Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Krejčí
Začátky mathematické krystallografie [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 10–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123423

z čehož patrno, že *subdeterminant soustavy přidružené stupně (n—k)tého rovná se (n—k—1)ní mocnině determinantu původního, znásobené s příslušným determinantem doplňkovým.*

Poznámka. Použijeme-li počtu differenciálního, můžeme tyto výsledky ještě kratším spůsobem vyjádřiti a sice soustavu vzorců (5) jednoduše nahraditi vzorci

$$
\begin{aligned}
\Delta^{n-1} &= \Delta', \\
a_1 \Delta^{n-2} &= \frac{\partial \Delta'}{\partial A_1}, \\
(a_1\, b_2)\, \Delta^{n-3} &= \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial A_1 B_2}, \\
(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{n-4} &= \frac{\partial^3 \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \partial C_3}, \\
&\;\;\vdots \\
(a_1\, b_2\, c_3 \ldots i_{n-2})\, \Delta &= \frac{\partial^{n-2} \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \ldots \partial I_{n-2}},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a všeobecný vzorec (6) jednoduše

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk})\, \Delta^{n-k-1} = \frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}}; \tag{8}$$

povážíme-li konečně, že

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}) = \frac{\partial^{n-k} \Delta}{\partial a_{k+1,\,k+1} \ldots \partial a_{n,\,n}},$$

obdržíme z posledního vzorce ještě

$$\frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}} = \Delta^{n-k-1} \cdot \frac{\partial^{n-k} \Delta'}{\partial a_{k+1,\,k+1} \ldots \partial a_{n,\,n}}, \tag{9}$$

z čehož ještě zřejměji vysvítá poměr mezi původním determinantem a přidruženým.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Mnohý horlivý učeň věd přírodních byl hned při prvním vstoupení do oboru mathematické krystallografie odstrašen překážkami pro něj zdánlivě nepřemožitelnými, poněvadž knihy

o této nauce jednající jsou psány slohem a způsobem na mnoze nejasným a tudíž v skutku odstrašujícím.

Následující pojednání nechť vyvrátí předsudek stran domnělé obtížnosti, neboť se tu nepředpokládá než známost elementární algebry a trigonometrie.

První stať všeobecné krystallografie zde předložená obsahuje základní věty sférické trigonometrie a analytické geometrie v rouše krystallografickém, následující pak budou obsahovati stručný výklad jednoduchých tvarů jednotlivých soustav.

Všeobecná krystallografie.

Prvotvary.

Krystallografie jest dílo ducha francouzského. Znamenitý přírodoskumec *Hauy* založil ji na sklonku předešlého století, vtipný žák jeho *Lévy* rozvinul ji dále a posud žijící velký mineralog *Des Cloizeaux* upotřebil jí duchaplným spůsobem při popisech mineralií.

Přidržíme se tudíž francouzské methody kristallografické nejenom z úcty před tvůrci této nauky, nýbrž i z té příčiny, že jest methoda ta nejjednodušší a nejpřirozenější a že nám nikterak nevadí kráčeti cestou samostatnou.

Dle toho budeme všechny tvary odvozovati od *prvotvarů* jako Hauy a Lévy, jen že jim dáme pro jednoduchou přehlednost částečně jinou podobu, než krystallografové francouzští.

Poněvadž totiž *krystall* čili *tvar vyhraněný* není nic jiného než pravidelně uspořádaná skupenina hmotných prvočástek, obrátíme především zřetel k tomuto uspořádání, a shledáme, že podoba krystallů závisí od poměrů vzdálenosti prvočástek ve třech směrech a od vzájemného úklonu těchto směrů.

Vzdálenosti prvočástek jsou buď stejné nebo nestejné a směry jejich vzájemně pravoúhelné neb šikmoúhelné, což dá *sedm prvotvarů.*

Tvary tyto jsou:

1. *Krychle* (Hexaëder) se stejnými vzdálenostmi a, b, c a vesměs stejnými hranami $A = B = C = 90^0$ *) Obr. 1.

*) Délky hran budeme naznačovati malými latinskými písmeny, úhly na hranách obdobnými velkými a úhly v rovinách ploch obdobnými řeckými.

2. *Stejnoklon* (Rhomboeder), se stejnými vzdálenostmi a, b, c a se stejnými hranami $A = B = C \gtreqless 90^0$, kteréž se s vedlejšími hranami $A' = B' = C'$ doplňují na 180°.

3. *Čtvercový prvotvar* se vzdálenostmi $a = b \gtreqless c$ a s hranami $A = B = C = 90^0$.

4. *Pravoúhelný prvotvar* se vzdálenostmi rozličnými a, b, c a s hranami $A = B = C = 90^0$.

5. *Jednoklonný prvotvar* s hranami $B = C = 90^0$ a A, A', které se doplňují na 180°.

6. *Dvouklonný prvotvar* s hranami $C = 90^0$, A, A' a B, B', které se doplňují na 180°.

7. *Trojklonný prvotvar* s hranami rozličnými A, A', B, B', C, C', které nejsou pravoúhelné a se vzájemně doplňují na 180°.

U tří posledních prvotvarů závisí ráz jejich jen od úhlů a nikoliv od délek hran.

Tvary odvozené.

Ze sedmi prvotvarů lze přikrojením hran neb rohů řady nesčíslného množství tvarů vyvinouti. Soujem tvarů z jednoho prvotvaru vyvinutých slove *krystallová soustava* a dle toho jest sedm *soustav* pojmenovaných dle prvotvarů.

Poněvadž přikrojení hran a rohů prvotvaru bývá mnohonásobné, objevují se vyhraněné tvary obyčejně co tvary mnohoploché.

V poloze těch ploch jeví se trojí rozdíl:

a) Buď jsou rovnoběžné s plochami prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má šest ploch, *šestičetné* (hexaidické);

b) nebo jsou rovnoběžné s hranami prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má dvanáct hran, *dvanáctičetné* (dodekaidické);

c) nebo odtínají rohy prvotvaru a slovou, an každý prvotvar má osm rohů, *osmičetné* (octaidické).

Hlavní zákon tvarů vyhraněných.

Poloha ploch v odvozených tvarech, ač nesmírně rozmanitá, řídí se přece všeobecným zákonem od Hauy-a nalezeným, kterýž v tom záleží, že úseky, jež plochy odvozené na hranách prvotvarů spůsobují, jsou k sobě na jedné a téže hmotě úměrné (racionalní).

Úměrnost úseků (racionalnost) jest tedy hlavním zákonem tvarů vyhraněných, a tím rozeznávají se krystally čili tvary přirozeně vyhraněné od tvarů vůbec pravidelných na př. od modellů, kteréž i neúměrné úseky na prvotvaru připouštějí.

Známky ploch.

Poloha ploch ustanovuje se dle délek, jež na hranách prvotvaru odtínají.

Čáry, které spojují středy protilehlých ploch prvotvaru, slovou jeho *osy*, a mají tentýž poměrný úklon a tu samu délku jako hrany prvotvaru, pročež je plochy odvozené odtínají v těch samých poměrech, jako hrany prvotvaru.

a) Plochy *šestičetné* (hexaidické), poznamenáme všeobecně písmenem h. Poměr úseků na hranách prvotvaru těmi plochami spůsobený jest

$a : b : c = 1 : \frac{1}{0} : \frac{1}{0}$ pro plochu, kteráž odtíná hranu a.

Toho poměru užívá anglický kristalograf Miller k naznačení ploch, píše však jen jmenovatele těch poměrů v pořádku a b c, pročež

$$100 = h$$

pro plochu odtínající a ve vzdálenosti $= 1$;

$$010 = h'$$

pro plochu, odtínající b ve vzdálenosti $= 1$;

$$001 = h''$$

pro plochu odtínající c ve vzdálenosti $= 1$.

Osami a, b, c rozdělí se prostor v osm oktantů; osy od středu na pravo, nahoru a na před berou se v hodnotě kladné, od středu na levo, dolů a dozadu v hodnotě záporné.

Miller vyznačuje polohu zápornou známkou —, již klade nad toho kterého jmenovatele, my pak připojíme zápornou známku —1 k písmenu h; pročež

$$\bar{1}00 = h_{\underline{1}},$$

$$0\bar{1}0 = h_{\underline{1}}',$$

$$00\bar{1} = h_{\underline{1}}''.$$

b) Plochy *dvanáctičetné* (dodekaidické) poznamenáme všeobecně písmenem d, jsou-li rovnoběžné se stranou a; d', jsou-li rovnoběžné s hranou b, a d'', jsou-li rovnoběžné s hranou c.

Poměr těchto úseků jest

$$a : b : c = \frac{1}{0} : \frac{1}{n} : 1$$

pro plochu rovnoběžnou s a.

Pro plochy dle a a b připojíme k d a d' úsek hrany c kladouce druhý úsek $= 1$, pro plochy dle c připojíme k d'' úsek hrany a; a dle toho odpovídá

$$d_{\pm n},\ d'_{\pm n},\ d''_{\pm n}$$

Millerovým známkám $0n1$, $n01$, $n10$, připojí-li se k nim dle polohy ploch, kde toho třeba záporná známka.

c) Plochy *osmičetné* (oktaidické) poznamenáme všeobecně písmenem o.

Poloha jejich dle oktantů naznačuje se u Millera jmenovateli úseků.

$$\left.\begin{matrix} m\,n\,r, & \bar{m}\,\bar{n}\,\bar{r} \\ m\,n\,\bar{r}, & \bar{m}\,\bar{n}\,r \\ \bar{m}\,n\,r, & m\,\bar{n}\,\bar{r} \\ \bar{m}\,n\,\bar{r}, & m\,\bar{n}\,r \end{matrix}\right\} = 0s$$

kdežto $s = a_{\pm\ 1/m}\, b_{\pm\ 1/n}\, c_{\pm\ 1/r}$.

Jsou-li dva odseky $= 1$, znamená 0_n, že se přidaná předpona n vztahuje k straně a, při $0'_n$ k straně b, při $0''_n$ k straně c,

Naznačení ploch dle *Naumanna* bude vyloženo později.

Ustanovení ploch šestičetných.

Nejvšeobecnější případ jest *ustanovení ploch prvotvaru trojklonného*.

Polohu ploch těch v prostoru ustanoviti lze buď z úhlů v rovinách α, β, γ neb z hran A, B, C.

a) Jsou-li dány úhly α, β, γ a má-li se z nich ustanoviti úhel hrany A, obr. 2., vedou se kolmice c, d na hranu a tak aby $(e, d) = A$, načež e spojí se s d pomocí f.

V trojúhelnících $b\,c\,f$ a $e\,d\,f$ jest pak

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$f^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos A.$$

Vezmeme-li $a = 1$, jest

$$c = \sec\beta, \; e = \tang\beta$$
$$b = \sec\gamma, \; d = \tang\gamma$$

a tudíž

$$\sec^2\beta + \sec^2\gamma - 2\sec\beta\sec\gamma . \cos\alpha = \tang^2\beta + \tang^2\gamma - 2\tang\beta\tang\gamma\cos A$$

Jelikož však

$$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}, \tang\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \text{ atd.};$$

jest

$$\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} - \frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma} - \frac{2\sin\beta\sin\gamma\cos A}{\cos\beta\cos\gamma}$$

neb přeložíme-li členy

$$\frac{1-\sin^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{1-\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{2(\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma\cos A)}{\cos\beta\cos\gamma}$$

a jelikož $1 - \sin^2\beta = \cos^2\beta$ atd. jest

$$\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

z čehož jde

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \tag{1}$$

a tudíž podobně

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha},$$
$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

b) Jsou-li dány úhly hran prvotvaru A, B, C, a má li se z nich ustanoviti úhel α, obr. 3., postaví se kolmo na hrany a, b, c plochy, kteréž se setkávají v hranách α', β', γ'.

Nový roh těmito hranami vytvořený slove *protipolární roh* a na něm jest

$$\alpha' = 180^0 - \alpha, \; A' = 180^0 - A,$$
$$\beta' = 180^0 - \beta, \; B' = 180^0 - B,$$
$$\gamma' = 180^0 - \gamma, \; C' = 180^0 - C,$$

a tudíž $\cos\alpha' = -\cos\alpha$, $\cos A' = -\cos A$ atd.

Poněvadž dle (1) jest

$$\cos\alpha' = \frac{\cos A' - \cos B'\cos C'}{\sin B'\sin C'},$$

bude tedy

$$cos\,\alpha = \frac{cos\,A + cos\,B\,cos\,C}{sin\,B\,sin\,C}, \tag{2}$$

a podobně

$$cos\,\beta = \frac{cos\,B + cos\,C\,cos\,A}{sin\,C\,sin\,A}$$

$$cos\,\gamma = \frac{cos\,C + cos\,A\,cos\,B}{sin\,A\,sin\,B}$$

c) Spustíme-li v trojbokém odseku a, b, c z konce $a = 1$, kolmici k na plochu bc, obr. 4. a vedeme-li tou kolmicí plochy $k\ b$ a c kolmé, tak aby s plochami prvotvaru se protínaly na čarách h, l a v hranách B, C, jest

$$l = sin\,\beta\,,\ h = sin\,\gamma\,,$$

a tudíž $k = l\,sin\,C = sin\,\beta\,sin\,C$

$$k = h\,sin\,B = sin\,\gamma\,sin\,B\,,$$

z čehož jde především

$$sin\,\beta : sin\,\gamma = sin\,B : sin\,C$$

a všeobecně

$$sin\,\alpha : sin\,\beta : sin\,\gamma = sin\,A : sin\,B : sin\,C. \tag{3}$$

d) Vložíme-li konečně do rovnice z (1) vyvinuté

$$cos\,\alpha = cos\,\beta\,cos\,\gamma + sin\,\beta\,sin\,\gamma\,cos\,A$$

místo $cos\,\beta$ hodnotu jeho

$$cos\,\beta = cos\,\alpha\,cos\,\gamma + sin\,\alpha\,sin\,\gamma\,cos\,B$$

délíme-li pak pomocí $sin\,\alpha$, a použijeme-li poměru

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{sin\,A}{sin\,B},$$

objeví se pro dané A, B, γ

$$cot\,\alpha = \frac{cot\,A\,sin\,B + cos\,B\,cos\,\gamma}{sin\,\gamma} \tag{4}$$

a podobně

$$cot\,\beta = \frac{cot\,B\,sin\,A + cos\,A\,cos\,\gamma}{sin\,\gamma}$$

a pro dané α, β, C dle (2) pak

$$cot\,A = \frac{cot\,\alpha\,sin\,\beta - cos\,\beta\,cos\,C}{sin\,C} \tag{5}$$

a podobně

$$cot\,B = \frac{cot\,\beta\,sin\,\alpha - cos\,\alpha\,cos\,C}{sin\,C}.$$

Ve dvouklonné soustavě jest $C = 90^{\circ}$, pročež jest

$$\cos \alpha = \frac{\cos A}{\sin B}, \cos \beta = \frac{\cos B}{\sin A}, \cos \gamma = \cot A \cot B.$$

V jednoklonné soustavě jest $B = C = 90^{\circ}$, pročež

$$\alpha = A.$$

V pravoúhelných soustavách (t. v pravoúhelné, čtverečné a krychlové) jest $A = B = C = 90^{\circ}$ pročež

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^{\circ}.$$

V stejnoklonné soustavě jest $A = B = C \gtreqless 90^{\circ}$, pročež

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Spojíme-li stejnohranné rohy osou t, obr. 5. a vedeme-li plochou stejnoklonu úhlopříčku r, jest v trojbokém výkrojku $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{2} R$, T, kdežto $\frac{1}{2} R = 90^{\circ}$, $T = 60^{\circ}$, $\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$, $\sin 60^{\circ} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, dle (2)

$$\cos \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{\cos T + \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} R}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} R}$$

neb

$$\cos \tfrac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2} A}. = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} A}$$

Ustanovení ploch dvanáctičetných.

K ustanovení přípony ve známkách d_n, d'_n, d''_n jest v *trojklonné soustavě* nutno znáti dvě hrany té plochy s prvotvarem a dva úhly v rovinách ploch jeho.

Má-li se na př. ustanoviti dvanáctičetná plocha d''_n rovnoběžná se stranou c, obr. 6., jsou ve výkrojku Z, Z', C, průměty úseků a, b na vodorovné čáry a', b'

$$a' = a \,.\, \sin \beta,$$
$$b' = b \,.\, \sin \alpha$$
$$a' : b' = \sin Z : \sin Z'$$

pročež také

$$a : b = \sin Z \sin \alpha : \sin Z' \sin \beta. \tag{6}$$

Jeden z těch úseků a neb b vezme se $= 1$, druhý $= n$, z čehož pak vychází hodnota d''_n.

Podobně se ustanoví d_n a d_n'.

V dvouklonné soustavě jest na př. pro d''_n, an $Z + Z' + C = 180^{\circ}$, $C = 90^{\circ}$, $\cos Z = \sin Z'$

zapotřebí znáti jednu hranu a dva úhly, pročež

$$a : b = tang\, Z \sin \alpha : \sin \beta.$$

V jednoklonné soustavě jest na př. pro d_n'' an $c = \beta = 90^0$ zapotřebí znáti jednu hranu a jeden úhel, pročež

$$a : b = \sin \alpha : \cot Z$$

V pravoúhelných soustavách jest na příklad pro d_n'', an $c = \alpha = \beta = 90^0$, zapotřebí znáti jen jednu hranu, pročež

$$a : b = 1 : \cot Z.$$

V stejnoklonné soustavě jest na př. pro d_n'', an $A = B = C$, $\alpha = \beta = \gamma$, zapotřebí znáti hranu prvotvaru a mimo to ještě jinou hranu, pročež

$$a : b = \sin(C + Z) : \sin Z.$$

Ustanovení ploch osmičetných.

Příponu ve známce Os, kdežto s všeobecně značí poměr úseků, $s = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$, ustanoviti lze *v soustavě trojklonné* z tří hran prvotvaru a dvou hran jiných, jež plocha osmičetná s prvotvarem vytvořuje.

Jsou-li tedy dány hrany prvotvaru A, B, C a dvě z hran X, Y, Z obr. 7., jež plocha osmičetná s prvotvarem zavírá, na př. X, Y, ustanoví se především dle (2)

$$\cos \nu = \frac{\cos Y + \cos X \cos C}{\sin X \sin C}$$

taktéž α, β, γ dle (2); a úhel $\nu' = 180 - (\nu + \alpha)$, načež jest

$$\cos Z = \sin B \sin X \cos \nu' - \cos B \cos X.$$

Ze známých nyní hran X, Y, Z a A, B, C ustanoví se dle (2) úhly μ, ν, ϱ, načež jest pro $a = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = 1 : \frac{\sin(\mu + \gamma)}{\sin \mu} : \frac{\sin \varrho}{\sin(\varrho + \beta)}, \qquad (7)$$

nebo pro $b = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin \mu}{\sin(\mu + \gamma)} : 1 : \frac{\sin(\nu + \alpha)}{\sin \nu},$$

nebo pro $c = 1$,

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin(\varrho + \beta)}{\sin \varrho} : \frac{\sin \nu}{\sin(\nu + \alpha)} : 1.$$

K ustanovení polohy osmičetné plochy v soustavě *trojklonné* jest tudíž potřebí známosti pěti hran; v soustavě *dvou-*

klonné stačí známost čtyr hran; v soustavě *jednoklonné* tří hran, v soustavách *pravoúhelných* a *stejnoklonné* dvou hran.

Spustí-li se z rohu prvotvaru kolmice k na plochu osmičetnou, tak aby s hranami prvotvaru uzavírala úhly ξ, η, ζ, jest, an dle (3)

$$\frac{\sin(90^0-\xi)}{\sin\varrho} = \frac{\sin Y}{\sin 90^0},$$
$$\cos\xi = \sin Y \sin\varrho$$

a podobně

$$\cos\eta = \sin Z \sin\mu$$
$$\cos\zeta = \sin X \sin\nu.$$

Z kolmé postavy čáry k na ploše osmičetné vycházejí

$$a\,k = \cos\xi\,,\ b\,k = \cos\eta\,,\ c\,k = \cos\zeta,$$

pročež pro reciproky úseků, nebo pro Millerovy známky

$$a : b : c = \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta, \tag{8}$$

V pravoúhelných soustavách jest

$$X = 180^0-\xi\,,\ Y = 180^0-\eta\,,\ Z = 180^0-\zeta,$$

za kteroužto příčinou

$$a : b : c = \cos X : \cos Y : \cos Z. \tag{9}$$

V stejnoklonné soustavě jest úklon všech tří hran stejnohraného rohu k rohové ose $=\xi$, obr. 8. Vezmeme-li pro úklon té rohové osy t k ploše osmičetné naproti $\frac{1}{a} = \varrho$, naproti $\frac{1}{b} = \sigma$, naproti $\frac{1}{c} = \tau$, platí pro úseky $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ srovnalost

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{\sin\varrho}{\sin(\varrho+\xi)} : \frac{\sin\sigma}{\sin(\sigma+\xi)} : \frac{\sin\tau}{\sin(\tau+\xi)}. \tag{10}$$

Mezi úhly ϱ, σ, τ jest takový poměr, že z dvou z nich lze třetí vypočísti.

Neb v trojbokém výkrojku A', B', T, v němž $T = 120^0$, a v trojbokém výkrojku A', D, T, v němž $T = 60^0$ jest dle (5)

$$\sin\sigma \cot\varrho = -\frac{1}{2}\cos\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cot A'$$

$$\sin\sigma \cot\tau = -\frac{1}{2}\cos\sigma - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cot A',$$

z čehož obdržíme sečtením

$$\sin\sigma\,(\cot\varrho + \cot\tau) = -\cos\sigma$$

nebo $$\cot\varrho + \cot\sigma + \cot\tau = 0. \tag{11}$$

Rovnice hran.

a) V soustavách pravoúhelných.

Setkají-li se dvě plochy v pravoúhelné soustavě na hraně H, obr. 9., jest úhel té hrany výplňkem onoho úhlu H' na 180^0, jejíž dvě kolmice ze středu na ony plochy vedené spolu zavírají, tedy

$$\cos H' = -\cos H.$$

Poznamenáme-li kolmice písmeny k, k', vzdálenost obou kolmic od sebe písmenem v jest

$$\cos H' = \frac{k^2 + k'^2 - v^2}{2kk'}.$$

Délka kolmic rovná se úhlopříčce v pravoúhelném šestistěnu, obr. 10., obmezeném souřadnicemi x, y, z, x', y', z', konečného bodu jejího (totiž čárami rovnoběžnými s hranami nebo osami prvotvaru), tudíž

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$k'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Vzdálenost obou kolmic od sebe rovná se úhlopříčce onoho pravoúhelného šestistěnu, obr. 11., jehož strany se rovnají rozdílům stejnojmenných souřadnic $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, konečných bodů obou kolmic, tedy

$$v^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Dosadí-li se tyto výrazy do rovnice pro $\cos H'$, jest

$$\cos H' = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Za souřadnice lze dosaditi reciproky úseků

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ a } \frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}.$$

Neb průměty kolmic k, k' na roviny souřadnic jsou kolmé na hranách X, Y, Z, a X', Y', Z', obr. 10., obou ploch, tudíž

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = y : x \text{ nebo } a : b = x : y$$

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{c} = z : x \text{ nebo } a : c = x : z.$$

Pročež lze za x, y, z a x', y', z' dosaditi a, b, c, a a', b', c', načež jest

$$\cos H = -\frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \tag{12}$$

V osmistěnu pravoúhelné soustavy, obr. 10., v němž hrany
X povstávají setkáním se ploch $abc, a'b'c' = \bar{a}bc$
Y „ „ „ „ $abc, a'b'c' = a\bar{b}c$
Z „ „ „ „ $abc, a'b'c' = ab\bar{c}$
jest, dosadí-li se tyto hodnoty úseků do rovnice před tím vytknuté

$$\cos X = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{S},$$

$$\cos Y = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{S},$$

$$\cos Z = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{S},$$

při čemž $S = a^2 + b^2 + c^2$.

Sečtení těchto rovnic dá pak

$$\cos X + \cos Y + \cos Z = -1 \tag{13}$$

b) V soustavách kosoúhelných.

Rovnice hran pro tvary soustav kosoúhelných vyvine se jako pro plochy soustav pravoúhelných z výrazu

$$\cos H' = \frac{k^2 + k'^2 - v^2}{2kk'}.$$

Kolmice k, k' a vzdálenost v mají však jiné hodnoty.

Jsou-li totiž v rovinách ploch prvotvaru úhly α, β, γ; úklony kolmic k, k' k plochám osmičetným ξ, η, ζ a ξ', η', ζ' a souřadnice jejich x, y, z a x', y' a z'; jest dle známé poučky, že průměty lomených čar se stejným bodem začátečným a konečným na stejnou osu, jsou sobě rovny:

$$k = x\cos\xi + y\cos\eta + z\cos\zeta$$

a dle též poučky mimo to

$$x = k\cos\xi - z\cos\beta - y\cos\gamma,$$

$$y = k\cos\eta - x\cos\gamma - z\cos\alpha,$$

$$z = k\cos\zeta - x\cos\beta - y\cos\alpha.$$

Násobí-li se první rovnice veličinou k, druhá veličinou

$-x$, třetí veličinou $-y$, a čtvrtá veličinou $-z$, a sečteme-li ty rovnice, jest

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz \cos\alpha + 2\,xz \cos\beta + 2\,xy \cos\gamma,$$

a podobně

$$k'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\,y'z' \cos\alpha + 2\,x'z' \cos\beta + 2\,x'y' \cos\gamma.$$

Pro vzdálenost obou kolmic od sebe jest dle obdoby s rovnicí pro pravoúhelnou soustavu

$$v^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(y-y')(z-z')\cos\alpha$$
$$+ 2(x-x')(z-z')\cos\beta + 2(x-x')(y-y')\cos\gamma.$$

Dosadíme-li do rovnice pro $\cos H'$ hodnoty nalezené a položíme-li

$$yz' + y'z = \mathfrak{x},$$
$$zx' + z'x = \mathfrak{y},$$
$$xy' + x'y = \mathfrak{z},$$

obdržíme pak jednodušší vzorec

$$\cos H' = \frac{xx' + yy' + zz' + \mathfrak{x}\cos\alpha + \mathfrak{y}\cos\beta + \mathfrak{z}\cos\gamma}{kk'}$$

Vyznačíme-li pak souřadnice x, y, z a x', y', z' pomocí úseků $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ a $\frac{1}{a'}, \frac{1}{b'}, \frac{1}{c'}$ shledáme, že

$$x = \frac{a \sin^2\alpha - b\,C' - c\,B'}{G}$$

$$y = \frac{b \sin^2\beta - c\,A' - a\,C'}{G}$$

$$z = \frac{c \sin^2\gamma - a\,B' - b\,A'}{G}$$

a podobně pro x', y', z', při čemž

$$A' = \cos A \sin\beta \sin\gamma$$
$$B' = \cos B \sin\gamma \sin\alpha$$
$$C' = \cos C \sin\alpha \sin\beta$$
$$G = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta + c^2 \sin^2\gamma - 2bc\,A' - 2ac\,B' - 2ab\,C'.$$

Znamená-li konečně

$$G' = a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta + c'^2 \sin^2\gamma - 2b'c'\,A' - 2a'c'\,B' - 2a'b'\,C'$$
$$F = aa' \sin^2\alpha + bb' \sin^2\beta + cc' \sin^2\gamma - (bc' + b'c)\,A' - (ca' + c'a)\,B' - (ab' + b'a)\,C',$$

jest pro hranu H v soustavě trojklonné

$$\cos H = -\frac{F}{\sqrt{GG'}}. \tag{14}$$

V soustavách ostatních zjednoduší se výraz ten postupně, jak A, B, C přecházejí do pravého úhlu; pro praktickou krystallografií má však důležitost jen *rovnice hran v stejnoklonné soustavě* odvozená z této všeobecné rovnice vložením do ní $A = B = C, \alpha = \beta = \gamma$, čímž se obdrží

$$F = aa' + bb' + cc' - [(b'c + bc') + (c'a + ca') + (a'b + ab')] \cos A$$
$$G = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ac) \cos A,$$
$$G' = a'^2 + b'^2 + c'^2 - 2(a'b' + b'c' + a'c') \cos A. \qquad (15)$$

Rovnice ploch.

Poloha ploch dá se v kterékoliv soustavě vyznačiti všeobecnou rovnicí.

Odtíná-li totiž plocha nějaká hrany neb osy prvotvaru v poměru $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ a jsou-li úhly v rovinách ploch prvotvaru α, β, γ, úklon hran prvotvaru ke kolmici k na plochu onu z rohu prvotvaru spuštěné ξ, η, ζ, jest pro souřadnice x, y, z jakéhokoliv bodu oné plochy dle známé v předešlém odstavci vytknuté poučky

$$x \cos \xi + y \cos \eta + z \cos \zeta = k$$

nebo

$$\frac{x \cos \xi}{k} + \frac{y \cos \eta}{k} + \frac{z \cos \zeta}{k} = 1.$$

Jelikož však

$$\frac{\cos \xi}{k} = a, \frac{\cos \eta}{k} = b, \frac{\cos \zeta}{k} = c$$

jest také

$$ax + by + cz = 1. \qquad (16)$$

Přeneseme-li plochu do začátečného bodu, kdež to $k = 0$, jest

$$ax + by + cz = 0. \qquad (17)$$

Rovnice pásma ploch.

Plochy, které spolu mají rovnoběžné hrany, slovou *plochy jednoho pásma.*

Vzájemná závislost jejich dá se též vyznačiti rovnicí.

Platí-li totiž pro plochy p, p' a p'', obr. 12., rovnice

$$ax + by + cz = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z = 0,$$

obdrží se vyloučením souřadnic x, y, z

$$\begin{vmatrix} a\ , b\ , c \\ a'\ , b'\ , c' \\ a''\ , b''\ , c'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (18)$$

nebo $a b' c'' + b c' a'' + c a' b'' = a' b c'' + b' c a'' + c' a b''$, (19)
kteráž podmínka slove *pásmová rovnice*, pomocí níž se dá z polohy známých ploch ustanoviti poloha ploch neznámých.

(Pokračování.)

O trojúhelnících kruhových.

(Podává dr. *Em. Weyr.*)

1. Promítneme-li povrch koule z bodu povrchového O na rovinu R, která se koule dotýká v bodě O' bodu O protilehlém (tak že $\overline{OO'}$ jest průměr koule), obdržíme jak známo *„stereografické zobrazení“* koule na rovinu R. Stereografická projekce uvádí rovinu R a kouli v následující souvislosť: „Každému bodu P na povrchu koule se nalézajícímu (obr. 13.) přísluší bod P' co projekce, který lze obdržet co bod průsečný roviny R a paprsku $\overline{OP}$.

Dva body protilehlé na povrchu koule ku př. P a Q přísluší bodům P' Q' roviny R, jejichž spojující přímka prochází bodem O', při čemž zároveň stává rovnice

$$\overline{O'P'} . \overline{O'Q'} = P^2,$$

je-li P průměr v úvahu vzaté koule.

Veškeré kruhy na povrchu koule se nalézající promítají se opět co kruhy. Hlavní kruh HH, jehož rovina rovnoběžná jest k rovině R, promítá se co kruh $H'H'$, jehož střed jest bod O' a jehož poloměr rovná se průměru P koule. Veškeré ostatní hlavní kruhy koule promítají se v kruzích, které protínají kruh $H'H'$ v bodech omezujících průměry tohoto kruhu, a každé dva z těchto kruhů protínají se opět v bodech, jež jsou obrazy protilehlých bodův základní koule.

Hodnoty úhlové se při projekci stereografické nemění, t. j. úhel, který vytvořen jest dvěma libovolnými kruhy na povrchu koule, rovná se úhlu vytvořenému příslušnými obrazy v rovině R.

2. Na základě všeobecně známých, právě blíže vytknutých vlastností stereografické projekce možná dokázat, že