Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

Gaussiana

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 4, 197--200

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123677

Gaussiana.

Sestavil

Dr. F. J. Studnička.

V dopisech, jež *Gauss* během 48 let, od r. 1808 totiž až do r. 1850, *Schumachrovi*, příteli svému obzvláště milému a nanejvýš oddanému, při rozmanitých příležitostech zasílal a jež po jeho smrti v 6 svazcích *Peters* vydal,*) vyskytuje se též velmi mnoho zajímavých drobností mathematických, z nichž tuto některé chceme uveřejniti, abychom ukázali, že slavný tento učenec i drobným věcem věnoval stejnou pozornost jako problemům obsáhlým.

I.

V dopisu ze dne 30. června 1840 oznamuje *Schumacher*, že v Hamburce veřejně vystoupil *Zachariáš Dahse*, aby nadobyčejnou zručností svou počtářskou získal nejen obdivu, nýbrž i hmotného uznání; při tom poznamenává, že hbitý počtář tento velmi rád ustanovuje z hlavy *pátou odmocninu* z úplné mocniny, poněvadž končí touže číslicí jako daná mocnina, což ostatně platí o každé odmocnině stupně $(4n+1)$ho. „Lässt sich dies einfach beweisen?“ ptá se ku konci Gausse.

Na to odpovídá v dopise svém ze dne 6. července 1840 *Gauss* asi takto: Značí-li a číslo celistvé s 5 nesoudělné, platí podlé Fermatovy poučky**)

1. $a^4 \equiv 1 \pmod 5$,

a tedy i 2. $a^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

jakož i 3. $a^{4n+1} \equiv a \pmod 5$;

ale vzorec (3) platí i pro ten případ patrně, že a jest pětkou dělitelno, tedy všeobecně pro každé celistvé a. Mimo to jest však též

4. $a^k \equiv a \pmod 2$,

kdež a značí libovolné a k positivní nějaké číslo celistvé, po-

---

*) „Briefwechsel zwischen *C. F. Gauss* und *H. C. Schumacher*“ herausg. von *C. A. F. Peters*. Altona 1862.

**) Viz *Studnička* „Základové náuky o číslech“ pag. 92.

něvadž každá mocnina čísla sudého jest sudé, čísla lichého pak liché číslo; i jest tedy

5. $a^{4n+1} \equiv a$ (mod 5) a (mod 2),

pročež 6. $a^{4n+1} \equiv a$ (mod 10),

čímž důkaz všeobecně jest proveden. Odečte-li se tedy od mocniny původní číslo nebo-li základ, povstane na konci 0 a končí tudíž mocnina stupně $(4n+1)$ho touže číslicí jako základ.

II.

V dopise ze dne 19. července 1844 prosí *Schumacher* ochotného přítele svého, by s ním opětně sdělil průkladný vzorec, který mu dříve v Gottinkách osobně vyložil a při němž užívá se jen *sudých* rozdílů. Dne 21. července t. r. odpovídá již *Gauss* asi takto:

Interpolace provádí se podlé tohoto schematu:

Argum.	Funkce	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.	6. Diff.
*	*						
		*					
*	*		*				
		*		*			
*	*		*		*		
		*		*		*	
p	a		b		c		d
		*		*		*	
$p+d$	a_1		b_1		c_1		d_1 . . .
		*		*		*	
*	*		*		*		
		*		*			
*	*		*				
		*					
*	*						

A pak jest hodnota funkce, příslušná k argumentu $p + \frac{1}{2} d$, vyjádřena vzorcem

$$\frac{1}{2}\left[(a+a_1) - \frac{1}{8}(b+b)_1 + \frac{1.\ 3}{8.16}(c+c_1) - \frac{1.\ 3.\ 5}{8.16.24}(d+d_1) + \ldots\right]$$

při němž zákon, jak se dále má pokračovati, velmi zřejmě jde na jevo.

Aby objasnil spůsob, jak se tohoto vzorce užívá, připojuje ihned příklad a sice tento: Má se určiti z tabulek, v nichž postupují desetimístné logarithmy tangent po jednotlivých stupních, log. tg. $30^0\ 30'$. Tu jest

27°	9·6570467 649						
		+145625 260					
28°	9·6716092 909		— 6005 878				
		139619 382		+374 248			
29°	9·6855712 291		5631 630		— 37 052		
		133987 752		337 196		+ 4 688	
30°	9·6989700 043		5294 434		32 364		— 722
		128693 318		304 832		3 966	
31°	9 7118393 361		4989 606		28 378		594
		123703 716		276 454		3 372	
32°	9·7242097 077		4713 148		25 006		
		118990 568		251 448			
33°	9·7361087 645		4461 700				
		114528 868					
34°	9·7475616 513						

Upravíme-li pak vzorec průkladný tak, aby se od konce začalo a co nejméně počítalo, dáme-li mu tedy tvar

$$\frac{1}{2}\left\{a+a_1-\frac{1}{8}\left[b+b_1-\frac{3}{16}(c+c_1-\frac{5}{24}\{d+d_1-\ldots\})\right]\right\}$$

obdržíme pro log. tg. 30° 30′ tento počet:

— 1316,	— 60 742,	— 10284 036,	19,4108093 404
,	+ 274,	11 338,	+ 1284 088
	— 60 468,	— 10272 698,	19 4109377 492,
			9·7054688 746,
	a v tabulkách stojí		9·7054688 745.

K tomu konečně přidána poznámka, že na zvláštní tabulce provádí pomocné výpočty $\frac{5}{24}.1316=274, \frac{3}{16}.60468=11338$, $\frac{1}{8}\cdot 10272698=1284088$, kdež na konci položil 8 místo 7, aby v součtu příslušném obdržel na konci taktéž číslici sudou (2) a tudíž při půlení nebyl na rozpacích (jako osel mezi dvěma otýpkami „entre deux foins,“ praví tu žertovně).

III.

V psaní, jež dne 26. září 1844 napsal, přidal *Gauss* na konci poznámku, jak se určí součet čísel krychlových spůsobem velmi snadným a jednoduchým. Jestiť

$$a^3=a\left\{\begin{matrix}1+ & 2+ & 3+\ldots+a-1 \\ a-1+a-2+a & -3+\ldots+ & 1\end{matrix}+a\right\}$$
$$=a\{2\,\Sigma(a-1)+a\}=[\Sigma(a-1)+a)^2-[\Sigma(a-1)]^2$$
$$=[\Sigma a]^2-[\Sigma(a-1)]^2,$$

z čehož jde přeložením negativního členu posledního

$$[\Sigma a]^2=[\Sigma(a-1)]^2+a^3.$$

Zavedeme-li do vzorce posledního za a postupně $a-1$, $a-2, \ldots, 1$, zjednáme si, sečtouce na obou stranách, ihned

$$[\Sigma a]^2 = a^3 + (a-1)^3 + (a-2)^3 + \ldots + 8 + 1 = \Sigma a^3,$$

což jest právě hledaný vzorec, jejž obyčejně *) vyjadřujeme tvarem

$$\Sigma a^3 = [(a+1)_2]^2.$$

IV.

Dne 17. října 1847 připojil *Schumacher* k svému dopisu poznámku, že v *Kästnerově* zprávě o mathematických knihách, již prý nazývá „Geschichte der Mathematik", četl v III. díle na str. 294 úlohu o třech střelcích, kteří od sebe vzdáleni byli resp. 50, 66 a 104 stop a zároveň všichni byli stejně daleko totiž 65 stop od žerdi, na níž byl pták dřevěný a známý terč postaven. Kästner prý tu činí pozastávku, že není snadno vyjádřiti strany trojúhelníku čísly celistvými tak, aby i poloměr kruhu opsaného byl vyjádřen číslem celistvým.

Na to odpovídá *Gauss* v dopise ze dne 21. října, že se nechce pouštěti do rozboru této zvláštní úlohy, nýbrž že mu raději podá ihned všeobecné její řešení.

Značí-li totiž a, b, f, g libovolná celistvá čísla positivní a sestrojíme-li trojúhelník, jehož strany jsou

1. $4abfg\,(aa+bb)$
2. $4ab\,(f+g)\,(aaf-bbg)$ neb $4ab\,(f+g)\,(bbg-aaf)$ podlé toho, je-li $aaf \gtrless bbg$
3. $4ab\,(aaff+bbgg)$,

pak vyjadřuje se poloměr opsaného kruhu příslušného číslem

$$(aa+bb)\,(aaff+bbgg).$$

Čísla *Curtiova,* jež *Kästner* uvádí, obdrží se pro

$$a=1,\ b=2,\ f=10,\ g=1,$$

zkrátí-li se společným dělitelem 8.

---

*) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních" pag. 146.