Stanislav Jaskowski

Quelques problèmes actuels concernant les fondements des mathématiques è

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 2, 74--78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123051

EISENHART) If the total of the sizes of these two samples $N = n_1 + n_2$ increases indefinitely with constant $\frac{n_1}{n_2} = k$ the U-distribution approches the normal distribution asymptotically. It is necessary to attach great importance to the WALD'S general formulation of the problem of statistical inference which starts with a general theory of statistical decision functions.

QUELQUES PROBLÈMES ACTUELS CONCERNANT LES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES.

STANISŁAW JAŚKOWSKI, Toruń.

Dans le vaste domaine appelé fondements des mathématiques ou logique des mathématiques, j'ai choisi deux groupes de problèmes qui paraissent avoir une importance particulière à cause de leurs conséquences pratiques.

I. Problèmes de décision.

1. Dans la logique des mathématiques, on appelle „méthode de décision" (decision method, Entscheidungsverfahren) une méthode générale de résoudre tous les problèmes d'un type donné. La notion de méthode générale est connue aux mathématiciens depuis l'antiquité; l'algorithme d'Euclide en fournit un exemple. La notation logique symbolique, la forme de système déductif formalisé, donnée aux théories mathématiques et enfin la distinction entre le système et les considérations méthodologiques appartenant au „méta-système" — voici les facteurs qui d'une part ont contribué au développement de quelques méthodes de décision et qui, de l'autre, ont permis de démontrer l'impossibilité d'en construire quelques autres.

Toutes les méthodes de décision obtenus par les logiciens sont du même type. On construit une théorie formalisée T et on définit une classe de formules (classe de problèmes) P par l'énumération des termes constants, des variables et des quantificateurs, qui tous peuvent apparaître dans les formules de la classe P. On décrit d'une manière univoque le procédé qui donne la réponse, pour chaque formule F de la classe P, si F est un théorème de la théorie T ou non. Le résultat négatif classique est dû à GÖDEL qui a montré en 1930 qu'il n'était pas possible de trouver une méthode de décision applicable à la classe des problèmes formulés à l'aide de la notion de nombre naturel et des opérations d'addition et de multiplication.

La méthode bien connue de vérifier les formules du calcul des propositions à l'aide de substitution des valeurs 1 et 0 pour les variables est le prototype des méthodes de décision modernes. Dans les dernières années on a obtenu plusieurs résultats nouveaux. J. C. C. Mc KINSEY a donné une méthode de décision pour les formules privées des quantificateurs dans la théorie élémentaire des „lattices"[1]) et Mme W. SZMIELEW en a donné une pour les formules de la théorie élémentaire des groupes abéliens.[2]) A. TARSKI a communiqué la découverte d'une méthode de décision pour l'algèbre de BOOLE élémentaire.

2. TARSKI vient de publier la méthode de décision pour une vaste classe de problèmes de l'algèbre et de la géométrie[3]) — publication qu'il faut estimer comme évènement de grande importance. La méthode, trouvée en 1930, s'applique à tous les problèmes formulés dans la notation du système auquel TARSKI donne le nom de l'algèbre élémentaire. Les signes arithmétiques constants de l'algèbre élémentaire sont: $1\ 0\ -1\ +\ .\ =\ >$. Les variables représentent les nombres réels. On a en outre les symboles constants $\sim\ \vee\ \wedge$ du calcul des propositions et les quantificateurs: (Ex) — „il existe un x tel que ...". Chaque nombre entier particulier peut être inscrit sous la forme d'un „numéral", c'est-à-dire d'une somme d'unités, d'une somme des -1, ou bien comme 1, 0 ou -1. En outre on peut inscrire chaque polynôme particulier de plusieurs variables avec des coefficients entiers. Pour examiner le polynôme du degré 3 par rapport à x d'une manière générale, il faut envisager le polynôme à 5 variables:

$$y_1 \cdot x \cdot x \cdot x + y_2 \cdot x \cdot x + y_3 \cdot x + y_4.$$

Les signes $=$ et $>$ posés entre deux polynômes (ceux du degré 0 n'étant pas exclus) donnent les formules atomiques. Une seule formule atomique ainsi que plusieurs formules atomiques liées par les symboles $\wedge$ et $\vee$ constituent ce que je vais appeler ici condition simple.

C'est une généralisation du théorème connu de STURM, qui joue le rôle fondamental dans la méthode de décision. Soient $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ et $g(x, y_1, \ldots, y_n)$ des polynômes ordonnés suivant les puissances de x. Le théorème de STURM généralisé permet de formuler les conditions simples pour $y_1, \ldots, y_n$, nécessaires et suffisantes pour que le système d'une équation et d'une inégalité

$$f(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \ \wedge\ g(x, y_1, \ldots, y_n) > 0$$

soit satisfait par un nombre x, par deux nombres x, ... etc. Le théorème est généralisé ensuite de sorte que pour chaque condition simple $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ on sait formuler une condition simple $\Psi(y_1, \ldots, y_n)$ qui est suffisante et nécessaire pour qu'il existe un x satisfaisant à

[1]) *The decision problem for some classes of sentences without quantifiers,* Jour. of Symb. Logic, **8** (1943), 61—76.

[2]) *Decision problem in group theory,* Library of X Intern. Congress of Philosophy, **I** (1948), 373—376.

[3]) *A decision method for elementary algebra and geometry,* Santa Monica Cal., 1948.

$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)$, c'est-à-dire pour que

$$[(Ex)\Phi(x, y_1, \ldots, y_n)] \equiv \Psi(y_1, \ldots, y_n)$$

soit un théorème de l'algèbre. Ainsi on réduit chaque problème à un autre qui contient moins de variables. En répétant ce procédé on arrive à une condition simple concernant les numéraux et l'on décide facilement, si cette dernière condition est vraie ou fausse.

En vertu du théorème précité de GÖDEL il est impossible de définir le nombre naturel dans l'algèbre élémentaire, car cet algèbre est décisible et contient l'addition et la multiplication. La méthode de TARSKI ne s'applique pas aux nombreux problèmes algébriques formulés à l'aide de la notion du nombre entier, par exemple aux théorèmes concernant les polynômes avec coefficients entiers. Dans le symbolisme de l'algèbre élémentaire il est impossible d'inscrire un schéma qui pourrait désigner les polynômes du degré arbitraire, comme nous le faisons fréquemment à l'aide des points „...“. Ainsi la méthode de TARSKI ne donne pas de réponse à la question: tous les polynômes de degré arbitraire jouissent-ils d'une propriété donnée? On apprend seulement, si tous les polynômes du 1^{er}, 2^{me} etc., jusqu'au 15^{me} degré par exemple — jouissent de la propriété en question.

La restriction de la méthode aux nombres réels n'est pas essentielle, puisque les problèmes de l'algèbre des nombres complexes se réduisent à ceux de l'algèbre des nombres réels. Évidemment la méthode de TARSKI conduit aux solutions des problèmes géométriques mis sous la forme analytique.

3. Il est possible que le nombre d'actions éxigées par la méthode dans certains cas particuliers importants, sera trop élevé pour qu'on puisse les exécuter en pratique. Pour cette raison, TARSKI propose de construire une machine qui travaillerait selon sa méthode et qui donnerait les solutions des problèmes plus compliqués. L'idée d'une mécanisation de certaines recherches mathématiques n'est pas nouvelle. Déja JEVONS a construit une machine logique qui pouvait résoudre les problèmes de l'algèbre de la logique. Il est clair que la formalisation est une phase préparatoire à la mécanisation d'une théorie.

II. Fondements de la géométrie.

4. Les résultats récents de la physique quantique imposent des problèmes tout à fait nouveaux: il faut analyser les constructions possibles d'une géométrie de l'espace quantique.[4]) Pour cette raison il me semble avantageux de rappeler quelques travaux plus anciens qui avaient pour but construire des fondements nouveaux de la géométrie traitée plutôt comme science empirique et dont les notions primitives seraient

[4]) Voir p. ex. H. S. SNYDER: *Quantized Space-Time*, Physical Review, **71** 1947, II. ser.

choisies parmi les noms des objets observables. On a éliminé tous les termes géométriques primitifs à volume nul, comme le point, le ségment, le plan etc. Tous les termes primitifs étant des corps ou des relations entre corps, on a donné à cette méthode le nom de géométrie des corps. La géométrie des corps a été developpée par A. N. WHITEHEAD,[5]) J.NICOD[6]) et A. TARSKI[7]). Ce dernaier a fondé la géométrie de l'espace euclidien sur deux notions,celles de sphère et d'inclusion spatiale des corps. TARSKI définit en suite la relation: „la sphère X est concentrique ave cla sphère Y"; il définit le point comme classe de toutes les sphères, concentriques avec une sphère donnée. Le point est identifié avec la classe de tous ses entourages sphériques, la définition est donc d'accord avec le fait connu que les propriétés physiques d'un point de l'espace se réduisent aux propriétés des entourages.

Il est possible que les principes de la géométrie des corps peuvent être utiles à la construction d'une géométrie quantique, non-euclidienne en petit, dans laquelle la notion ordinaire du point ne sera plus valable. Au cours des recherches sur la géométrie des corps, fondée sur le demi-espace comme terme primitif, j'ai trouvé un exemple que j'adapte ici à la géométrie du plan pour raison de simplicité. C'est le demi-plan qui est le terme primitif; la droite est définie comme couple des demi-plans mutuellement complémentaires. Trois droites différentes a, b, c ayant un point d'intersection commun, possèdent la propriété caractéristique $*(a, b, c)$: les droites a, b, c divisent le plan en 6 parties et chaque couple $(a, b)(a, c)(b, c)$ divise le plan en 4 parties. Profitant de la notion de l'inclusion des champs, il est possible de définir le point comme faisceau de droites. Pour que le faisceau possède les propriétés ordinaires d'un point, il est nécessaire que

$$*(a, b, c),\ *(a, b, d) \text{ et } c \neq d \text{ entraîne } *(a, c, d). \qquad (1)$$

Si nous admettons que (1) n'est pas juste, nous obtenons une géométrie privée de points au sens ordinaire.

5. La géométrie des corps possède un aspect philosophique. La géométrie ponctuelle d'Euclide était liée a la philosophie idéaliste grecque. Le fait que chaque objet accessible aux sens humains possède le volume non-nul, n'empêchait pas de croire qu'ils existent des objets à volume nul. Dans les axiomes de la géométrie des corps, on ne postule plus l'existence des objets idéaux de ce genre.

---

[5]) *An enquiry concerning the principles of natural knowledge*, Cambridge, 1919. *The concept of nature*, Cambridge, 1920,

[6]) *La géométrie dans le monde sensible*, Paris, 1924.

[7]) *Les fondements de la géométrie des corps*, Mémoires du Premier Congrès Polonais de Mathématique en 1927, Supplément aux Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique. Voir aussi: S. JAŚKOWSKI: *Une modification des définitions fondamentales de la géométrie des corps de* M. A. TARSKI, Annales de la Soc. Pol. de Math., XXI (1948), 298—301.

Je désire encore mettre en relief une analogie entre la géométrie des corps et la méthode d'enseignement élémentaire. On commence l'enseignement de la géométrie par les démonstrations des dessins et des modèles (méthode intuitive), en évitant l'introduction des notions trop abstraites. Certains pédagogues (surtout français, suivant MÉRAY et M. Th. ROUSSEAU) transportent les mêmes tendences à l'enseignement systématique, qui est l'enseignement secondaire, en s'éloignant de plus en plus des *Éléments* d'Euclide. La géométrie des corps peut être considérée comme une formulation précise de la même méthode à l'aide des notions logiques modernes. Une analogie pareille existe dans les fondements de l'arithmétique. La définition connue de FREGE des nombres naturels en termes purement logiques est, au fond, une formulation stricte de la méthode ordinaire d'enseigner les rudiments de l'arithmétique sur les concrets.

*

Streszczenie. — Résumé

Pewne aktualne zagadnienia z zakresu podstaw matematyki.

STANISŁAW JAŚKOWSKI, Toruń.

Podaję charakterystykę dwóch grup zagadnień, które posiadają szczególną doniosłość ze względu na ich praktyczne konsekwencje. Pierwszą grupę stanowią badania nad rozstrzygalnością systemów dedukcyjnych. Ostatnie lata przyniosły kilka nowych metod rozstrzygania, z pośród których tutaj referuję najważniejszą, mianowicie ogłoszoną w r. 1948 przez TARSKIEGO metodę rozstrzygania obszernej klasy zagadnień algebry i geometrii. Ilość czynności wymaganych przez tę metodę w pewnych przypadkach może być zbyt duża, aby je wykonywać w praktyce. Z tego względu TARSKI proponuje budowę maszyny pracującej według jego metody rozstrzygania — w celu rozwiązywania zagadnień bardziej skomplikowanych, a praktycznie ważnych.

Drugą grupę omawianych zagadnień stanowią podstawy geometrii. Z uwagi na wyniki fizyki kwantowej należy zanalizować możliwe geometrie dla przestrzeni kwantowej. Warto przypomnieć opracowaną przez WHITEHEAD'A, NICOD'A, TARSKIEGO geometrię brył, której zasady mogą być pożyteczne przy budowie geometrii kwantowej, nie-euklidesowej dla rozmiarów bardzo małych, a być może takiej, w której nie będzie obowiązywało zwykłe pojęcie punktu. Możliwości w tym względzie ilustruję własnym przykładem. Znane jest filozoficzne znaczenie geometrii brył, w której nie postuluje się istnienia przedmiotów idealnych o objętości zerowej, takich jak np. punkty. Wreszcie geometrię brył można w pewnej mierze uważać za logicznie ścisle ujęcie metody poglądowej wykładu geometrii.