Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Nikolaj Podtjagin

Limite supérieure du module du produit canonique d'ordre infini

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 6, 161--162

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123596

entiers, $\sum_{i=1}^{r} k_i$ est impair et $n_i \varepsilon M$, et par M_2 l'ensemble des nombres $\sum_{i=1}^{r} k_i n_i$, [les notations étant les mêmes que ci-dessus et $\sum_{i=1}^{r} k_i$ étant pair, M_1 satisfait également à la condition de la proposition 1 (donc $M_1 D(M_1) = 0$ et la mesure intérieure (au sens de M. Lebesgue) des deux ensembles M_1 et M_2 est nulle.

Proposition 2. Quel que soit l'ensemble de nombres réels positifs M qui satisfait à la condition de la proposition 1, on peut décomposer l'ensemble de tous les nombres réels en deux sous-ensembles complémentaires E et CE tels que $M[D(E)+D(CE)]=0$.

Proposition 3. Il existe un ensemble linéaire E tel que l'ensemble $D(E) + D(CE)$ ne contient pas une infinité non dénombrable de nombres réels positifs.

Remarque. Soit E un ensemble linéaire tel que $D(E) + D(CE)$ ne contient pas tous les nombres réels positifs et soit M l'ensemble de tous les nombres réels positifs qui n'appartiennent pas à cet ensemble.

Il résulte de ce qui précède que la mesure intérieure de M est nulle. D'autre part, on voit sans peine que l'ensemble M est sousensemble de l'un des ensembles E ou CE, mais ne coïncide jamais avec cet ensemble, s'il n'est pas dépourvu d'éléments.

Proposition 4. Si E est un ensemble linéaire de mesure (lebesguienne) nulle ou de première catégorie de Baire, CE a pour ensemble des distances l'ensemble de tous les nombres réels non négatifs.

Proposition 5. Si E est un ensemble ouvert, fermé ou analytique non mesurable (B), l'un au moins des ensembles E et CE a pour ensemble des distances l'ensemble de tous les nombres réels non négatifs.

Limite supérieure du module du produit canonique d'ordre infini.

N. Podtjagin, Praha.

Le but de la communication est de donner une application de la théorie de la croissance exposée par l'auteur dans ses deux mémoires, publiés dans les „Annali di Matematica" (1927—1928, 1931). Les recherches sont basées sur le théorème suivant, communiqué par l'auteur au Congrès des savants russes à Sofia en 1930: — Toute fonction régulière $\varphi(u)$ vérifie, à partir d'une certaine valeur de u, l'inégalité

$$\varphi\left[u + q\frac{u}{\nu(u)}\right] < \left(\frac{1}{1-q} + \varepsilon\right)\varphi(u),$$

où q est un nombre positif quelconque, inférieur à un, et

$$\nu(u) = \frac{u\,\varphi'(u)}{\varphi(u)}.$$

Pour un produit canonique

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

on pose

$$|\,a_n\,| = r_n;\ \log r_n = \mathrm{u}(n);\ \frac{\log n}{\mathrm{u}(n)} \leqq \varphi\,[\mathrm{u}(n)],$$

où $\varphi(u)$ est une fonction croissante régulière. Si $\lim\limits_{n=\infty} \nu(u) = +\infty$, on prend

$$p_n = [a\nu\,\{\mathrm{u}(n)\}\,\varphi\,\{\mathrm{u}(n)\}],$$

les crochets signifiant la partie entière de la quantité renfermée entre eux. En posant

$$F(z) = \prod_{n=1}^{l-1} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right);\ Q(z) = \prod_{n=l}^{m-1} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right);$$

$$R(z) = \prod_{n=m}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right),$$

où l est le plus petit nombre entier pour lequel on a $\mathrm{u}(n) > \log r$, m est le plus petit nombre entier pour lequel on a

$$\mathrm{u}(n) > \log r\left[1 + \frac{q}{\nu\,(\log r)}\right],$$

on démontre facilement que

$$\log|\,P(z)\,| < r^{(1+a+\varepsilon)\varphi(\log r)};\ \log|\,Q(z)\,| < r^{\left(\frac{1}{1-q}+\varepsilon\right)\varphi(\log r)}.$$

Le logarithme du module du produit R(z) sera inférieur à un, si l'on prend $a = \frac{1}{q} + \varepsilon_1$. Pour cette valeur de a et pour $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ on aura

$$1 + a = \frac{1}{1-q} + \varepsilon_1$$

et, par conséquent,

$$\log|\,F(z)\,| < r^{(\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})+\varepsilon)\varphi(\log r)} < r^{2,62\,\varphi(\log r)}.$$