Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Nový důkaz poučky o poměrech mezi původními a přidruženými determinanty a subdeterminanty

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 1, 6–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123427

a Janu Dostálovi. U věci té pokračoval tak pilně, že za několik měsíců první část díla toho, obsahující *„Počátky aritmetiky“*, byla dokončena a nezbývalo ničehož, leč aby je ještě někdo přehledl a vloudilé se chyby a nedopatření opravil, v kteroužto práci se později uvázal k přimlouvání kanovníka Lenharta bývalý žák Vydrův a nástupce na stolici učitelské Ladislav Jandera, načež spis ten r. 1806 nákladem c. k. normální školy vytištěn byl co *„Počátkové aritmetiky“* od *St. Vydry.*

Skončiv první část umění mathematického v jazyku českém, dal se Vydra ihned do diktování *algebry* v témže jazyku, avšak neskončil ji; neboť v srpnu r. 1804 začal patrně na celém těle slábnouti a tak silné kašlati, že i sluchu svého téměř pozbyl, takže všeliké ústní jednání a rozmlouvání s ním stalo se nemožným. Slábnuv co den více a více ulehl dne 2. prosince t. r. jak obyčejně na lože své, z něhož však nepovstal více; byv v noci dne 3. prosince raněn mrtvicí, vypustil u večer téhož dne šlechetného ducha svého, načež mrtvé tělo jeho pochováno jest dne 6. prosince 1804 na volšanském svatém poli v průvodu tak četném a slavném, jakého na drahně časů nebylo viděti v městech pražských.

(Dokončení.)

Nový důkaz poučky o poměrech

mezi původními a přidruženými determinanty a subdeterminanty.

(Podává dr. *F. J. Studnička.*)

Poměr mezi původním determinantem stupně *n*tého

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1, \ldots, l_1 \\ a_2, b_2, \ldots, l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n, b_n, \ldots, l_n \end{vmatrix} = (a_1\, b_2 \ldots l_n)$$

a přidruženým k němu

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1, B_1, \ldots, L_1 \\ A_2, B_2, \ldots, L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n, B_n, \ldots, L_n \end{vmatrix} = (A_1 B_2 \ldots L_n)$$

vyjadřuje, jak známo, *) vzorec

$$\Delta' = \Delta^{n-1}, \tag{1}$$

kterýž obdržíme, znásobíme-li oba determinanty, čímž povstane

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Sigma a_k A_k, \Sigma b_k A_k, \ldots \Sigma l_k A_k \\ \Sigma a_k B_k, \Sigma b_k B_k, \ldots \Sigma l_k B_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma a_k L_k, \Sigma b_k L_k, \ldots \Sigma l_k L_k \end{vmatrix},$$

aneb považíme-li, že všeobecně

$$\Sigma k_k K_k = \Delta,$$
$$\Sigma h_k K_k = 0,$$

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta, 0, \ldots, 0 \\ 0, \Delta, \ldots, 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0, 0, \ldots, \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n,$$

z kteréžto rovnice bezprostředně plyne vzorec (1).

Abychom si další sem patřící vzorce jednoduchým spůsobem **), což jest účelem tohoto pojednání, ustanovili, znásobme známý vzorec rozkladný

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + \ldots + l_1 L_1$$

na obou stranách Δ^{n-2} a zjednejme si tudíž

$$\Delta^{n-1} = A_1 a_1 \Delta^{n-2} + B_1 b_1 \Delta^{n-2} + \ldots + L_1 l_1 \Delta^{n-2};$$

porovnáme-li pak s tímto vzorcem

$$\Delta^{n-1} = A_1 \mathfrak{A}_1 + B_1 \mathfrak{B}_1 + \ldots + L_1 \mathfrak{L}_1,$$

kterýž obdržíme, rozložíme-li i přidružený determinant stejným spůsobem, poznáme snadno, že

---

*) Viz „O determinantech" sepsal dr. *F. J. Studnička* pag. 40.

**) Borchardtův důkaz, jejž uvádí *Baltzer* v „Theorie und Anwendung der Determinanten", jest pro začátečníka příliš nepřístupný.

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 \, \Delta^{n-2} &= \mathfrak{A}_1 = (B_2 \, C_3 \, D_4 \ldots L_n), \\
b_1 \, \Delta^{n-2} &= \mathfrak{B}_1 = (C_2 \, D_3 \, E_4 \ldots A_n), \\
&\;\;\vdots \\
l_1 \, \Delta^{n-2} &= \mathfrak{L}_1 = (A_2 \, B_3 \, C_4 \ldots K_n),
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

čímž vyjádřen poměr subdeterminantu stupně prvního soustavy přidružené k determinantu původnímu.

Použijeme-li tohoto výsledku a sestavíme-li podle vzorce (2)

$$a_1 \, \Delta^{n-2} = (B_2 \, C_3 \ldots L_n) = B_2 \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots,$$
$$b_2 \, \Delta^{n-2} = (A_1 \, C_3 \ldots L_n) = A_1 \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots,$$

a vedle toho podobně

$$a_2 \, \Delta^{n-2} = (B_1 \, C_3 \ldots L_n) = B_1 \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots,$$
$$b_1 \, \Delta^{n-2} = (A_2 \, C_3 \ldots L_n) = A_2 \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots,$$

obdržíme snadno, odečteme-li součin posledních dvou rovnic od součinu předcházejících dvou

$$(a_1 \, b_2) \, \Delta^{2n-4} = (A_1 \, B_2) \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n)^2 + \ldots;$$

o přidruženém determinantu ale platí

$$\Delta^{n-1} = (A_1 \, B_2 \, C_3 \ldots L_n) = (A_1 \, B_2) \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots,$$

aneb znásobíme-li na obou stranách $(a_1 \, b_2) \, \Delta^{n-3}$,

$$(a_1 \, b_2) \, \Delta^{2n-4} = (A_1 \, B_2) \, (a_1 \, b_2) \, \Delta^{n-3} \, (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots;$$

porovnáme-li tedy oba výsledky, poznáme, že

$$(A_1 \, B_2) (C_3 \, D_4 \ldots L_n)^2 + \ldots = (A_1 \, B_2) (a_1 \, b_2) \, \Delta^{n-3} (C_3 \, D_4 \ldots L_n) + \ldots$$

z čehož jde, jelikož na obou stranách jest spořádáno podle stejných podřízených determinantů soustavy přidružené,

$$(a_1 \, b_2) \, \Delta^{n-3} = (C_3 \, D_4 \ldots L_n); \quad (3)$$

podobně bychom obdrželi

$$(a_1 \, c_2) \, \Delta^{n-3} = (B_3 \, D_4 \ldots L_n)$$
$$\vdots$$
$$(k_1 \, l_2) \, \Delta^{n-3} = (A_3 \, B_4 \ldots J_n) \quad \text{atd.},$$

z čehož patrno, jak souvisí subdeterminant stupně druhého soustavy přidružené s determinantem původním a jeho subdeterminantem stupně $(n-2)$ho.

Abychom přišli ku vzorci

$$(a_1 \, b_2 \, c_3) \, \Delta^{n-4} = (D_4 \, E_5 \ldots L_n) = \vartheta_4,$$

použijme obou předcházejících a sestavme si

$$(a_1\, b_2)\, \Delta^{n-3} = (C_3\, D_4 \ldots L_n) = C_3\, \vartheta_4 + \ldots,$$
$$c_3\, \Delta^{n-2} = (A_1\, B_2\, D_4 \ldots L_n) = (A_1\, B_2)\, \vartheta_4 + \ldots;$$

a mimo to podobně

$$(a_1\, c_2)\, \Delta^{n-3} = (B_3\, D_4 \ldots L_n) = B_3\, \vartheta_4 + \ldots,$$
$$b_3\, \Delta^{n-2} = (A_1\, C_2\, D_4 \ldots L_n) = (A_1\, C_2)\, \vartheta_4 + \ldots$$

a konečně ještě

$$(b_1\, c_2)\, \Delta^{n-3} = (A_3\, D_4 \ldots L_n) = A_3\, \vartheta_4 + \ldots,$$
$$a_3\, \Delta^{n-2} = (B_1\, C_2\, D_4 \ldots L_n) = (B_1\, C_2)\, \vartheta_4 + \ldots;$$

znásobíme-li vždy dvě pod sebou stojící rovnice a sečteme-li pak příslušným spůsobem, obdržíme především

$$(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{2n-5} = (A_1\, B_2\, C_3)\, \vartheta^2_4 + \ldots;$$

o přidruženém determinantu však víme, že

$$\Delta^{n-1} = (A_1\, B_2 \ldots L_n) = (A_1\, B_2\, C_3)\, \vartheta_4 + \ldots,$$

aneb znásobíme-li na obou stranách stejným součinem,

$$(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{2n-5} = (A_1\, B_2\, C_3)\,(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{n-4}\, \vartheta_4 + \ldots;$$

porovnáme-li tedy oba výsledky, obdržíme snadno

$$(A_1\, B_2\, C_3)\, \vartheta^2_4 + \ldots = (A_1\, B_2\, C_3)\,(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{n-4}\, \vartheta_4 + \ldots,$$

a jelikož na obou stranách jsou členové seřaděni podle subdeterminantů stupně třetího soustavy přidružené, konečně

$$(a_1\, b_2\, c_3)\, \Delta^{n-4} = (D_4\, E_5 \ldots L_n), \qquad (4)$$

atd., z čehož patrno, že subdeterminant stupně třetího soustavy přidružené rovná se $(n-4)$té mocnině determinantu původního, znásobenému s příslušným subdeterminantem stupně $(n-3)$ho.

Porovnáme-li dosavadní výsledky, sestavíme podle analogie snadno soustavu vzorců tuto:

$$\begin{aligned}
\Delta^{n-1} &= (A_1\, B_2\, C_3\, D_4\, E_5 \ldots K_{n-1}\, L_n),\\
\Delta^{n-2}\, a_1 &= (B_2\, C_3\, D_4\, E_5 \ldots K_{n-1}\, L_n),\\
\Delta^{n-3}\,(a_1\, b_2) &= (C_3\, D_4\, E_5 \ldots K_{n-1}\, L_n),\\
\Delta^{n-4}\,(a_1\, b_2\, c_3) &= (D_4\, E_5 \ldots K_{n-1}\, L_n),\\
\Delta^{n-5}\,(a_1\, b_2\, c_3\, d_4) &= (E_5 \ldots K_{n-1}\, L_n),\\
&\ \ \vdots\\
\Delta\,(a_1\, b_2\, c_3 \ldots\ldots i_{n-2}) &= (K_{n-1}\, L_n),\\
\Delta^0\,(a_1\, b_2\, c_3 \ldots\ldots i_{n-2}\, k_{n-1}) &= L_n,
\end{aligned}$$

aneb všeobecně jedním vzorcem, označíme-li prvky determinantu jedním znakem s dvěma ukazovateli,

$$\Delta^{n-k-1}\,(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}) = (A_{k+1,\,k+1} \ldots A_{n,\,n}), \qquad (6)$$

z čehož patrno, že *subdeterminant soustavy přidružené stupně (n—k)tého rovná se (n—k—1)ní mocnině determinantu původního, znásobené s příslušným determinantem doplňkovým.*

Poznámka. Použijeme-li počtu differenciálního, můžeme tyto výsledky ještě kratším spůsobem vyjádřiti a sice soustavu vzorců (5) jednoduše nahraditi vzorci

$$
\begin{aligned}
\Delta^{n-1} &= \Delta', \\
a_1 \Delta^{n-2} &= \frac{\partial \Delta'}{\partial A_1}, \\
(a_1 b_2) \Delta^{n-3} &= \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial A_1 B_2}, \\
(a_1 b_2 c_3) \Delta^{n-4} &= \frac{\partial^3 \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \partial C_3}, \\
&\;\;\vdots \\
(a_1 b_2 c_3 \ldots i_{n-2}) \Delta &= \frac{\partial^{n-2} \Delta'}{\partial A_1 \partial B_2 \ldots \partial I_{n-2}},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a všeobecný vzorec (6) jednoduše

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}) \Delta^{n-k-1} = \frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}}; \tag{8}$$

považíme-li konečně, že

$$(a_{11}\, a_{22} \ldots a_{kk}) = \frac{\partial^{n-k} \Delta}{\partial a_{k+1,\, k+1} \ldots \partial a_{n,\, n}},$$

obdržíme z posledního vzorce ještě

$$\frac{\partial^k \Delta'}{\partial A_{11}\, \partial A_{22} \ldots \partial A_{kk}} = \Delta^{n-k-1} \cdot \frac{\partial^{n-k} \Delta'}{\partial a_{k+1,\, k+1} \ldots \partial a_{n,\, n}}, \tag{9}$$

z čehož ještě zřejměji vysvítá poměr mezi původním determinantem a přidruženým.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

Mnohý horlivý učeň věd přírodních byl hned při prvním vstoupení do oboru mathematické krystallografie odstrašen překážkami pro něj zdánlivě nepřemožitelnými, poněvadž knihy