac{1}{n^{k+2}} + \frac{1}{n}(s_{n,k} + s_{n,k-1}),$$

aneb

$$(n-1)\, s_{n,k} - s_{n,k-1} = \frac{1}{n^{k+1}};$$

a podobně

$$(n-1)\, s_{n,k-1} - s_{n,k-2} = \frac{1}{n^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)\, s_{n,1} - s_{n,0} = \frac{1}{n^2}.$$

Násobíme-li první z těchto rovnic číslem $(n-1)^{k-1}$, druhou $(n-1)^{k-2}$, třetí $(n-1)^{k-3}$. . . . . poslední 1 a všecky rovnice pak sečteme, dostaneme

$$(n-1)^k s_{n,k} - s_{n,0} = \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}}\right) = \frac{n^k - (n-1)^k}{n^{k+1}}$$

Avšak

$$s_{n,0} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \ldots\ldots = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a tudíž po jednoduché úpravě

$$s_{n,k} = \frac{1}{(n-1)^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}.$$

Jest tedy

$$s_{2,k} + s_{3,k} + s_{4,k} + \ldots\ldots + s_{n,k} = 1 - \frac{1}{n^{k+1}},$$

a Σ vskutku, jakož bylo dokázati, rovno 1.

Úloha 37.

Dokázati jest, že, spustíme-li z bodu M ležícího na hlavní ose hyperboly kolmici MN na asymptotu, z paty N této kolmice, kolmici NP zase na hlavní osu, protne NP hyperbolu v bodě, jehož normála prochází bodem M.

Jos. Kálal.

Řešení zaslal p. *Frant. Ryšánek*, stud. gymn. v Olomouci.

Rovnice hyperboly budiž

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a souřadnice bodu M $(x_0, 0)$. Rovnice asymptoty jest

$$y - \frac{b}{a} x = 0$$

a rovnice kolmice z bodu M

$$y = \frac{a}{b}(x - x_0).$$

Průsečík obou těchto přímek jest $N(x_1, y_1)$, kde

$$x_1 = \frac{a^2 x_0}{a^2 + b^2}. \tag{1}$$

Rovnice normály v bodě (x_1, y_1) jest

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1). \ldots$$

Na této normále leží vskutku bod $(x_0, 0)$, jak bylo dokázati. Neboť dosadíme-li do této rovnice za x_1 z (1) a za $x = x_0$, $y = 0$, obdržíme identitu.

Úloha 38.

Dány jsou dvě kolmé přímky Ox, Oy. Sestrojme parabolu p, která se dotýká těchto přímek v bodech A, B.

Dokázati jest: je-li bod A pevný, jest geometrické místo ohnisek parabol p kruh nad průměrem OA; a obecněji, jsou-li body A, B na přímce procházející stále bodem M, jest geometrické místo ohnisek parabol p kruh nad průměrem OM.

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Jos. Jandásek*, stud. gymn. ve Strážnici.

Použijeme vět: Průsek dvou k sobě kolmých tečen k parabole jest na ředitelce. Spojnice dotyčných bodů dvou tečen k sobě kolmých prochází ohniskem. Prochází tedy řídící přímka bodem O a přímka AB ohniskem.

Budiž F ohnisko, r řídící přímka, A' pata kolmice s bodu A na řídící přímku spuštěné. Pak jest dle definice paraboly

$$FA = AA'$$

a dle známé věty

$$\sphericalangle FAO = \sphericalangle OAA';$$

jsou tedy trojúhelníky OAF a OAA' shodny, z čehož ihned plyne, že úhel OFA jest pravý a že geometrické místo bodu F jest kružnice nad průměrem OA.

Otáčí-li se AB kolem pevného bodu M, jest zase, poněvadž dle předcházejícího stojí OF kolmo na AB, úhel OFM pravý a tedy geometrické místo bodu F kružnice nad průměrem OM.

Úloha 39.

Dokázati jest dále: Dotýkají-li se přímky AB úlohy předešlé stále pevného kruhu o středu v počátku, jest geometrické místo ohnisek parabol p týž kruh, geometrické místo pak vrcholů parabol asteroida do toho druhu vepsaná).*

K. Rychlík.

Řešení zaslal p. *Jos. Jandásek*, stud. gymn. ve Strážnici.

Pata kolmice z ohniska na tečnu spuštěné nachází se, jak známo, na vrcholové tečně paraboly.

Nejprve jest patrno, že, poněvadž OF stojí kolmo na AB (viz řešení úlohy předešlé), jest F dotyčným bodem přímky AB tečné kruhu o středu O, tudíž leží F na téže kružnici o středu O.

Spusťme dále kolmice z F na OA, OB; jich paty C, D určují tečnu vrcholovou. Pata kolmice z F na CD spuštěné jest vrchol paraboly, označíme jej V.

Souřadnice F nechť jsou (a, b). Pak dle dokázaného, je-li r poloměr daného kruhu, jest

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Souřadnice bodů C, resp. D, jsou (a, o), (o, b); rovnice přímky CD

$$y - b = -\frac{b}{a}x.$$

---

*) Asteroida jest křivka, která při vhodné volbě soustavy souřadnic má rovnici

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Rovnice kolmice z F na CD jest

$$y - b = \frac{a}{b}(x - a).$$

Průsek těchto přímek (bod V) má tedy souřadnice

$$x = \frac{a^3}{r^3}, \qquad y = \frac{b^3}{r^3},$$

odkud ihned plyne rovnice, jíž hoví souřadnice vrcholu

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

jakožto rovnice hledaného geometrického místa vrcholů parabol.

Úloha 40.

Řešení zaslala slč. *Karla Lochmannová*, stud. „Minervy" v Praze.

Jsou-li dotyčné body kružnice k_1 a kruhů K a K' současně buď vnější aneb vnitřní, prochází jich spojnice vnějším bodem podobnosti kružnic K a K', kdežto, je-li jeden z nich vnějším bodem dotyčným, druhý vnitřním, pak jde jejich spojnice vnitřním středem podobnosti kružnic K a K'. Důkaz toho vyplývá bezprostředně ze dvou známých vět planimetrických (viz Strnadovu geom. pro gymn. str. 87):

„Dotýkají-li se 2 kružnice vně (vnitř), jest bod dotyčný jich vnitřním (vnějším) středem podobnosti."

„Třem kružnicím náležejí 4 osy podobnosti, jedna obsahuje vnější středy podobnosti, každá z 3 ostatních obsahuje dva středy vnitřní a jeden vnější."

Buďtež A, B dotyčné body kružnice k_1 s kruhy K a K'; C, D pak dotyčné body kruhu k_2 s týmiž kruhy.

Spojnice $\overline{AB}$ resp. $\overline{CD}$ nechť procházejí vnějším středem podobnosti S kružnic K, K' a buďtež M a N body, ve kterých tyto spojnice protínají ještě kruh K'. Pak, vyloučíme-li z rovnic

$$\overline{SM} \,.\, \overline{SB} = \overline{SN} \,.\, \overline{SD}, \quad \overline{SA} : \overline{SM} = \overline{SC} : \overline{SN}$$

$\overline{SM}$ (resp. $\overline{SN}$, znásobením obou rovnic), dostaneme

$$\overline{SA} \,.\, \overline{SB} = \overline{SC} \,.\, \overline{SD} = konst.;$$

t. j. S leží na chordále obou kružnic k_1, k_2.

Totéž platí i o vnitřním středu podobnosti kružnic K, K', procházejí-li $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ tímto vnitřním středem podobnosti.

Chordála kruhů k_1, k_2 prochází tedy vnějším (vnitřním) středem podobnosti kružnic K, K', procházejí-li $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ vnějším (vnitřním) středem podobnosti.

Dotýkají-li se kruhy k_1, k_2 v bodě T, jest společná tečna v tomto bodě T chordálou kružnic k_1, k_2 a prochází tudíž vnějším (vnitřním) středem podobnosti kružnic K, K'.

Ježto $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \,.\, \overline{SB} = \overline{SC} \,.\, \overline{SD} = konst.$, a tedy $\overline{ST}$ jest konstantou, leží vskutku bod P na kružnici, jejíž střed jest jeden z bodů podobnosti kružnic K, K'.

Že kruhy K, K', k mají chordálu společnou, plyne zcela jednoduše v tom případě, když kruhy K a K' se protínají, neboť podle vlastností dokázaných kruh k prochází průseky kruhů K, K'.

Jsou tedy číselné vztahy, které jsou k tomu, aby chordála pro všechny tři kruhy byla totožna, nutny, v tom případě, že kruhy se protínají, splněny; jich platnost i pro ten případ rozšířiti, že kruhy se neprotínají, jest snadno.

Správné řešení úloh v tomto ročníku obsažených zaslali pp.:

Burša Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 9. až 12., 14. až 16., 18., 23. až 26., 29., 30., 35., 37. až 40.
Doležel Václav, stud. VII. tř. I. g. v Brně, úl. 1. až 3., 9. až 18., 23. až 31, 35., 37.
Čech Břetislav, stud. VII. tř. r. v Novém Městě, úl. 1., 2., 9. až 12., 14. až 18., 23. až 26., 37.
Číhalík Emilian, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1., 2., 10., 16., 17., 23., 24., 37., 38.
Galle František, stud. VIIb. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 3., 5., 9. až 19., 22. až 27., 29. až 40.
Halavanja Pavel, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 9., 10., 11., 12., 14., 23., 24.
Havel Miloslav, stud. VIII. tř. I. g. v Brně, úl. 9. až 12., 14. až 16., 23., 24., 26., 29., 30., 35.
Hlávka Jan, stud. Va. tř. r. v Brně, úl. 1., 3., 10., 11., 14., 15., 22.
Hraše Josef, stud. VII. tř. g. v Praze III., úl. 1., 2., 9., 10. až 12., 15. až 18., 23., 24., 26., 28., 31., 37.
Hrubíšek Otakar, stud. VII. tř. g v Kyjově, úl. 1. až 3., 9. až 12., 14. až 16., 22. až 24., 34.
Jandásek Josef, stud. VII. tř. g. ve Strážnici, úl. 1., 2., 4., 5., 9. až 40.
Jandásek Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Kyjově, úl. 1., 2., 3., 9. až 12., 14. až 17., 22. až 24., 31., 37.
Jiruš V., stud. Va. tř. gymn. na Král. Vinohradech, úl. 9.. 10.
Kladivo Bohumil, stud. VIIb. tř. g. v Brně, úl. 1. až 40.
Klier Em., posluchač čes. techniky v Praze, úl. 1., 2., 9. až 18., 23. až 35, 37. až 39.
Křížek Antonín, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 4. 9. až 19., 23. až 27., 30. až 33, 35. až 38.
Lísek František, stud. VIII. tř. g. v Kyjově, úl. 1., 2., 3., 9. až 12., 14. až 17., 22. až 24., 31., 37.
Lochmannová Karla, stud. VI. tř. „Minervy“ v Praze, úl. 1. až 4., 9. až 18., 22. až 40.

Lenz V., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 3. 9. až 18., 23. až 26., 28., 29., 31. až 33., 35., 37. až 40.

Loutocký Josef, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2., 14., 15., 31., 32., 33., 34.

Němec Al., stud. VIIa. tř. g. v Brně, úl. 1. až 3., 9. až 17., 22. až 25., 27., 29., 31. až 35., 37.

Novotný Rudolf, stud. VII. tř. g. v Kyjově, úl. 2., 10., 12., 14. až 16., 23., 24.

Pilnáček Jaromír, stud. VIb. tř. r. v Kladně, úl. 1. až 3., 9. až 18., 23. až 27., 29. až 35., 37. až 40.

Pokorný Amos, stud. Va. tř. g. v Brně, úl. 9., 10., 12., 13., 24.

Pokorný Blahoslav, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 9. až 21., 23., 24., 34., 37., 40.

Regentík Miloslav, posluchač zemědělské školy ve Vídni, úl. 1., 2., 9. až 12., 14. až 16., 18., 23. až 26., 28. až 30., 34., 35., 38., 39.

Ryšánek František, stud. VIIIb. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 2., 10., 14., 15., 18., 23. až 27., 29., 30., 35., 37.

Schindler Antonín, stud. VIIb. tř. r. v Plzni, úl. 10. až 17., 23., 24, 26., 28., 31., 37.

Simandl Václav, stud. VIII tř. g. v Mladé Boleslavi, úl. 1. až 5., 9. až 18, 23 až 40.

Sova Em., stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 2., 4., 9. až 20., 23. až 26., 35., 37.

Stára A., stud. VII tř. r. v Karlíně, úl. 2, 3., 9. až 12., 14. až 18, 23, 24., 26, 35., 37, 38.

Svoboda Jan, stud. VI. tř. g. v Jevíčku, úl. 1., 10. až 16., 23., 24., 26., 27., 31., 35., 37., 38, 39.

Ščerba Josef, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 4, 9. až 12., 14., 18., 19., 21.

Šprinc Antonín, stud. VIIIb. tř g. v Olomouci, úl. 1. až 3., 9., 10., 14. až 19, 23. až 27, 29. až 31., 35., 37.

Štětka L., stud. VIII. tř. g. v Praze III, úl. 1. až 3., 9., 10. až 12., 15., 16. až 18., 23., 24., 26., 28., 31., 37.

Tesař Ad., stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 3., 10., 14. až 17., 23., 25., 26., 29. až 31., 35., 37.

Vacík Ladislav, stud. V. tř. r. v Novém Městě, úl. 1., 9., 10., 12.

Vaněk K., privatista na reálce v Praze II., městský sad č. 5, úl. 1. až 5., 7., 9., 10. až 18., 20. až 35., 37., 40.
Večeř Miloš, stud. VIb. tř. r. v Žižkově, úl. 9, 18., 27., 29., 30.
Zelený Jan, stud. VII tř. r. v Novém Městě, úl. 1., 3., 9. až 16., 18., 23., 24, 26., 27.
Zeman Ladislav, stud. VIIIa. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 5., 9. až 17., 23., 24., 26, 27., 32., 34, 37.
Živanský Vlad., stud. VIIb. tř. g. v Brně, úl. 1. až 40.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce „Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky“ přisoudila těmto řešitelům ceny vypsané výborem „Jednoty českých mathematiků“.

I. Ceny první.

1. *Živanský Vladimír*, stud. VIIb. tř. g. v Brně.
2. *Jandásek Josef*, stud. VII. tř. g. ve Strážnici.

3. *Galle František*, stud. VIIb. tř. g. v Brně.
4. *Kladivo Bohumil*, stud. VIIb. tř. g. v Brně.
5. *Klier Em*, posluchač čes. techniky v Praze.
6. *Lochmannová Karla*, stud. VI. tř. „Minervy“ v Praze.
7. *Lenz V.*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.
8. *Pilnáček Jaromír*, stud. VIb. tř. r. v Kladně.
9. *Simandl Václav*, stud. VIII. tř. g. v Mladé Boleslavi.
10. *Vaněk K.*, privatista na reálce v Praze II., městský sad č. 5.

II. Ceny druhé.

1. *Burša Rudolf*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži.
2. *Doležel Václav*, stud. VII. tř. I. g. v Brně.
3. *Čech Břetislav*, stud VII. tř. r. v Novém Městě.
4. *Hraše Josef*, stud. VII. tř. g. v Praze III.

5. *Jandásek Ladislav,* stud. VIII. tř. g. v Kyjově.
6. *Křížek Antonín,* stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
7. *Lísek František,* stud. VIII. tř. g. v Kyjově.
8. *Němec Al.,* stud. VIIa. tř. g. v Brně.
9. *Pokorný Blahoslav,* stud. VII. tř. r. v Brně.
10. *Regentík Miloslav,* posluchač zemědělské školy ve Vídni.
11. *Sova Em.,* stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
12. *Stára A.,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.
13. *Svoboda Jan,* stud. VI. tř. g. v Jevíčku.
14. *Šprinc Antonín,* stud. VIIIb. tř. g. v Olomouci.
15. *Štětka L.,* stud. VIII. tř. g. v Praze III.

III. Ceny třetí.

1. *Číhalík Emilian,* stud. VII. tř. r. v Hodoníně.
2. *Halavanja Pavel,* stud. VII. tř. r. v Brně.
3. *Havel Miloslav,* stud. VIII. tř. I. g. v Brně.
4. *Hlávka Jan,* stud. Va. tř. r. v Brně.
5. *Hrubíšek Otakar,* stud. VII. tř. gymn. v Kyjově.
6. *Loutocký Josef,* stud. VII. tř. g. v Olomouci.
7. *Novotný Rudolf,* stud. VII. tř. g. v Kyjově.
8. *Pokorný Amos,* stud. Va. tř. g. v Brně.
9. *Ryšánek František,* stud. VIIIb. tř. g. v Olomouci.
10. *Schindler Antonín,* stud. VIIb. tř. r. v Plzni.
11. *Ščerba Josef,* stud. VII. tř. g. v Místku.
12. *Tesař Ad.,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.
13. *Vacík Ladislav,* stud. V. tř. r. v Novém Městě.
14. *Večeř Miloš,* stud. VIb. tř. r. v Žižkově.
15. *Zelený Jan,* stud. VII. tř. r. v Novém Městě.
16. *Zeman Ladislav,* stud. VIIIa. tř. g. v Brně.