Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 2 (1873), No. 2, 144–145

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123471

Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech.

(Podává dr. *F. J. Studnička.)*

(Pokračování).

Na str. 74. tohoto časopisu vyložen jest přímý způsob, jakým možná ustanoviti obsah čtyrstěnu, znají-li se souřadnice jeho rohů. Ač způsob tento jest zcela přirozený a přímý, jest v celku dosti rozvláčný, pročež zasluhuje povšimnutí i každý jiný rychleji, byť i nepřímě k cíli vedoucí.

Způsobů takových podáno již několik, jak *R. Baltzer* nedávno vyložil *), chtěje jednoduchý způsob svůj odporučiti. K těmto pak připojiti sluší i následující:

Značí li x_k, y_k, z_k souřadnice bodu B_k a B_1 prozatím bod počáteční, takže

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0$$

a spustíme li z bodu B_2 — obr. 8. — kolmou $B_2 P$ na rovinu $B_1 B_3 B_4$, bude pro $B_1 B_k = r_k$

$$2 B_1 B_3 B_4 = r_3 r_4 \sin a_{34},$$

$$B_2 P = r_2 \sin a_{23} \sin (P_2 P_4),$$

kdež význam jednotlivých písmen podle článku uvedeného jest patrný; i jest tudíž

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin a_{23} \sin a_{34} \sin (P_2 P_4),$$

aneb zavedeme-li rožný sinus **)

$$6T = r_2 r_3 r_4 \sin O; \tag{1}$$

a poněvadž, jak známo, též platí

$$\sin^2 O = \begin{vmatrix} 1 & , \cos a_{23}, & \cos a_{24} \\ \cos a_{23}, & 1 & , \cos a_{34} \\ \cos a_{24}, & \cos a_{34}, & 1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

obdržíme z tohoto vzorce, zavedeme-li α_k, β_k, γ_k co kosinusy úhlů, jež uzavírá r_k s osami souřadnicovými, podle poučky

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1,$$

$$\alpha_k \alpha_i + \beta_k \beta_i + \gamma_k \gamma_i = \cos a_{ki},$$

---

*) Viz „Berichte über die Verhandlungen der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig," 1870. pag. 97—98.

**) Viz *Studnička* „Základové sférické trigonometrie" pag. 10.

$$sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, & \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, & \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4 \\ \alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4 + \gamma_2\gamma_4, & \alpha_3\alpha_4 + \beta_3\beta_4 + \gamma_3\gamma_4, & \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 \end{vmatrix}$$

a tudíž podle známého pravidla o násobení determinantů platícího

$$sin^2 O = \begin{vmatrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, \\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, \end{vmatrix}^2,$$

načež poslední vzorec pro $6T$ se promění v

$$6T = \begin{vmatrix} r_2\alpha_2, & r_2\beta_2, & r_2\gamma_2 \\ r_3\alpha_3, & r_3\beta_3, & r_3\gamma_3 \\ r_4\alpha_4, & r_4\beta_4, & r_4\gamma_4 \end{vmatrix};$$

považíme-li pak, že tu všeobecně

$$r_k\alpha_k = x_k, \quad r_k\beta_k = y_k, \quad r_k\gamma_k = z_k,$$

obdržíme pro obsah čtyrstěnu, jehož roh leží v bodu počátečním, vzorec

$$6T = \begin{vmatrix} x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

z něhož povstane vzorec známý

$$6T = \begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & z_4 - z_1 \end{vmatrix}, \tag{4}$$

má-li bod B_1 souřadnice x_1, y_1, z_1.

Ještě rychleji se přijde k cíli, užije-li se normálního tvaru rovnice roviny $B_1\ B_3\ B_4$ a vyjádří-li se vzdálenost bodu B_2 od této roviny vzorcem

$$B_2P = x_2 \cos\alpha + y_2 \cos\beta + z_2 \cos\gamma;$$

abychom určili tyto kosinusy, promítněme plochu $B_1\ B_3\ B_4$, jak *Baltzer* v uvedeném pojednání činí, na jednotlivé roviny souřadnicové, načež snadno obdržíme,
značí-li p ploský obsah tohoto trojúhelníku.

$$\cos\alpha = \frac{p_{yz}}{p}, \quad \cos\beta = \frac{p_{zx}}{p}, \quad \cos\gamma = \frac{p_{xy}}{p};$$

dosadíme-li pak tyto hodnoty do vzorce předešlého, bude

$$6T = 2x_2 p_{zy} + 2y_2 p_{zx} + 2z_2 p_{xy},$$