Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O Eulerově vzorci, podle něhož možná konvergentní řady proměniti v rychleji konvergentní

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 33–35

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123417

obdržíme, vyloučivše k, jako při hlavních zlomcích přibližných

$$\alpha_n s_k - \beta_n r_k = (-1)^{n-1}, \alpha_n < \beta_n. \tag{3}$$

A této relace možná použiti k řešení neurčitých rovnic stupně prvního čísly celistvými.

Značí-li a a b relativní prvočísla, jest základní tvar takovýchto rovnic

$$ax - by = c; \tag{4}$$

proměníme-li pak zlomek $a : b$ v řetězec, bude poslední přibližný zlomek, dejme tomu

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{a}{b}$$

a předposlední tudíž

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

vzorec (1), (2) a (3) promění se za tou příčinou v

$$r_k = ak + \alpha, \tag{5}$$

$$s_k = bk + \beta, \tag{6}$$

$$as_k - br_k = (-1)^{n-1}, a < b. \tag{7}$$

Znásobíme-li tedy poslední tuto rovnici činitelem $(-1)^{n-1} c$, povstane z ní

$$(-1)^{n-1} [acs_k - bcr_k] = c,$$

z čehož patrno, porovnáme-li s rovnicí (4), že

$$x = (-1)^{n-1} cs_k,$$

$$y = (-1)^{n-1} cr_k,$$

aneb dosadíme-li za r_k a s_k hodnoty ze vzorců (5) a (6),

$$x = (-1)^{n-1} [bp + \beta c], \tag{8}$$

$$y = (-1)^{n-1} [ap + \alpha c], \tag{9}$$

při čemž možná za $p = kc$ dosaditi jakékoli číslo celistvé.

Jestli $a > b$, píše se ve vzorci (8) a (9) n místo $n-1$.

O Eulerově vzorci, podle něhož možná konvergentní řady proměniti v rychleji konvergující.

(Příspěvek k počtu s operačními symboly od dra. *F. J. Studničky.*)

V klassickém díle svém o počtu differenciálním jednajícím zanáší se *Euler* též s převáděním řad na jiné [1]), které rychleji

[1]) Instit. calc. diff. Pars II. „De transformatione serierum" pag. 232. 1755.

konvergují, a přichází tu k zvláštnímu vzorci, podle něhož možná úkol tento snadno řešiti; k témuž vzorci, jiným však způsobem přišel později též *Hutton*[2]) a *Poncelet*[3]), podle nichž se řídí pozdější mathematikové.

Důkaz, jaký tu vedou, zakládá se na indukci a jest dosti rozvláčný; pomocí počtu s operačními symboly[4]) možná jej však co nejrychleji vyvinouti.

Chceme-li totiž řadu

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots, \tag{1}$$

kde o jednotlivých členech platí

$$u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > u_{n+1} \ldots,$$

proměniti v jinou rychleji konvergující, sestavme především

$$2s = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) - \ldots \tag{2}$$

a zaveďme označení

$$u_k - u_{k+1} = \varDelta u_k,$$

všeobecně pak

$$\varDelta^m u_k - \varDelta^m u_{k+1} = \varDelta^{m+1} u_k,$$

načež z rovnice (2) povstane

$$2s = u_1 + \varDelta u_1 - \varDelta u_2 + \varDelta u_3 - \ldots$$

aneb, porovnáme-li s řadou (1),

$$2s = u_1 + \varDelta s, \tag{3}$$

jelikož patrně

$$\varDelta s = \varDelta u_1 - \varDelta u_2 + \varDelta u_3 - \varDelta u_4 + \ldots$$

Vyjádříme-li pak rovnici (3) symbolickým tvarem

$$s(2 - \varDelta) = u_1,$$

zjednáme si velmi jednoduchým obratem

$$s = u_1 : (2 - \varDelta)$$

a provedeme-li naznačené dělení a vrátíme-li se pak k původnímu významu symbolu $\varDelta$, konečně

$$s = \frac{u_1}{2} + \frac{\varDelta u_1}{2^2} + \frac{\varDelta^2 u_1}{2^3} + \ldots$$

aneb použijeme-li symbolu Σ,

---

[2]) Tracts on mathematical and philosophical subjects. t. I. pag. 176, 1812.

[3]) Application de la méthode des moyennes à la transformation, au calcul numérique et à la détermination des limites du reste des séries. Crelle's J. Bd. XIII. pag. 1. 1835.

[4]) Srovnej „Třetí zpráva jednoty českých mathematiků."

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k u_1}{2^{k+1}},$$

což se shoduje s Eulerovým vzorcem.

Podle toho možná na př. proměniti známou řadu Leibnicovu

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

v rychleji konvergující

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots$$

O kvadratuře kruhu *)

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Každým skoro rokem domnívá se někdo, že sestrojil *perpetuum mobile* aneb vynalezl *kvadraturu kruhu*, ač věda, do kteréž tyto otázky patří, dávno již dokázala, že i toto i ono jest nemožné.

Co se zejmena tkne kvadratury kruhu, možná spůsobem dosti jednoduchým dokázati, že i π i π^2 značí *irracionální* číslo, a tím se přesvědčiti, že nelze u kruhu poměr obvodu k poloměru vyjádřiti číslem racionálním aneb že obvod jest nesměřitelný poloměrem.

Třebať tu jen znáti z theorie řetězců

a) vzorec $tg\, x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$

b) poučku, že nekonečný řetězec

$$\cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cfrac{a_3}{b_3 \pm \ldots}}}$$

---

*) Článek tento uveřejňujeme za tou příčinou, abychom mohli k němu poukázati, když nám někdo, jakž často se děje, oznámí, že se mu pomocí boží podařilo nalézti kvadraturu kruhu.