Josef R. Vaňaus

O pohybování těles vržených

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 6, 262--267

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123673

Daná přímka A_1 budiž orthogonálným průmětem přímky A v rovině kružnice K ležící; průsečíky přímky A_1 s ellipsou budou pak průměty průsečíků x, y čar A a K. Sklopíme-li útvary A i K do roviny ellipsy kol průměru ab, sjednotí se K s K'; bod p na přímce A jest stálý, tětiva bc přijde do polohy bc', průsečík m přímek A a bc do polohy m' a přímka A tedy do polohy $pm' = A'$. Abychom posléze otočili průsečíky x' a y' čar A' a K' do přímky A kol osy ab zpět, učiňme $x'x_1 \perp ab$, $y'y_1 \perp ab$; body x_1 a y_1 jsou průměty průsečíků čar A a K, tudíž body žádanými. Přímky $m_1 m'$, $y' y_1$, $x' x_1$ jsou průměty kruhových oblouků, jež body m, y, x při otáčení svém kol osy ab vytvořují.

Úloha 1. Řešiti úlohu *c)* dle 2. spůsobu úloh *a)* a *b)*, t. danou ellipsu považovati za centrálný průmět kružnice K v rovině SU, která sklopena byvši kol stopy S (tečny ellipsy ve vrcholu) do průmětny, s kružnicí křivosti ve vrcholu ellipsy se sjednocuje; kterak ustanoví se tu šířka pásu SU'?

Úloha 2. Řešiti veškeré úlohy o tečnách křivek stupně druhého na základě daných os pomocí týchž centrálných průmětů kružnic.

O pohybování těles vržených.

Sestavil

Dr. Jos. R. Vaňaus.

Jest obyčejem zákony o pohybování těles vržených rozvrhovati dle rozličných směrů vrhu a jednati o vrhu vodorovném, svisném a šikmém zvláště, čímž tato nauka pozbývá poněkud své vnitřní souvislosti, kterouž by jinak k dokonalejšímu porozumění těch zákonů valně přispěti mohla.

Také spůsob pojednání nedovede mnohdy mysl upoutati v míře, zajímavosti toho úkazu přiměřené. Účelem následujících řádek jest tedy zákony o pohybování těles vržených v prostoru bez překážek podati vzorcem přesnějším i obecnějším, z něhož by všechny zvláštní případy snadno odvoditi se daly.

Vrhneme-li nějaké těleso rychlostí c směrem, který s rovinou vodorovnou libovolný úhel α uzavírá (elevace), postupuje těleso rychlostí $c \cos\alpha$ (co složkou vodorovnou) a počíná vystupovati rychlostí $c \sin\alpha$ (jakožto složkou protisvisnou). Postupování děje se bez překážek stejnoměrně a dráha za dobu t proběhnutá byla by

$$t c \cos\alpha = x = OB; \tag{1}$$

avšak vystupování následkem tíže stále protiúčinkující nepřetržitě rovnoměrně se zmenšuje, takže za dobu t bude rychlost ve směru protisvisném jen

$$c \sin\alpha - gt \tag{2}$$

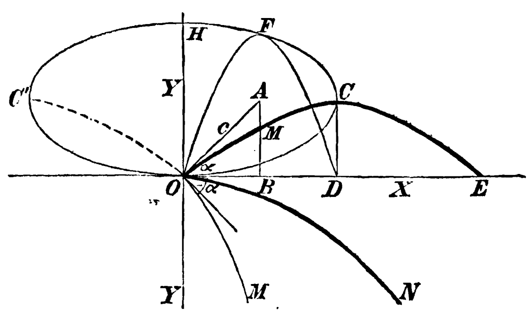
a výše, které těleso za tu dobu dostoupí, bude o tolik menší, mnoho-li těleso pádem současně skleslo. Skutečná výška $BM = y$ (obr. 22.) za dobu t dá se tedy vyznačiti takto

$$y = BA - AM = t \,.\, c \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

aneb

$$t^2 - \frac{2c}{g} \sin\alpha \, t = - \frac{2}{g} \,.\, y \tag{3}$$

Obr. 22.



Z analytického výrazu tohoto je patrno, že výška jsouc úkonem proměnné t, v rozličných dobách bude rozličná a dá se naznačiti křivkou rov. (3) příslušnou. Tato však jest parabolou, při níž počátek souřadnic O nalezá se v obvodu, jak v jednom článku tohoto časopisu ukázáno bylo, a stálá veličina $\frac{c \sin\alpha}{g}$

udává úměrnou úsečky vrchole $\xi = OD$, totiž onu dobu, v které těleso vrchole paraboly čili nejvyššího bodu dostoupí. Veličina

$$2\xi = \frac{2c \sin \alpha}{g}$$

jest pak doba k proběhnutí celé dráhy OE potřebná, jakož ji i řešení rovnice (3) ihned podává. Hledáme-li totiž kořeny rov. (3), to jest dobu, za kterou výška y bude se nulle rovnati, nalezneme $t_1 = o$, to jest na počátku pohybu a

$$t_2 = \frac{2 c \sin \alpha}{g}$$

za dvojnásobnou dobu vystupování.

Tím dokázáno, že doba vystupování rovná se době ve které těleso s vrchole opět k rovině vodorovné sklesne, čehož je dle rov. (2) nutným následkem, že i rychlost, s kterou dolů dopadne, rovnati se bude té, s kterou původně vystupovati počalo. Jest tedy i přibývání na rychlosti s vrchole dolů rovnoměrné.

Vložme do rov. (3) za dobu t jí úměrnou hodnotu dráhy dle rov. (1).

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha}$$

pak obdržíme po krátké redukci

$$x^2 - \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} x = -\frac{2c^2 \cos^2 \alpha}{g} y$$

aneb jestliže k oběma stranám rovnice druhou mocnost veličiny

$$\frac{c^2}{2g} \sin 2\alpha = \frac{c^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha$$

připočítáme a výraz upravíme zároveň za stálou veličinu

$$\frac{c^2}{2g} = a$$

kladouce,

$$(x - a \sin 2\alpha)^2 = -4a \cos^2 \alpha \, (y - a \sin^2 \alpha)\,. \qquad (4)$$

Rovnice tato jest analytickým výrazem dráhy vrženým tělesem proběhnuté. Porovná-li se s všeobecnou rovnicí paraboly při této poloze

$$(x - \xi)^2 = -2p\,(y - \eta)\,,$$

kde zvláštní souřadnice ξ, η stanoví polohu vrchole ku počátku osnovy, jest parametrem paraboly vrhu

$$2p = 4a\cos^2\alpha = \frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}; \qquad (5)$$

dále

$$\xi = a\sin 2\alpha = \frac{c^2}{2g}\sin 2\alpha = OD \qquad (6)$$

jest poloviční dálkou vrhu a tedy celou čili největší dálkou jest

$$2\xi = \frac{c^2}{g}\sin 2\alpha = OE;$$

a

$$\eta = a\sin^2\alpha = \frac{c^2}{2g}\sin^2\alpha = DC \qquad (7)$$

jest pak největší výškou, které při tomto vrhu těleso dostoupiti může. Zvláštní případy jsou tyto:

Je-li úhel $\alpha = 90^0$, bude dle rov. (5) (6) (7)

$$\xi = 0 \quad \eta = a = \frac{c^2}{2g}, \quad p = 0 \quad \text{a} \quad t = \frac{2c}{g} \quad \text{dle rov. (3)}$$

to jest těleso směrem protisvisným vržené dostoupí za dobu $\frac{c}{g}$ výše $\frac{c^2}{2g}$ a za tutéž dobu směrem svisným spadne s touž rychlostí, jakou bylo vyhozeno, v původní místo nazpět.

Je-li úhel vrhu $\alpha = 0$, bude $\xi = 0$ a $\eta = 0$ a rovnice (4) přejde v

$$x^2 = -4ay = -\frac{2c^2}{g}y,$$

kteráž jest rovnicí paraboly, jejíž parametr

$$2p = \frac{2c^2}{g}$$

a počátek souřadnic nalezá se ve vrcholi.

Těleso ve směru vodorovném vržené klesá ihned pod rovinu vodorovnou pohybujíc se v parabole (ON) po dobu neurčitou $t = \frac{x}{c}$, pokud se nějakou překážkou další pohyb nezamezí.

Pro všecky úhly vrhu, které jsou mezi 90^0 a 0^0 obsažené, bude i výška i dálka vrhu rozličná. Klesá-li úhel α od 90^0 až po 45°, vzrůstá dálka od nully až po největší hodnotu $= 2a = \frac{c^2}{g}$, načež pak při dalším zmenšování úhlu α od 45° až po nullu dálky opět ubývá od $2a$ až po nullu.

Výška vrhu při ubývání úhlu α od 90° až po 0° neustále klesá od své největší hodnoty $a = \frac{c^2}{2g}$, které při $\alpha = 90°$ dosahuje, až po nullu, je-li $\alpha = 0$. Vůbec jest geometrickým místem všech největších výšek při rozličném úhlu vrhu nebo geometrickým místem vrcholů všech parabol těmi vrhy povstalých ellipsa, jejíž menší osa $(2b)$ rovná se velké poloose čili veličině $a = \frac{c^2}{2g}$ a počátek souřadnic je v průseku menší osy s ellipsou, tak, aby celá ellipsa nad osou úseček se nalezala. Pokud úhel α jest kladný a v mezích 90°. . . 0°, jest to polovice ellipsy ve výkresu *HFCO*. Že tomu tak, plyne z úvahy následující.

Poznamenáme-li souřadnice vrchole paraboly jako dříve ξ, η, vyznačí se dle rovnice (4) poloha vrchole výrazem

$$\xi^2 = 4a \cos \alpha^2 . \eta \qquad (8)$$

ješto počátek osnovy v obvodu paraboly se nalezá. Mezi ξ, η a úhlem vrhu jest ale ta vzájemnost, že

$$tg\, \alpha = \frac{2\eta}{\xi} \qquad (9)$$

Vyloučí-li se z rov. (8) a (9) proměnná veličina α, zbude po krátkém upravení rovnice

$$\xi^2 = 4\,(a\eta - \eta^2) \qquad (10)$$

kteráž s rovnicí ellipsy v této poloze

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\,(2by - y^2)$$

úplně souhlasí, když

$$a = 2b = \frac{c^2}{2g}\,.$$

Pro všecky záporné hodnoty úhlu α, to jest pro všecky směry vrhu, které se pod rovinu vodorovnou sklánějí, obdržíme dle rov. (4)

$$(x + a \sin 2\alpha)^2 = -4a \cos^2 \alpha \, (y - a \sin^2 \alpha)$$

co analytický výraz dráhy tělesa.

Jest to tedy opět dráha parabolická, na př. OM, avšak vrchol každé takové paraboly nalezá se, jak znaménko veličiny $a \sin 2\alpha$ ukazuje, na záporné straně osy úseček, takže geometrickým místem všech vrcholů těch parabol objeví se druhá polovice ellipsy $OC'H$. Kdyby úhel vrhu v oboru hodnot záporných té největší hodnoty dosáhl, totiž $\alpha = -90^0$, pohybovalo by se těleso směrem svisným k zemi do hloubky neurčité, jak rovn. (4) ukazuje.

Mohla by se však podlé rov. (3) pokaždé vzdálenost pod rovinou vodorovnou čili výška záporná za určitou dobu t vypočítati, totiž

$$-y = ct + \frac{1}{2} gt^2.$$

Zároveň patrno z téže rovnice, že vyjma $t = 0$ t. j. na počátku pohybu, nelze již nikdy výšku učiniti rovnou nulle.*)

Mathematická nauka o plynech.

Podlé Langa sestavil

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

§. 10.

O vnitřím tření.

Pohybují-li se částice plynu nějakého jedním směrem a jsou-li rychlosti jejich v rozličných vrstvách rozličné, položme do směru tohoto pohybu rovinu XY co vrstvu základní. S jedné strany přicházejí částice s určitou rychlostí, která se však při průchodu touto vrstvou zmenšuje. Abychom vypočítali tuto

*) Srovnej *Studnička* „O grafickém znázornění zákonů vrhu v prázdném prostoru.“ *Krok* 1866.