Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

O jedné větě pro racionální křivky třetího stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 1, 36--40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123446

$\overline{x18}$ kolmou k tečně T^1m, omezíme-li přímku $x18 \perp T^1m$ přímkou $\overline{17\,18} \parallel T^1m$.

Spustíme-li konečně s bodu 9 (na tečně T^1m ležícího) kolmici na přímku ${}^1m\,18$, protíná tato normálu v bodě ${}^1m$ křivky ${}^1M$ sestrojenou v hledaném středu křivosti o' této křivky.

O jedné větě pro racionální křivky třetího stupně.

Napsal **K. Petr.**

Budiž c_3 racionální křivka třetího stupně o dvou různých tečnách t_1, t_2 ve dvojném bodě. Tyto tečny nechť protínají přímku inflexních bodů v bodech A_1, A_2. Budiž k jakákoliv kuželosečka dotýkající se tečen t_1, t_2 v bodech A_1, A_2. Kuželosečka tato protíná c_3 v šesti bodech. Těchto šest bodů lze rozložiti ve dvě trojiny bodové B_1, B_2, B_3; B'_1, B'_2, B'_3. Označme za tím účelem inflexní body I_1, I_2, I_3. Zvolíme si kterýkoliv ze šesti bodů, ku př. B_1, a promítneme-li postupně ze tří inflexních bodů I_1, I_2, I_3 tento bod B_1 na kuželosečku k, dostaneme body B'_1, B'_2, B'_3 jedné trojiny a to jiné než té, ke které patří B_1. Podobný výrok lze učiniti ovšem též o B_2 a o B_3. Zvolíme-li si vhodně označení u zmíněných trojin, pak přímky

$$
\begin{array}{lll}
\overline{B_1B'_1},\ \overline{B_2B'_3},\ \overline{B_3B'_2} & \text{procházejí bodem } I_1, & \\
\overline{B_1B'_3},\ \overline{B_2B'_2},\ \overline{B_3B'_1} & \quad\text{„} \qquad\quad \text{„} \quad I_2, & \qquad (\mathrm{I}) \\
\overline{B_1B'_2},\ \overline{B_2B'_1},\ \overline{B_3B'_3} & \quad\text{„} \qquad\quad \text{„} \quad I_3. &
\end{array}
$$

Pojmenujeme dvě trojiny B_1, B_2, B_3; B'_1, B'_2, B'_3 takto určené trojinami sdruženými. Mezi svazek kuželoseček dotýkajících se tečen t_1, t_2 v bodech A_1, A_2 náleží jako jednoduchý případ kuželosečka k_0, jež se křivky c_3 dotýká ve třech bodech K_1, K_2, K_3 (bodech to zároveň, kde lze sestrojiti kuželosečku mající s křivkou c_3 šestibodový styk). Při této kuželosečce splývají obě trojiny bodové. Prochází pak tečna v K_1 ku c_3 bodem I_1, přímka $\overline{K_2K_3}$ inflexním bodem I_1 atd., kteréžto známé vztahy jeví se jakožto specielní případ věty (I).

Budiž B_1, B_2, B_3 jedna z trojin na kuželosečce k_1 svazku dotýkajícího se tečen t_1, t_2 v A_1, A_2; C_1, C_2, C_3 jedna z trojin na kuželosečce k_2 toho svazku. Pak platna jest věta

$$\begin{array}{lll} \overline{B_1C_1},\ \overline{B_2C_3},\ \overline{B_3C_2} & \text{procházejí bodem} & D_1, \\ \overline{B_1C_3},\ \overline{B_2C_2},\ \overline{B_3C_1} & \quad\text{"}\qquad\text{"} & D_2, \\ \overline{B_1C_2},\ \overline{B_2C_1},\ \overline{B_3C_3} & \quad\text{"}\qquad\text{"} & D_3. \end{array} \qquad \text{(II)}$$

D_1, D_2, D_3 jsou pak body na křivce c_3 a jsou jednou trojinou na kuželosečce k_3 našeho svazku.

Sestrojíme-li z B'_1, B'_2, B'_3 a C'_1, C'_2, C'_3 (trojin to sdružených ku B_1, B_2, B_3, resp. C_1, C_2, C_3) trojici třetí podobně jako ve (II.), dostaneme trojici D'_1, D'_2, D'_3 sdruženou té, jež plyne z B_1, B_2, B_3 a C_1, C_2, C_3.

Že výrok v (I.) lze pokládati jako zvláštní případ výroku ve (II), jest ihned patrno, neboť inflexní přímka jest jednou (degenerovanou) kuželosečkou svazku.

Věty uvedené připouštějí zcela jednoduchý důkaz počtem. Stačí je dokázati pro jednu jakoukoli křivku třetího stupně o dvou různých tečnách ve dvojném bodě, neboť uvedené vlastnosti jsou projektivné a všecky křivky třetího stupně s dvojným bodem o různých tečnách lze, jak známo, uvésti ve vztah projektivný. Přenechávaje podrobné provedení důkazu toho čtenáři, podotýkám jenom následující. Vyjádříme-li x, y, z souřadnice bodu na křivce jakožto racionální celistvé funkce parametru t, jsou stanoveny parametry inflexních bodů rovnicí třetího stupně

$$f(t) = at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0. \qquad (1)$$

Forma $f(t)$ má pro vyšetřování bodů na křivce mající vlastnosti projektivné, jak známo, význam základní. Parametry takových bodů jsou vesměs dány rovnicemi, jichž levé strany jsou kovarianty formy $f(t)$, (jsou-li ovšem pravé strany 0). Tak ku př. parametry bodů šestibodového styku s kuželosečkou jsou dány rovnicí

$$J(t) = (a^2d - 3abc + 2b^3)\,t^3 + \ldots = 0, \qquad (2)$$

a parametry dvojného bodu rovnicí

$$H(t) = (ac - b^2)\,t^2 + \ldots = 0,$$

kdež $J(t)$ a $H(t)$ jsou známé kovarianty formy $f(t)$.

Rovněž vztahy projektivné mezi různými body křivky lze vyjádřiti pomocí $f(t)$ a kovariantů této formy. Tak podmínku, aby tři body o parametrech t_1, t_2, t_3 byly na jedné přímce, dostaneme, položíme-li poláru formy $f(t)$

$$at_1t_2t_3 + b(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + c(t_1 + t_2 + t_3) + d$$

rovnu nulle.

Levá strana rovnice (1) jest lineární formou proměnných x, y, z, (neboť inflexní body leží na přímce); čtverec levé strany rovnice (2) jest kvadratickou formou týchž proměnných, (neboť jest kuželosečka, jež se dotýká c_3 v bodech šestibodového styku). Jest tedy levá strana rovnice

$$f(t)^2 - \mu J(t)^2 = 0 \tag{3}$$

kvadratickou formou proměnných x, y, z, obsahující ještě lineárně parametr μ a ustanovuje tudíž tato rovnice šest bodů křivky c_3, jež leží zároveň na kuželosečce jistého svazku. K tomuto svazku patří inflexní přímka dvojnásob počítána ($\mu = 0$) a dvě tečné v dvojném bodě vzhledem ke vztahu

$$Df(t)^2 - J(t)^2 = 4H(t)^3, \tag{4}$$

$\left(\mu = \frac{1}{D}\right)$; v tomto vztahu značí D diskriminant formy $f(t)$, $D = a^2d^2 + \ldots$ Jest to tudíž týž svazek, o kterém ve větách svrchu uvedených jest řeč.

Že se šest bodů (3) rozpadá na dvě trojiny, jest bezprostředně patrno; rovnice takové jedné trojiny jest

$$f(t) + \nu J(t) = 0. \tag{5}$$

Všecko ostatní, co bylo tvrzeno, plyne snadno počtem, zvolíme-li si pro $f(t)$ nějaký tvar jednoduchý, ku př. klademe-li $a = d = 1$, $b = c = 0$.

Uvažujme dále, jaké číslo ν_3 patří ke trojině D_1, D_2, D_3 stanovené ve (II), patří-li ke trojinám B_1, B_2, B_3, resp. C_1, C_2, C_3 čísla ν_1, resp. ν_2. Nejprve jest jasno, že vztah mezi ν_1, ν_2, ν_3 musí býti symmetrický a v každém z těchto čísel lineární; neboť dány-li jsou dvě z těchto trojin, třetí jest jednoznačně určena. Má tedy ten vztah tvar

$$p\,\nu_1\nu_2\nu_3 + q(\nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1) + r(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) + s = 0. \tag{6}$$

Avšak zvolíme-li si za trojiny B_1, B_2. B_3 a C_1, C_2, C_3 trojiny sdružené, jest dle (I) trojina D_1, D_2, D_3 trojinou inflexních bodů; t. j. jestliže $\nu_1 = -\nu_2$, jest $\nu_3 = 0$, z čehož plyne pro každé ν_1:

$$-q\nu_1^2 + s = 0$$

a tudíž $q = 0$, $s = 0$. Vzhledem k tomu nabývá vztah (6) tvaru

$$\nu_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{1 + p'\nu_1\nu_2}, \quad p' = \frac{p}{r}. \tag{6'}$$

Konstantu p' stanoviti můžeme z čísel patřících ke dvojnému bodu. Ve dvojném bodě soustředěny jsou dvě trojiny, jimž patří, jak patrno z (4), čísla $\pm \frac{1}{\sqrt{D}}$. I musí vztah (6') býti splněn při libovolném ν_1, položíme-li $\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}$, $\nu_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D}}$, kde ε jest buď 1 anebo -1. Dosazením těchto hodnot zjednáváme si $\varepsilon = -1$, $p' = D$ a jest tudíž ν_3 určeno touto rovnicí

$$\nu_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{1 + D\nu_1\nu_2}. \tag{6''}$$

Až doposud nebyl brán zřetel na realitu bodů; trojiny bodové, při nichž aspoň jeden bod jest reální, skládati se mohou (při reální křivce) buď ze tří reálních bodů anebo z jednoho reálního a dvou imaginárních. První případ nastává vždy, když $D < 0$, a druhý, když $D > 0$, jakož plyne z té okolnosti, že diskriminant rovnice (5) jest

$$D(1 - \nu^2 D)^2;$$

a má tudíž stejné znaménko jako D; následkem toho má rovnice (5) tři kořeny reální pro $D < 0$ a jenom jeden kořen reální pro $D > 0$ při každém ν.

Jestliže tedy $D > 0$ jest v každé trojině jenom jediný reální bod a určuje tudíž parametr ν každý bod *reální* křivky jednoznačně; toto jednoznačné určení bodu jest v podstatě jiné nežli parametrem t, jež jest *vůbec* jednoznačné. Pozoruhodna jest pak při tom jednoduchost podmínky pro parametry tří bodů ležících na jedné přímce. Než zajímavější jest případ $D < 0$, tu trojiny skládají se z bodů vesměs reálních. Při tom jest třeba vytknouti, že kořeny rovnice $f(t) + \nu J(t) = 0$ leží vždy po jednom mezi kořeny rovnice $f(t) = 0$ *) anebo po jednom mezi kořeny rovnice $J(t) = 0$. Dělí tudíž inflexní body křivku na tři části (a podobně body šestibodového styku) tak, že do jedné z těch částí připadá jeden bod každé reální trojiny a určuje na každé z těchto tří částí každé reální číslo ν jednoznačně příslušný bod.

V tomto případě ($D < 0$) lze s výhodou zavésti místo parametru ν parametr jiný ϱ, definovaný touto rovnicí.

$$\nu = \sqrt{-D}\, tg\, \pi\varrho, \quad 0 \leqq \varrho \leqq 1.$$

Tento parametr rovněž přiřaďuje každému bodu křivky c_3 jedno číslo reální a naopak každému číslu $0 \leqq \varrho \leqq 1$ přiřaděn jest na jedné ze tří částí jediný bod příslušné trojiny; má však tu výhodu další, že podmínka, aby tři trojiny o parametrech $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ byly ve vztahu vyznačeném (II), nabývá tohoto zcela jednoduchého tvaru

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = \text{celému číslu.}$$

Následkem této jednoduché formy lze některé otázky vztahující se ke trojinám bodovým (5) zcela snadno rozřešiti. Ku př. lze ze tří trojin (pro něž neplatí podmínka právě uvedená), sestrojiti řadu dalších trojin dle (II). Tázati se můžeme, kdy dostáváme tak ze tří trojin o parametrech $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ jenom konečný počet trojin? Odpověď jest téměř bezprostřední: čísla $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ musí býti racionální; počet trojin totiž, jež takovýmito třemi trojinami a větou (II) jsou dány, jest, jak snadno zjistiti, rovný nejmenšímu společnému jmenovateli rozdílů čísel $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$.

---

*) Tomu jest takto rozuměti. Jsou-li $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ kořeny rovnice $f(t)$, tu leží mezi α_1 a α_2 jeden kořen oné rovnice, druhý mezi α_2 a α_3 a třetí jest buď menší nežli α_1 anebo větší než α_3. Aby se to dokázalo, stačí v úvahu vzíti nějaký specielní případ, při němž ovšem $f(t) = 0$ má všecky kořeny reální a zvoliti si při tom jakoukoli hodnotu pro ν, neboť ta vlastnost se projektivnou transformací nemění, a jak snadno patrno, platí-li pro jedno ν, platí pro každé ν. Položme $\nu = \infty$ a $f(t) = 3t^2 + 3t$, pak jest $J(t) = 2t^3 + 3t^2 - 3t - 2 = (t-1)(2t+1)(t+2)$. Kořeny rovnice $f(t) = 0$ jsou $-1, 0, \infty$, kořeny pak $J(t) = 0$ jsou $-2, -\frac{1}{2}, 1$ a tím tvrzení dokázáno.