Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloslav Pelíšek

O středech křivosti kotálnic. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 2, 101--123

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/123131`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1901

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

O středech křivosti kotálnic.

Napsal

Miloslav Pelíšek,
professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Dokončení.)

IX.

Přistupme nyní k obecnější otázce, *které místo naplňuje bod s, naplňuje-li bod p libovolnou přímku* X?

Pak jest svazek $o(p\ldots)$ perspektivný se svazkem $t(p\ldots)$, svazek $t(p\ldots)$ jest involutorný se svazkem $t(\pi\ldots)$ a tedy svazek $o(p\ldots)$ projektivný se svazkem $t(\pi\ldots)$, aneb svazek $o(\pi\ldots)$ projektivný se svazkem $t(\pi\ldots)$; body π naplňují tudíž kuželosečku H, jež prochází bodem o a dotýká se v bodě t přímky T.

Promítáme-li nyní křivou řadu $\pi\ldots$ z bodu O, jenž neleží na H, a protneme tento svazek svazkem $t(p\ldots)$, jenž jest projektivný k řadě $\pi\ldots$, obdržíme, jak známo, jakožto místo bodů s křivku třetího řádu, jež se však rozpadá ve přímku ot a v nějakou kuželosečku G, jež se dotýká přímky T v bodě t.

Přímku ot nutno z příbuznosti vyloučiti, poněvadž jejímu průsečíku s přímkou X odpovídá jen jediný střed křivosti, který se může stanoviti direktně pomocí výše uvedených harmonických vlastností. Týmž pochodem jako dříve dospějeme ku větě:

Libovolnému svazku přímek X *jakožto místu bodů* (p) *přísluší svazek kuželoseček* G, *jež procházejí bodem s sdruženým vrcholu p svazku přímek a oskulují v bodě t kružnici* I. Osy těchto kuželoseček jsou rovnoběžné ku přímkám, jež rozpulují úhel tečny T a příslušné přímky X svazku. Středy těchto kuželoseček naplňují novou kuželosečku, jež oskuluje kružnici I v bodě t a prochází půlícím bodem úsečky st.

Splyne-li zvláště vrchol p svazku přímek X se středem pevné kružnice O, obdržíme příslušný střed křivosti s, sestrojíme-li čtvrtý harmonický bod m (sdružený s t) k bodům O, t a průsečíku normály Ot s kružnicí I, a rozpůlíme-li úsečku tm.

Uvažujeme-li zvláště osnovu přímek X rovnoběžných jakožto místo bodů p, přísluší jim jakožto místo středů křivosti s svazek kuželoseček, jež oskulují I v t, a jejichž čtvrtý základní bod jest průsečík rovnoběžky vedené bodem t s kružnicí I, jež tedy náleží svazku.

Předcházející výsledky možno shrnouti v obecnou větu:

Libovolné přímce roviny jakožto místu bodů p přísluší jakožto geometrické místo bodů s kuželosečka, jež oskuluje kružnici I *v bodě t.*

Naopak jest též v platnosti:

Každá kuželosečka K, jež oskuluje kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo středů křivosti s nějaké přímce P jakožto místu opisujících bodů p. Zvolíme-li totiž na K body s_1, s_2, přísluší jim body p_1, p_2, a přímce $p_1p_2 = P$ přísluší kuželosečka, jež oskuluje I v t a prochází body s_1, s_2 a jest tedy totožná s K.

X.

Týmž pochodem jako dříve můžeme dokázati duálné věty:

Libovolnému svazku přímek Y *jakožto místu bodů s přísluší svazek kuželoseček* H *jakožto místo bodů p, jež oskulují kružnici* J *v bodě t a procházejí všechny bodem p, jenž přísluší vrcholu s svazku přímek* Y. Středy těchto kuželoseček naplňují novou kuželosečku, jež oskuluje J v bodě t a prochází půlícím bodem úsečky pt. Osy těchto kuželoseček jsou rovnoběžné ku přímkám, jež půlí úhly tečny T a příslušných přímek Y.

Splyne-li zvláště daný střed křivosti s se středem o hybné kružnice, obdržíme příslušný bod p, sestrojíme-li čtvrtý harmonický bod n (sdružený s t) k bodům o, t a průsečíku normály ot s kružnicí J a rozpůlíme úsečku tn.

Uvažujeme-li zvláště osnovu rovnoběžných přímek Y′ jakožto místo bodů s, přísluší jim svazek kuželoseček jakožto místo bodů p, jež oskulují kružnici J v bodě t a procházejí průsečíkem této kružnice s rovnoběžkou vedenou bodem t, tak že kružnice J náleží svazku.

Tyto výsledky můžeme shrnouti v obecnou větu:

Libovolné přímce roviny jakožto místu bodů s přísluší jakožto místo bodů p kuželosečka, jež oskuluje kružnici J v okamžitém středu otáčení t.

Naopak jest též v platnosti:

Každá kuželosečka K, jež oskuluje kružnici J v bodě t, přísluší jakožto místo opisujících bodů p nějaké přímce P jakožto místu středů křivosti s. Zvolíme-li totiž na K dva body p_1, p_2, přísluší jim body s_1, s_2 a přímce $s_1 s_2 =$ P přísluší kuželosečka, jež oskuluje J v t a prochází body p_1, p_2 a jest tedy totožná s K.

Jako vedlejší výsledek máme větu:

Vedeme-li bodem t kružnice I transversály, jež protínají kružnici I v bodech i a libovolnou přímku X v bodech p, a sestrojíme-li k bodům p, t, i čtvrté harmonické body s sdružené s t, jest jejich místo kuželosečka, jež oskuluje kružnici I v bodě t.

Poněvadž každé přímce P jakožto místu bodů p přísluší kuželosečka K jakožto místo bodů s, jest vyšetřovaný vztah *čtvercová korrespondence,* kterou se zabývali *Magnus, Steiner, Reye* a jiní, a sice patrně onen zvláštní případ, o němž se děje zmínka v díle *Clebsch-Lindemann* Vorlesungen über Geometrie I., str. 476., že totiž splývají všechny tři hlavní body s bodem t, což jest příčinou, že se všechny ony kuželosečky oskulují.

XI.

Jsou-li body p na kuželosečce, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t tečny T, jest svazek paprsků t $(p\ldots)$ involutorný ke svazku t $(\pi\ldots)$. Výtvar svazku o $(p\ldots)$ a svazku t $(\pi\ldots)$, jenž jest projektivní s křivou řadou $p\ldots$, jest křivka třetího řádu jakožto místo bodů $\pi\ldots$

Přejde-li však paprsek tp v tečnu v bodě t, stotožňuje se paprsek op a $t\pi$ s přímkou ot, která jest tedy částí místa bodů $\pi\ldots$, kdežto zbývající část jest kuželosečka, jež se dotýká v bodě t tečny T.

Místo bodu s obdržíme jakožto výtvar svazku O $(\pi\ldots)$ se svazkem t $(p\ldots)$ aneb t $(s\ldots)$, jenž jest křivé řadě $\pi\ldots$ projektivní; naplňuje tedy s křivku třetího řádu, jež má v bodě t dvojný bod. Přejde-li však paprsek $tp = ts$ v tečnu T, stotožní se paprsek $t\pi$ a $O\pi$ s přímkou Ot, jež jest tedy částí místa s, kdežto zbývající část jest kuželosečka, jež se dotýká v bodě t tečny T. Přímka Ot nenáleží místu s, poněvadž jejímu průsečíku s danou kuželosečkou přísluší jediný bod jakožto střed křivosti, který se může stanoviti direktně na základě výše uvedených harmonických vlastností.

Máme tudíž větu:

Body p kuželosečky A, jež se dotýká v bodě t kružnice J, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti s naplňují taktéž kuželosečku A′, jež se dotýká v bodě t kružnice I. (Mannheim).

Větou tou již jest současně vyřčena věta duálná.

Kuželosečku A′ můžeme zase konstruovat pomocí kružnice I, vedeme-li bodem t libovolné příčky a sestrojíme harmonické body dle relace (5).

Máme tedy vedlejší výsledek:

Dotýká-li se kuželosečka A kružnice I v bodě t a sestrojíme-li na příčkách bodem t, jež protínají kuželosečku a kružnici v bodech p a i, k bodům p, t, i čtvrtý harmornický bod m sdružený s t, naplňuje bod m zase kuželosečku, jež se dotýká v t dané kuželosečky i kružnice.

Je-li daná kuželosečka A, jež se dotýká v t tečny T, kružnice, jest dělicí poměr $pt : it$ na všech bodem t vedených příčkách stejný; jest tedy též dělicí poměr $mp : mi$ na všech příčkách tentýž, z čehož následuje, že bod m a tudíž i půlící bod s úsečky tm naplňuje kružnici, jež se dotýká v bodě t přímky T.

Máme tedy větu:

Body p kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t kružnice J, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti s naplňují též kružnici, jež se dotýká kružnice I v bodě t.

Tím jest též vyřčena věta duálná.

Je-li dána kružnice A, obdržíme snadno průměr kružnice A′ pomocí výše uvedené harmonické konstrukce.

Jako vedlejší výsledek máme:

Vedeme-li bodem dotyku t dvou kružnic transversály a sestrojíme-li na nich čtvrtý harmonický bod k povstalým průsečíkům, naplňuje týž zase kružnici, jež se dotýká v bodě t daných kružnic.

Poněvadž přísluší průsečíkům všech kružnic, jež se dotýkají v t pevné a hybné kružnice, průsečíky zase takových kružnic, jest patrno, *že jsou pomyslné kruhové body v nekonečnu samodružné body*; z toho ale jest patrno, že každé jiné kružnici přísluší ve vyšetřovaném vztahu křivka, jež prochází těmito pomyslnými kruhovými body v nekonečnu.

XII.

Jsou-li body p na kuželosečce B, jež protíná v t tečnu T a prochází středem o hybné kružnice, jest svazek $o(p\ldots)$ projektivný se svazkem $t\ (p\ldots)$, svazek $t\ (\pi\ldots)$ jest involutorný se svazkem $t\ (p\ldots)$, a tedy svazek $o\ (\pi\ldots)$ projektivný svazku $t\ (\pi\ldots)$; místo bodů $\pi\ldots$ jest kuželosečka, jež prochází body o a t.

Promítáme-li body π této kuželosečky ze středu O pevné kružnice a protneme-li tento svazek svazkem $t\ (p\ldots)$, jenž jest projektivní s křivou řadou $\pi\ldots$, jest jejich výtvar křivka třetího řádu B′, jež prochází bodem O a t, jenž jest dvojný bod, a ve kterém se B′ dotýká přímky T i dané kuželosečky B.

Křivka B′ se nerozpadá, poněvadž přímka Ot nepřísluší sama sobě.

Poněvadž kuželosečka B protíná tečnu T v reálném od t různém bodě, oskuluje dle dřívějšího křivka B′ kružnici I.

Máme tedy větu:

Body p kuželosečky B, jež protíná v okamžitém středu otáčení t kružnici J a prochází středem o hybné kružnice, opisují epicykloidy, jejichž středy křivosti naplňují křivku třetího řádu

B', jež prochází středem O pevné kružnice a bodem t, ve kterém se dotýká dané kuželosečky a oskuluje kružnici I.

Přímky, jež spojují bod t s průsečíky dané kuželosečky B s kružnicí J, udávají směry asymptot křivky B'.

Naplňují-li body p obecněji kuželosečku B, jež protíná v bodě t kružnici J, jsouc jinak libovolná, naplňují body π... křivku třetího řádu, jež prochází body o a t, který jest dvojným bodem křivky, ve kterém se tato dotýká přímky T; směry asymptot obdržíme, spojíme-li o s průsečíky dané kuželosečky a kružnice opsané na průměru ot.

Body s naplňují i nyní, po vyloučení přímky Ot, křivku třetího řádu, jež má v t dvojný bod, ve kterém jedna větev oskuluje kružnici I a druhá větev se dotýká dané kuželosečky.

Naopak jest též v platnosti:

Každá čára třetího řádu B', jež oskuluje kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo bodů s nějaké kuželosečce B jakožto místu bodů p, jež protíná T v bodě t. Zvolíme-li totiž na B' čtyři body s_1, s_2, s_3, s_4, jimž přísluší p_1, p_2, p_3, p_4, jest těmito a bodem t určena kuželosečka B, které zase přísluší křivka třetího řádu, jež oskuluje I v bodě t, jenž jest její dvojný bod, a prochází body s_1, s_2, s_3, s_4; poněvadž však platí bod t jakožto dvojný bod, ve kterém se obě čáry třetího řádu oskulují a protínají, za *6* bodů, mají tedy obě čáry 10 bodů společných a tudíž se stotožňují.

Podobným pochodem jako dříve se dá ukázati věta duální:

Naplňují-li body s kuželosečku, jež protíná v t kružnici I, jsouc jinak libovolná, přísluší jí jakožto místo bodů p křivka třetího řádu, jež oskuluje kružnici J v bodě t, který jest její dvojný bod.

A též opak:

Každá křivka třetího řádu, jež oskuluje kružnici J v bodě t, jenž jest její dvojný bod, přísluší jakožto místo bodů p kuželosečce jakožto místu bodů s, jež protíná kružnici I v bodě t, jsouc jinak libovolná.

Křivku B' můžeme zase konstruovat pomocí kružnice I a harmonických bodů, čímž obdržíme vedlejší výsledek:

Vedeme-li průsečíkem t dané kružnice I s danou kuželosečkou B libovolné příčky a sestrojíme k vzniklým průsečíkům čtvrté harmonické body, naplňují tyto body křivku třetího řádu, jež se dotýká v t dané kuželosečky a oskuluje v témže bodě kružnici I.

XIII.

Podobně jako v dřívějších případech se dá ukázati:

Naplňují-li body p kuželosečku (p), jež neprochází bodem t, naplňuje bod π křivku (π) čtvrtého řádu, jež má v o a t dvojné body, které jsou isolované, jsou-li přímky ot a T nesečny dané kuželosečky. Body v nekonečnu křivky (π) přísluší průsečíkům kuželosečky (p) s kružnicí opsanou na ot jakožto průměru. Směry asymptot křivky (π) obdržíme, spojíme-li tyto průsečíky s bodem o. Naopak odpovídají bodům v nekonečnu kuželosečky (p) průsečíky křivky (π) s kružnicí opsanou na ot jakožto průměru, a asymptoty kuželosečky (p) jsou rovnoběžné ku spojnicím těchto průsečíků s bodem o.

Bod s naplňuje, po vyloučení přímky Ot, taktéž křivku čtvrtého řádu (s), která má v t dvojný bod, který jest isolován, neprotíná-li kuželosečka (p) tečnu T v reálných bodech.

Bodům v nekonečnu kuželosečky (p) přísluší průsečíky křivky (s) s kružnicí I, a jsou tedy asymptoty kuželosečky (p) rovnoběžné ku spojnicím průsečíků křivek (s) a I s bodem t. Průsečíkům kuželosečky (p) s kružnicí J přísluší body v nekonečnu křivky (s), jejíž asymptoty jsou rovnoběžné ku přímkám, jež spojují průsečíky kružnice J a kuželosečky (p) s bodem t.

Protíná-li kuželosečka (p) tečnu T ve dvou reálných bodech, oskuluje křivka (s) kružnici I v bodě t dvakrát.

Naopak jest též v platnosti:

Každá křivka čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje dvakrát kružnici I v bodě t, přísluší jakožto místo bodů s nějaké kuželosečce C^2 jakožto místu bodů p, jež neprochází bodem t. Zvolíme-li totiž na C^4 pět bodů s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, jimž přísluší p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, jest těmito body určena C^2, které zase přísluší křivka čtvrtého řádu $C_1{}^4$, jež oskuluje dvakrát kružnici I v bodě t a prochází body s_1, s_2, s_3, s_4, s_5. Poněvadž každá z křivek

C^4 a $C_1{}^4$ oskuluje dvakrát I v bodě t, mají tři soumezné dvojné body společné, jež počítají ovšem za dvanáct průsečíků; mimo to procházejí obě body s_1, s_2, s_3, s_4 a s_5 a mají tedy celkem 17 bodů společných a stotožňují se tudíž.

Též jest v platnosti duálná věta:

Každé kuželosečce C^2, jež neprochází bodem t přísluší jakožto místu středů křivosti s křivka čtvrtého řádu C^4 jakožto místo opisujících bodů p, jež oskuluje dvakrát kružnici J v bodě t, protíná-li C^2 tečnu T v reálných bodech.

Naopak jest též v platnosti, že každá C^4, jež oskuluje J v bodě t dvakrát, přísluší jakožto místo bodů p nějaké C^2, jež neprochází bodem t, jakožto místu bodů s.

Sestrojíme-li křivku (s) pomocí harmonických bodů, máme vedlejší výsledek:

Vedeme-li bodem t dané kružnice, jež není současně průsečíkem této kružnice a dané kuželosečky, transversály a sestrojíme k bodu t a k povstalým průsečíkům čtvrté harmonické body, naplňují tyto křivku čtvrtého řádu, jež oskuluje v bodě t dvakrát danou kružnici, jsou-li průsečíky tečny T v bodě t s danou kuželosečkou reálné.

Pochod dosud užitý vede též k cíli, máme-li na zřeteli křivky třetího, čtvrtého a n-tého řádu jakožto místo bodů p.

XIV.

Z předcházejícího jest patrno, které jsou zákony uvedené příbuznosti, je-li geometrické místo bodů p křivka n-tého řádu, jež neprochází bodem t.

Poněvadž protíná (p) kružnici J ve $2n$ od t různých bodech, protíná (s) přímku v nekonečnu též ve $2n$ bodech, a křivka (s) jest tedy řádu $2n$-tého a má v bodě t n-násobný bod, poněvadž (p) protíná tečnu T v n reálných neb podvojmo konjugovaných bodech, jejichž příslušné jsou všechny v t.

Každé větvi křivky (p), jež protíná T ve dvou reálných bodech, přísluší větev křivky (s), jež oskuluje dvojnásobně kružnici I v bodě t.

Každé větvi křivky (p), jež prochází bodem t, odpovídá větev křivky (s), jež se v bodě t dotýká oné větve.

Prochází-li však (p) bodem t, protíná kružnici J ještě ve $2n-1$ od t různých bodech; křivka (s) pak protíná přímku v nekonečnu ve $2n-1$ bodech a jest tedy $2n-1$ řádu. Dotýká-li se (p) v bodě t kružnice J, aneb má-li v bodě t dvojný bod, protíná kružnici J ještě ve $2n-2$ od t různých bodech; křivka (s) pak protíná přímku v nekonečnu ve $2n-2$ bodech a jest tedy řádu $2n-2$. Oskuluje-li křivka (p) kružnici J, aneb má-li v t trojnásobný bod, protíná (p) ještě J ve $2n-3$ bodech; křivka (s) pak jest řádu $2n-3$.

Obecně můžeme říci:

Je-li (p) křivka n-tého řádu, jež má v t λ-násobný bod, ve kterém vchází s kružnicí J dotyky stupňů μ, ν, ..., odpovídá jí křivka (s) řádu $2n-\lambda-\mu-\nu$, jež se dotýká v bodě t všech λ větví křivky (p); protíná-li při tom (p) tečnu T v π reálných bodech, oskuluje (s) kružnici I v bodě t π-násobně.

XV.

Nebude od místa podati s vynecháním veškerých podrobností *přehlednou karakteristiku* vyšetřované příbuznosti:

1. Bodům p v nekonečnu přísluší Bressova kružnice I jakožto místo bodů s.

2. Bodům s v nekonečnu přísluší Bressova kružnice J jakožto místo bodů p.

3. Kuželosečkám, jež oskulují kružnici J jakožto místu bodů p, přísluší přímky jakožto místo bodů s.

4. Kuželosečkám, jež oskulují kružnici I, jakožto místu bodů s, přísluší přímky jakožto místo bodů p.

5. Kuželosečkám, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místu bodů p neb s, přísluší kuželosečky jakožto místo bodů s nebo p, jež se také dotýkají Bressových kružnic. Zvláště přísluší kružnicím, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místu bodů p neb s zase kružnice, jež se dotýkají v bodě t Bressových kružnic, jakožto místo bodů s neb p; zejmena přísluší hybné a pevné kružnici jakožto

místu bodů p neb s kružnice, jež se dotýkají v t Bressových kružnic, jakožto místo bodů s neb p.

6. Kuželosečkám, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů p, přísluší jakožto místo bodů s křivky třetího řádu C^3, jež se dotýkají v bodě t daných kuželoseček a oskulují v tomto bodě Bressovu kružnici I.

Zvláště přísluší kružnicím, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, křivky C^3, jakožto místo bodů s, jež procházejí kruhovými pomyslnými body v nekonečnu, dotýkají se v t daných kružnic a oskulují v t Bressovu kružnici I.

7. Kuželosečkám, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů s, přísluší jakožto místo bodů p křivky třetího řádu C^3, jež se dotýkají v bodě t daných kuželoseček a oskulují v tomto bodě Bressovu kružnici J.

Zvláště přísluší kružnicím, jež protínají Bressovy kružnice v bodě t, jakožto místu bodů s křivky C^3 jakožto místo bodů p, jež procházejí kruhovými pomyslnými body v nekonečnu, dotýkají se v t daných kružnic a oskulují v t Bressovu kružnici J.

8. Kuželosečkám, jež neprocházejí bodem t, jakožto místu bodů p přísluší jakožto místo bodů s křivky čtvrtého řádu C^4, jež mají v bodě t dvojný bod, ve kterém — není-li isolovaný — oskulují kružnici I dvakrát.

Libovolným kružnicím, jež neprocházejí bodem t, přísluší zvláště jakožto místu bodů p křivky C^4 jakožto místo bodů s, jež procházejí pomyslnými kruhovými body v nekonečnu a oskulují v bodě t kružnici I dvakrát, protíná-li daná kružnice tečnu T v reálných bodech.

9. Kuželosečkám, jež neprocházejí bodem t, jakožto místu bodů s přísluší jakožto místo bodů p křivky čtvrtého řádu C^4, jež mají v bodě t dvojný bod, ve kterém — není-li isolovaný — oskulují kružnici J dvakrát.

Zvláště přísluší kružnicím takovéto křivky, jež mimo to procházejí pomyslnými kruhovými body v nekonečnu.

10. Křivce (p) řádu n, jež neprochází bodem t, přísluší křivka (s) řádu $2n$, jež má v t n-násobný bod, kterým prochází tolik reálných větví, v kolika reálných bodech protíná (p) tečnu T, při čemž kružnice I oskuluje všechny tyto větve. Má-li (p)

v t λ-násobný bod, ve kterém vchází s kružnicí J dotyky stupňů μ, ν, ..., snižuje se o $\lambda + \mu + \nu + \ldots$ řád křivky s, která se při tom dotýká v bodě t všech λ větví křivky (p).

11. Též jest v platnosti věta duálná.

K předcházejícím větám jsem dospěl neodvisle, maje předchozí vědomost jen o výsledcích podaných ve zmíněném díle Mannheimově; po ukončení této práce jsem byl upozorněn na pojednání *K. Bobek: „Über die Krümmungsmittelpunkte der Curven, welche die Punkte einer Ebene bei einer unendlich kleinen Verschiebung derselben in ihr beschreiben“*, uveřejněné 5. března 1880 ve Zprávách o zasedání král. české společnosti nauk v Praze, p. 56—64. V práci této jest elegantním způsobem odvozeno, že uvažovaná příbuznost jest zvláštní případ příbuznosti Steinerovy. Autor direktně dokazuje, že přímkám přísluší kuželosečky, jež se oskulují v okamžitém středu otáčení a zvláště, že přímce v nekonečnu přísluší kružnice, jejíž jméno neudává, jakož i vůbec literárních poznámek nečiní; též ukazuje, že přímky, jež procházejí okamžitým středem otáčení, jsou samodružné.

Z vlastností Steinerovy příbuznosti činí pouze závěrek, že křivce řádu n přísluší křivka řádu $2n$, jejíž singularity, které obdrží Steinerovou příbuzností, jsou vesměs v okamžitém středu otáčení; dále, že řád křivky se snižuje, prochází-li daná křivka okamžitým středem otáčení.

XVI.

Poněvadž se veškeré uvedené případy dají konstruktivně provésti jen za pomoci Bressových kružnic a vícekráte zmíněných harmonických konstrukcí, jest na jevu, že právě karakterisovaný vztah není v platnosti toliko pro jediný epicykloidální pohyb, nýbrž že nastane týž *vztah* pro nekonečně mnoho cyklických pohybů, jež mají Bressovy kružnice společné; k tomu jest však jen třeba, aby poloměry r a R hybné a pevné kružnice hověly rovnici:

$$(1) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2\varrho},$$

ve které považujeme poloměr Bressových kružnic za daný.

XVII.

Uvažujme nyní zvláštní případy cyklického pohybu, při čemž však uvedeme jen význačnější věty.

1. Pohyb kardioidálný.

V rovnici (1′) jest nám položiti $r = -R$, čímž obdržíme

$$\varrho = \frac{R}{4}.$$

Při kardioidálném pohybu se rovná poloměr Bressových kružnic čtvrtině poloměru základní kružnice.

Geometrické místo všech bodů, jež opisují zkrácené kardioidy, jež mají právě v těchto bodech inflexní body, jest v každém okamžiku kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení t pevné kružnice, a jejímž poloměrem jest čtvrtina poloměru pevné kružnice.

Pro body p hybné kružnice k jest dělicí poměr $pi : pt = 4 : 1$, z čehož plyne, že úsečka tm se rovná $\frac{8}{3}$ tetivy kružnice I, a úsečka ts se rovná $\frac{4}{3}$ této tetivy. Máme tedy konstrukci:

Středy křivosti prosté kardioidy obdržíme, prodloužíme-li tetivu kružnice I na normále o jednu třetinu její délky.

Vzdálenost středu křivosti s od bodu dotyku t jest však třetina tetivy, kterou tvoří normála na základní kružnici; jest tedy též v platnosti:

Středy křivosti všech kardioid opsaných v libovolném okamžiku body hybné kružnice naplňují zase kružnici, jejíž poloměr jest třetina základní kružnice.

Naplňuje-li p svazek paprsků, naplňuje s svazek kuželoseček, jež oskulují v t kružnici I. Je-li vrchol svazku a v nekonečnu na přímce ot, jest čtvrtý základní bod b svazku kuželoseček průsečík přímky ot s kružnicí I; splyne-li a s o, jest bod b ve vzdálenosti $\frac{3}{4}$ R od bodu t; je-li a v průsečíku s kružnicí J, jest b v nekonečnu; splyne-li a s průsečíkem kružnice I, jest b ve vzdálenosti $\frac{1}{4}$ R od t; splyne-li a se středem O pevné kružnice, jest b ve vzdálenosti $\frac{2}{3}$ R od t atd.

Naopak, naplňuje-li s svazek paprsků, naplňuje p svazek kuželoseček, jež oskulují v t kružnici J. Má-li vrchol svazku paprsků zvláštní polohy, má též vrchol svazku kuželoseček podobné zvláštní polohy jako v předcházejícím.

Naplňuje-li p kružnici, jež se dotýká v t základní kružnice, naplňuje i s takovou kružnici.

2. Pohyb evolventní.

V rovnici (1′) jest položiti $r = \infty$, čímž obdržíme

$$\varrho = \frac{R}{2}.$$

Při evolventním pohybu jest poloměr Bressových kružnic polovina poloměru základní kružnice.

Z toho následuje:

Geometrické místo všech bodů p, jež opisují v libovolném okamžiku zkrácené evolventy, které mají právě v těchto inflexní body, jest kružnice, jež se dotýká vně v okamžitém středu otáčení t základní kružnice, a jejíž poloměr jest polovina poloměru základní kružnice.

Naplňuje-li p svazek paprsků, naplňuje s svazek kuželoseček, jež oskulují I v t.

Je-li zvláště vrchol svazku paprsků a na přímce Ot v nekonečnu, jest čtvrtý základní bod b svazku kuželoseček ve vzdálenosti $\frac{1}{4}$ R od t; je-li a v průsečíku s kružnicí J, jest b v nekonečnu; splyne-li a s O, jest b půlící bod poloměru Ot. A t. d.

Naplňuje-li naopak s svazek paprsků, naplňuje p svazek kuželoseček, jež oskulují J v bodě t; zvláštním polohám bodu a odpovídají zase snadno stanovitelné zvláštní polohy bodu b.

Naplňuje-li p kružnici, jež se dotýká v bodě t základní kružnice, naplňuje i s takovou kružnici.

3. Pohyb hypocykloidálný.

V rovnici (1′) jest položiti r kladné. Je-li r menší než R, čímž nastane hypocykloidálný pohyb v užším slova smyslu, pak jest ϱ záporné, a kružnice I se dotýká vně základní kružnice, kdežto kružnice J uvnitř.

Je-li r větší než R, nastane *pohyb pericykloidálný*, jenž jest, jak známo, vlastně pohyb epicykloidálný; skutečně jest pak zase ϱ kladné, a Bressovy kružnice mají zase tutéž polohu vůči základní kružnici jako při pohybu epicykloidálném.

Je-li $r = R$, nemůže ovšem nastati žádný pohyb; jen v tomto případě splynou Bressovy kružnice s tečnou T v okamžitém středu otáčení.

Jakožto zvláštní případ pohybu hypocykloidálného jest:

4. Pohyb elliptický.

V rovnici (1′) jest položiti $r = \frac{R}{2}$, čímž obdržíme

$$\varrho = -\frac{R}{2}.$$

Při elliptickém pohybu splyne kružnice J v každém okamžiku s hybnou kružnicí.

Ellipsy opsané body hybné kružnice mají tedy v každém okamžiku středy křivosti v nekonečnu; opisují tudíž přímky a sice průměry pevné kružnice.

Střed křivosti s ellipsy, kterou opisuje libovolný bod p roviny, obdržíme, sestrojíme-li k bodům p, t a k průsečíku normály, s onou kružnicí, jež se dotýká v t vně základní kružnice a jejíž průměr se rovná poloměru základní kružnice, čtvrtý harmonický bod m sdružený s t, a rozpůlíme úsečku mt.

Středy křivosti s všech ellips opsaných v libovolném okamžiku body p průměrů základní kružnice a tedy též průměrů ellips tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení t onu kružnici, jež se rovná hybné kružnici a dotýká se vně pevné kružnice v okamžitém středu otáčení t, kdežto čtvrtý základní bod svazku jest bod v nekonečnu na průměru Ot.

Kuželosečky ty jsou vesměs hyperboly, vyjma onu parabolu, jež přísluší průměru rovnoběžnému tečně T.

Středy křivosti s všech ellips opsaných body p průměrů hybné kružnice naplňují svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení onu kružnici, jež se rovná hybné kružnici a dotýká se v t vně základní kružnice, kdežto čtvrtý základní bod obdržíme, prodloužíme-li poloměr tO o třetinu jeho délky.

Středy křivosti s všech ellips opsaných body p osnovy rovnoběžných přímek naplňují v každém okamžiku svazek kuželoseček, jež oskulují tutéž kružnici I v bodě t, a jejichž čtvrtý základní bod jest průsečík rovnoběžky vedené bodem t s toutéž kružnicí. A t. d.

Naopak:

Mají-li středy křivosti s ellips opsaných body p naplňovati libovolnou přímku, naplňují opisující body p kuželosečku, jež oskuluje hybnou kružnici v okamžitém středu otáčení t a prochází průsečíkem rovnoběžky vedené bodem t s hybnou kružnicí.

Mají-li středy křivosti s ellips opsaných body p naplňovati v libovolném okamžiku průměry ellipsy (neb základní kružnice), naplňují body p kuželosečky, jež oskulují v okamžitém středu otáčení hybnou kružnici a procházejí středem této kružnice. A t. d.

Body kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení základní kružnice, opisují okamžitě ellipsy, jejichž středy křivosti naplňují taktéž takové kružnice; zvláště přísluší kružnici opsané na ot jakožto průměru kružnice opsaná na Ot jakožto průměru.

5. Cykloidálný pohyb.

V rovnici (1') jest položiti $R = \infty$, z čehož následuje

$$\varrho = -\frac{r}{2}.$$

Při cykloidálném pohybu obnáší poloměr Bressových kružnic polovinu poloměru hybné kružnice; kružnice I se dotýká vně, kružnice J uvnitř hybné kružnice.

Geometrické místo všech bodů, které opisují zkrácené cykloidy, jež mají právě v těchto bodech inflexní body, jest v každém okamžiku kružnice, jež se dotýká v okamžitém středu otáčení hybné kružnice a prochází jejím středem.

Středy křivosti *s* všech cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* průměrů hybné kružnice tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v okamžitém středu otáčení *t* onu kružnici, jež se dotýká v *t* vně hybné kružnice, a jejíž poloměr se rovná polovině poloměru hybné kružnice, při čemž jest čtvrtý základní bod svazku v nekonečnu na průměru, jenž prochází bodem *t*. Tyto kuželosečky jsou vesměs hyperboly, vyjma onu parabolu, jež odpovídá průměru rovnoběžnému k tečně T v okamžitém středu otáčení *t*.

Středy křivosti *s* všech cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* osnovy přímek kolmých k tečně T tvoří svazek kuželoseček, jež oskulují v *t* touže kružnici I, při čemž jest čtvrtý základní bod průsečík kružnice I s rovnoběžkou bodem *t*. Přímkám, jež protínají kružnici J, odpovídají hyperboly, tečnám paraboly a nesečnám ellipsy.

Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* osnovy přímek nakloněných k základní přímce T, naplňují svazek kuželoseček, jež oskulují kružnici I v bodě *t* a procházejí průsečíkem rovnoběžky vedené bodem *t* s kružnicí I; kuželosečky ty jsou hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, jsou-li dané přímky sečna, tečna neb nesečna kružnice J.

Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* osnovy přímek rovnoběžných k základní přímce T tvoří svazek kuželoseček, jež mají svůj vrchol v okamžitém středu otáčení *t*, v němž nadoskulují kružnici I, a jsou zase hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, jsou-li dané přímky sečna, tečna neb nesečna kružnice J.

Naopak:

Mají-li středy křivosti *s* cykloid opsaných body *p* naplňovati danou přímku, naplňují body *p* v každém okamžiku kuželosečku, jež oskuluje v bodě *t* kružnici J a prochází průsečíkem rovnoběžky, vedené bodem *t* k dané přímce, s kružnicí J.

Osnově přímek kolmých k základné přímce T jakožto místu bodů *s*, odpovídá svazek kuželoseček jakožto místo bodů *p*, jež oskulují v bodě *t* kružnici J a procházejí všechny diametrálným bodem k bodu *t* na kružnici J.

Přímkám rovnoběžným k základní přímce T jakožto místu bodů *s* odpovídá svazek kuželoseček jakožto místo bodů *p*, jež nadoskulují kružnici J v bodě *t*.

Kuželosečky ty jsou hyperboly, paraboly neb ellipsy, dle toho, jsou-li ony přímky sečny, tečny neb nesečny kružnice I.

Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* hybné kružnice naplňují shodnou kružnici, jež se dotýká vně hybné kružnice v okamžitém středu otáčení. Středy křivosti *s* cykloid opsaných v libovolném okamžiku body *p* kružnice, jež se dotýká v *t* přímky T, naplňují zase kružnici, jež se dotýká T v bodě *t*, a jejíž průměr obdržíme známou harmonickou konstrukcí.

XVIII.

Předcházejících výsledků můžeme použiti ku strojení kuželoseček, křivek třetího, čtvrtého a vyššího řádu, jež oskulují neb nadoskulují v daném bodě danou kružnici.

1. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku K, jež nadoskuluje danou kružnici I v bodě t a prochází daným bodem s.*

Bod *t* jest patrně vrcholem kuželosečky.

Prodlužme *ts* o délku této úsečky do *m* a sestrojme k bodům *t*, *m* a k průsečíku *i* přímky *tm* s kružnicí I čtvrtý harmonický bod *p* (sdružený s *i*). Bodem *p* veďme rovnoběžku P ku tečně T v bodě *t* kružnice I.

Označíme-li *a* průsečík přímky P s průměrem kružnice I procházejícím bodem *t* a sestrojíme-li k bodu *a* a k průsečíkům tohoto průměru s kružnicí I čtvrtý harmonický bod *b* sdružený s *t*, jest půlící bod *u* úsečky *tb* druhý vrchol hledané kuželosečky. Druhou její osu obdržíme snadně ze známé relace mezi poloměrem oskulační kružnice ve vrcholu kuželosečky a oběma poloosami. Můžeme však též sestrojiti libovolné body této kuželosečky, vedeme-li bodem *t* libovolnou příčku, jež protíná P v bodě *r* a kružnici I v bodě *j*; sestrojíme-li dále k bodům *r*, *t*, *j* čtvrtý harmonický bod *n* sdružený s *t* a rozpůlíme-li úsečku *tn* v bodě *x*, náleží tento bod hledané kuželosečce. Tato jest hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, je-li přímka P sečna, tečna neb nesečna kružnice J shodné s I, jež se dotýká v bodě *t* vně kružnice I.

Zvláštní případy této úlohy nastanou, je-li bod *s* v nekonečnu na libovolné příčce bodem *t* aneb zvláště na průměru kružnice I, jenž prochází bodem *t*.

2. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež jest určena oskulační kružnicí ve vrcholu a směrem asymptoty.*

Vrcholem *t* vedeme rovnoběžku ke směru asymptoty, jež protíná kružnici I v bodě *i*; tetivu *ti* přeneseme z *t* na opačnou stranu do *p* a vedeme tímto bodem *p* rovnoběžku P k vrcholové tečně T. Vedeme-li dále libovolnou příčku bodem *t*, jež protíná přímku P a kružnici I v bodech *r* a *j*, a sestrojíme-li k bodům *r*, *t*, *j* čtvrtý harmonický bod *n* sdružený s *t*, a rozpůlíme-li konečně úsečku *tn* v bodě *x*, náleží tento bod hledané hyperbole. Provedeme-li tuto konstrukci zvláště pro průměr kružnice I, obdržíme druhý vrchol hyperboly; ze známé relace mezi poloměrem křivosti ve vrcholu a oběma poloosami můžeme vyhledati druhou poloosu.

3. Úloha. *Jest sestrojiti parabolu, jež jest určena oskulační kružnicí ve vrcholu.*

Přeneseme průměr kružnice I z bodu *t* na opačnou stranu do bodu *p* a vedeme tímto bodem rovnoběžku k vrcholové tečně T. Vedeme-li dále libovolnou příčku vrcholem *t*, jež protíná P a I v bodech *r* a *j*, a sestrojíme-li k bodům *r*, *t*, *j* čtvrtý harmonický bod *n* sdružený s *t* a rozpůlíme-li konečně úsečku *tn*, náleží půlící bod *x* hledané parabole.

Poznámka. Je-li dána oskulační kružnice ve vrcholu paraboly, jest tím též udáno ohnisko, a možno tedy ihned užiti základných konstrukcí; výše uvedená konstrukce má tedy jen význam, že udává zvláštní vlastnost paraboly.

4. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán průsečík s hledané kuželosečky s oskulační kružnicí, jakož i další bod a této kuželosečky.*

Prodlužme přímku *ta* o její délku do bodu *m* a sestrojme, značí-li *i* její průsečík s kružnicí I, k bodům *t*, *i*, *m* čtvrtý harmonický bod *n* sdružený s *i*. Veďme dále bodem *n* rovnoběžku P ku přímce *st* a libovolným bodem *p* této přímky P transversálu *pt*, jež protíná I v bodě *j*; sestrojíme-li k bodům *p*, *t*, *j* čtvrtý harmonický bod *r* sdružený s *t* a rozpůlíme-li úsečku *tr* v bodě *x*, náleží tento bod hledané kuželosečce. Tato jest hyperbola, parabola neb ellipsa, dle toho, je-li P sečna, tečna neb nesečna kružnice J shodné s I, a jež se dotýká v *t* vně kružnice I. Osy této kuželosečky jsou rovnoběžné ku přímkám, jež půlí úhly tečny T a přímky P.

5. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán její průsečík s s oskulační kružnicí a směr asymptoty.*

Bodem *t* vedeme k asymptotě rovnoběžku, jež protíná I v bodě *i*; přeneseme tetivu *ti* z bodu *t* na opačnou stranu do bodu *p* a vedeme bodem *p* rovnoběžku P ku přímce *ts*. Přímky P pak užijeme jako v předcházejících případech.

6. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, jsou-li dány další dva body a, b, této kuželosečky.*

Prodloužíme přímku *ta* o její délku do *m* a sestrojíme, značí-li *i* její průsečík s kružnici I, k bodům *t*, *m*, *i* čtvrtý harmonický bod *c* sdružený s *i*. Opakujeme tutéž konstrukci pro bod *b*, čímž obdržíme bod *d*. Přímky $cd = \text{P}$ užijeme jako v předcházejících případech.

Jako zvláštní případ předcházející úlohy obdržíme:

7. Úloha. *Jest sestrojiti hyperbolu, jež má oskulovati kružnici I v bodě t, jsou-li dány směry asymptot.*

Bodem *t* vedeme rovnoběžky ku směrům asymptot, jež protínají kružnici I v bodech *i* a *j*; přeneseme tetivy *ti* a *tj* z *t* na opačnou stranu, čímž obdržíme přímku P, které užijeme jako v předcházejících případech.

8. Úloha. *Jest sestrojiti kuželosečku, jež oskuluje danou kružnici I v bodě t, je-li dán další její bod a a směr osy.*

Pro bod a provedeme konstrukci jako v dřívějších případech, čímž obdržíme bod p přímky P; přímka P sama svírá s tečnou T dvojnásobný úhel jako osa kuželosečky. Přímky P pak užijeme známým způsobem. Úloha jest patrně dvojznačná. Též zde obdržíme zjednodušení, předpokládáme-li a buď na I neb v nekonečnu.

9. Úloha. *Jest sestrojiti křivku třetího řádu C^3, je-li dána oskulační kružnice I ve dvojném bodě t, jakož i čtyři další body a, b, c, d.*

Pro body a, b, c, d provedeme touže konstrukci jako v předcházejících případech, čímž obdržíme body a', b', c', d', které určují s bodem t kuželosečku C^2, která bude obecně protínati tečnu T v bodě t.

Provedeme-li pro body této kuželosečky inversní konstrukci, obdržíme body hledané křivky C^3, jež jest obecnou křivkou třetího řádu, jak bylo výše ukázáno.

Je patrno, že můžeme tuto úlohu různými způsoby specialisovati, volíme-li některé z bodů a, b, c, d v nekonečnu (nejvýše tři) aneb též na kružnici I (nejvýše dva). Na př.:

10. Úloha. *Jest sestrojiti křivku třetího řádu C^3, je-li dána oskulační kružnice I ve dvojném bodě t a směry všech tří asymptot, jakož i druhá tečna τ v bodě t.*

Bodem t vedeme rovnoběžky k směrům asymptot a vyhledáme jejich průsečíky s kružnicí J. Tyto tři průsečíky určují s bodem t a tečnou τ kuželosečku C^2, které užijeme jako v předcházejícím případě.

11. Úloha. *Jest sestrojiti křivku čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I dvojnásobně, jsou-li dány další její body a, b, c, d, e.*

Pro body a, b, c, d, e provedeme touže konstrukci jako v předcházejících případech, čímž obdržíme body a', b', c', d', e', jimiž jest určena kuželosečka C^2, jež neprochází bodem t, a jež musí protínati v reálných bodech tečnu T kružnice I, má-li býti úloha možná.

Pro libovolné body kuželosečky C^2 provedeme inversní konstrukci, čímž obdržíme body, jež náležejí hledané C^4; tato jest obecná křivka čtvrtého řádu, jak bylo výše odůvodněno.

Jest patrno, že můžeme tuto úlohu různými způsoby specialisovati, zvolíme-li některé z bodů *a, b, c, d, e* buď v nekonečnu (nejvýše čtyři), neb též na kružnici I (nejvýše dva). Na př.:

12. Úloha. *Jest sestrojiti křivku čtvrtého řádu C^4, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I dvojnásobně, jsou-li dány směry všech čtyř asymptot a tečna τ v bodě t.*

Vedeme bodem *t* rovnoběžky ke směrům asymptot a vyhledáme jejich průsečíky s kružnicí J; tyto určují s tečnou τ kuželosečku C^2, které užijeme jako v předcházejících případech.

Splynou-li dva z daných bodů v předcházejících úlohách s pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, obdržíme jakožto pomocnou křivku místo libovolné kuželosečky kružnici; máme tedy speciálné úlohy:

13. Úloha. *Jest konstruovati křivku třetího řádu, jež oskuluje ve dvojném bodě t kružnici I a prochází pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, jakož i dalšími dvěma body.*

14. Úloha. *Jest konstruovati křivku čtvrtého řádu, jež oskuluje v bodě t kružnici I dvakrát a prochází pomyslnými kruhovými body v nekonečnu, jakož i dalšími třemi body.*

XIX.

V předcházejícím jsme měli na zřeteli jen křivky *algebraické*; přihlédněme nyní též ku případu, že by křivka (*p*) byla *transcendentní*, na př. *sinusoida*, jejíž body obratu jsou na tečně T, a jež jest dále v poloze souměrné ku přímce *o*O.

Přímky τ_1, τ_2, jež se dotýkají všech vrcholů sinusoidy, transformují se jako kuželosečky K_1, K_2, jež nadoskulují v *t* kružnici I, a jejichž druhé vrcholy obdržíme snadno pomocí často užité harmonické konstrukce.

Kuželosečky ty jsou ellipsy, paraboly neb hyperboly, dle toho, jsou-li tečny τ_1, τ_2 nesečny, tečny neb sečny kružnice J.

Spojíme-li vrcholy sinusoidy s bodem *t*, jsou průsečíky těchto přímek s kuželosečkami K_1, K_2 ony body, ve kterých se transformovaná sinusoida dotýká těchto kuželoseček.

Vedeme-li dále bodem t tečny k sinusoidě a určíme k bodům dotyku korrespondující body pomocí harmonické konstrukce, obdržíme další body s tečnami transformované sinusoidy.

Poněvadž protíná sinusoida tečnu T v nekonečně mnohých reálných bodech, oskuluje transformovaná sinusoida kružnici I v bodě t nekonečněkráte.

XX.

Zajímavou jest též otázka, vyskytují-li se v rovině body *involutorné*, t. j. body, jimž přísluší tytéž body; považujeme-li je za body soustavy (p) neb za body soustavy (s).

Budiž p_1 libovolný bod a s_1 jeho příslušný střed křivosti na normále $p_1 t$. Bod p_2, jenž splývá s bodem s_1, má svůj střed křivosti na téže normále, jenž bude obecně od p_1 různým. Z harmonických konstrukcí následuje, že řady bodů $p_1 \ldots$ a $s_2 \ldots$ jsou projektivné; dvojné body těchto řad jsou tedy hledanými body. Družiny této projektivity vyhledáme následujícím způsobem:

Bodu j na kružnici J přísluší střed křivosti v nekonečnu, a tomuto bodu jakožto bodu soustavy (p) přísluší střed křivosti i.

Bodu p v nekonečnu přísluší střed i, a tomuto jakožto bodu soustavy (p) přísluší půlící bod tetivy ti. Okamžitý střed otáčení t přísluší stále sám sobě, a jest tedy jeden dvojný bod uvedených průmětných řad, jež jsou určeny družinami: j, i; ∞, x; t, t; pak ale následuje, že druhý dvojný bod těchto řad splyne též s bodem t.

Tím jest podán důkaz, že *mimo t není žádných reálných dvojných bodů, jež by tvořily kvadratickou involuci.*

Podobné jest řešení obecnější úlohy:

Bodu p_1 přísluší střed s_1, bodu $s_1 \equiv p_2$ přísluší střed s_2; bodu $s_2 \equiv p_3$ přísluší střed s_3; která jest podmínka, aby bod s_3 splynul s p_1, a obecně, aby bod s_n splynul s p_1?

Tím obdržíme řadu úloh, jež *Steiner* nazval *úlohy o závěrech* (Schliessungsprobleme).

Splyne-li s_n s p_1, obdržíme skupinu n bodů, jež si přísluší involutorně; závěr nastane, vyjdeme-li z kteréhokoliv z těchto bodů. Body $p_1 \ldots$ a $s_n \ldots$ tvoří projektivné řady, jejichž dvojné body jsou hledaná řešení. Geometrické místo hledaných bodů bude tedy křivka, jež protíná každou bodem t vedenou přímku v $2n$ bodech, při čemž t jest považovati za n násobný bod; k místu tomu náleží též patrně tečna T v okamžitém středu otáčení t.

Má-li specielně s_3 splynouti s p_1, přísluší bodu p v nekonečnu střed i a tomuto jakožto střed křivosti půlící bod x tetivy ti, a tomuto jakožto střed bod v nekonečnu; nastal tedy závěr. Druhý závěr tvoří zase bod t.

Místo všech bodů, jež tvoří kubickou involuci, se skládá z přímky v nekonečnu a tečny T, dále z kružnice I a z kružnice, jež prochází středem kružnice I a dotýká se tečny T v bodě t.

Z předcházejících příkladů jest patrno, že dvojné body vyskytujících se projektivných řad jsou vždy reálné, poněvadž jeden z nich jest okamžitý střed otáčení t; nastanou tedy reálné závěry pro libovolné číslo n.

Poněvadž druhý dvojný bod na libovolné normále jest určen jedině jako funkce tetivy na kružnici I neb J, bude na všech normálách poměr vzdálenosti dvojných bodů k tetivě tentýž. Jest to patrno z toho, že provádíme touže konstrukci v různých měřítkách; poměr výsledků k voleným jedničkám musí tedy býti stálý. Druhý dvojný bod bude tedy naplňovati kružnici, jež se dotýká Bressových kružnic v bodě t; z toho následuje dále, že i ostatní body vyšších involuc naplňují taktéž takové kružnice.

Máme tedy obecný výsledek:

Geometrické místo všech bodů, jež tvoří závěry libovolného stupně, sestává z kružnic, jež se dotýkají Bressových kružnic v okamžitém středu otáčení; jedna z nich se rozpadá ve přímku v nekonečnu a tečnu T.