Jan Kaloušek

Řešení číselných rovnic vyšších prokladem arithmetických řad rozdílových. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 4, 234--239

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123960

kolmice $^1v^1l$ *a* $^2v^2l$ *protínají normalu* N′, *respekt.* N″ *v bodech* ^1l *respekt.* ^2l, *jimiž jest určena přímka* L *protínající normalu* N *ve středu křivosti s.**)

Z projektivnosti svazků paprsků ^1N, ^2N, ^3N, ... a svazku rovnoběžných paprsků ^1Q, ^2Q, ^3Q, ... vyplývá, že i řada bodů ^1v, ^2v, ^3v, ... jest projektivná se svazkem ^1N, ^2N, ^3N, ... *a proto dvojpoměr*

$$(TN^1N^2N)$$

čtyř paprsků svazku tohoto roven dvojpoměru příslušných čtyř bodů

$$(as^1v^2v)$$

na normale N.**)

Je-li jedna z křivek A′A″ křivkou kruhovou a jest-li druhá se promění v bod, stane se křivka K *ovalem Cartesiovým;* jest-li se mimo to poměr μ stane rovným jednotce positivné nebo negativné, promění se křivka K v křivku hyperbolickou respekt. elliptickou. Nabude-li křivka kruhová poloměru nekonečně velikého t. j. stane-li se přímkou, pak dle hodnoty poměru μ bude křivka K některou křivkou 2. stupně.

Ve všech těchto případech lze s prospěchem užíti uvedené konstrukce středu křivosti, kteráž se mimo to valně zjednoduší.

Řešení číselných rovnic vyšších prokladem arithmetických řad rozdílových.

Podává

Jan Koloušek,

professor českoslovanské obchodní akademie v Praze.

Sepisuje svou Arithmetiku národohospodářskou***), měl jsem příležitost seznati, jak prokladem vyšších řad rozdílových lze

*) 1. *A. Mannheim: „Principes et Développements de Géometrie Cinématique“* 1894., pag. 489, construction (2).

2. *Dr. L. Burmester: „Lehrbuch der Kinematik“*. 1888. Pag. 90.

**) *František Machovec: „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody“*. 1883., pag. 86.

***) Vyšla nákladem „St. Pospíšila zetě, J. Scholle“ v Chrudimi r. 1888 jakožto IV. díl „Nauk obchodních“, vydávaných professorským sborem akademie chrudimské.

řešiti velmi složité a jinak pouze velmi namáhavě řešitelné číselné rovnice vyšších stupňů. Postupem doby dalším zkoumáním shledal jsem, že takovým způsobem doporučuje se vůbec hledati kořeny číselných rovnic vyšších stupňů. Aby tato methoda a její výhody zvláště vynikly, odhodlal jsem se podati zde na ukázku několik příkladů. Podržen tu bude historický postup, jakým se mi podobné příklady nahodily v „Arithmetice národohospodářské" a ke konci podáno bude stručné navedení k řešení takovému u rovnic vyšších stupňů vůbec.

Příležitost ku hledání kořenů prokladem podala rovnice pro hodnotu *důchodu jistého* (annuity) trvajícího n lhůt. Důchodem tím rozumíme stále stejné požitky a brané koncem lhůty, a požitků takových ať je celkem na počet n. Patrně bude si lze mysliti, že a je úrok braný z jistého kapitálu D a že úrok ten přestane se pak platiti, až uplyne n lhůt, jinými slovy, že od kapitálu D, (který nese za lhůtu úrok a), nutno odečísti kapital téhož sice obnosu, ale splatný teprve po n lhůtách [kdy totiž přestávají požitky a za každou lhůtu]. Jestliže jest úrokovací procento p za lhůtu (buď za rok, nebo za půlletí, čtvrtletí, měsíc atd.), bude tedy hodnota důchodu jistého n lhůt trvajícího:

$$D_n = D - \frac{D}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

Je-li však a úrok za jednu lhůtu z kapitalu D, bude patrně kapital:

$$D = \frac{100\,a}{p}$$

a tedy rovně po dosazení za D do rovnice předešlé:

$$D_n = \frac{100\,a}{p} - \frac{100\,a}{p\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}. \qquad \text{(I)}$$

Tato rovnice (I) se může také upraviti jinak, zavedeme-li známou hodnotu úročitele

$$u = 1 + \frac{p}{100}$$

a bude tedy zníti:

$$D_n = \frac{a}{u-1} - \frac{a}{(u-1)\,u^n}. \qquad (\mathrm{I}')$$

Rovnice (I) a (I′) jsou rovnice $n+1$-vého stupně, pokud se týče veličin p a u a řešení jich obvyklými způsoby jest dosti pracné, má-li se zjednati jen trochu více míst spolehlivých pro úrokovací procento.

Aby se to poznalo, uvedeme příklad tento: Dlužník vypůjčil si 1,000.000 zl. a slíbí za to platiti 55.000 ($5\frac{1}{2}\%$ z původně vypůjčeného kapitalu) v ročních lhůtách a sice po 35 let. Těmito 35-ti annuitami bude kapital úplně splacen. Jaké jest úrokovací procento?

Rovnice (I) v tomto příkladě zní:

$$1{,}000.000 = \frac{55.000 \,.\, 100}{p} - \frac{55.000 \,.\, 100}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{35}}$$

a je stupně 36-tého. Upravme ji takto:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{35}} - \frac{1{,}000.000}{5{,}500.000} = 0$$

či

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{35}} - 0{\cdot}18\dot{1}81\dot{8}\ldots = 0.$$

Zaveďme pak znak:

$$f\,(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p\left(1+\frac{p}{100}\right)^{35}} - 0{\cdot}18\dot{1}81\dot{8}$$

a dosaďme do tohoto výrazu po sobě

$$p = 4 \text{ a } p = 4\frac{1}{4}.$$

Tím dostaneme:

$$f(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.\left(1+\frac{4}{100}\right)^{35}} - 0{\cdot}18\dot{1}8\dot{1}8 = +0{\cdot}004828,$$

$$f\left(4\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4\frac{1}{4}} - \frac{1}{4\frac{1}{4}\left(1+\frac{4\frac{1}{4}}{100}\right)^{35}} - 0{\cdot}18\dot{1}8\dot{1}8 = -0{\cdot}001345.$$

Z těchto dvou hodnot, z nichž $f(4)$ jest positivní a $f\left(4\frac{1}{4}\right)$ jest negativní, patrno, že spojitý úkon $f(p)$ nutně musí projíti nullou, když veličina p projde všechny možné hodnoty od 4 do $4\frac{1}{4}$. Jest tedy procento, jež danému příkladu vyhovuje, rozhodně větší než 4 a menší nežli $4\frac{1}{4}$.

Pro prvé přiblížení chceme za to míti, že jsou rozdíly v procentech prostě úměrny rozdílům úkonů $f(x)$. Jest pak z předešlého patrně:

$$f(4) - f\left(4\frac{1}{4}\right) = 0{\cdot}006173.$$

Hledané p pak má vyhovovati relaci

$$f(p) = 0,$$

tedy bude také

$$f(4) - f(p) = 0{\cdot}004828$$

a tedy dle předpokládané úměrnosti:

$$(4-p) : \left(4 - 4\frac{1}{4}\right) = [f(4) - f(p)] : \left[f(4) - f\left(4\frac{1}{4}\right)\right],$$

$$(p-4) : \frac{1}{4} = 0{\cdot}004828 : 0{\cdot}006173,$$

z čehož

$$p - 4 = 1207 : 6173,$$

či

$$p = 4{\cdot}20.$$

Dosadíme-li tuto nalezenou první přibližnou hodnotu do úkonu $f(p)$, dostaneme

$$f(4\cdot 2) = \frac{1}{4\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2 \,.\, 1\cdot 042^{35}} - 0\cdot 181818 = -0\cdot 0001351,$$

z čeho pro

$$f(p) = 0$$

sestavíme novou srovnalost:

$$[f(p) - f(4)] : [f(4\cdot 2) - f(4)] = (p - 4) : (4\cdot 2 - 4)$$

či

$$0\cdot 004828 : 0\cdot 004963 = (p - 4) : 0\cdot 2$$

a z toho pro druhé přiblížení

$$p = 4\cdot 1946.$$

Dosadíme-li konečně tuto druhou přibližnou hodnotu do úkonu $f(p)$, dostaneme:

$$f(4\cdot 1946) = \frac{1}{4\cdot 1946} - \frac{1}{4\cdot 1946 \,.\, 1\cdot 041946^{35}} - 0\cdot\dot{1}\dot{8} = -0\cdot 0000047,$$

Odtud pro třetí přiblížení možno psáti:

$$[f(4\cdot 2) - f(4\cdot 1946)] : [f(p) - f(4\cdot 1946)]$$
$$= (4\cdot 2 - 4\cdot 1946) : (p - 4\cdot 1946)$$

či

$$-0\cdot 0001304 : 0\cdot 0000047 = 0\cdot 0054 : (p - 4\cdot 1946),$$

z čehož plyne třetí přiblížení

$$p = 4\cdot 1946 - 0\cdot 000194 = 4\cdot 194406.$$

Toto třetí přiblížení již jest dosti spolehlivé, neboť

$$f(4\cdot 194406) = \frac{1}{4\cdot 194406} - \frac{1}{4\cdot 194406 \,.\, 1\cdot 04194406^{35}} - 0\cdot\dot{1}\dot{8}$$
$$\doteq 0\cdot 0000001$$

liší se od nully teprve na sedmém místě desetinném o necelou 1.

Takovýmto způsobem se vypočetlo procento p na šest skoro desetinných míst dosti spolehlivě, ale tu namáhání neodpovídá nijak výsledku docílenému. Řešení vyžaduje tolik času, že velmi mnohého by to zajisté odstrašilo.

(Dokončení.)

Věstník literární.

Cours de Géométrie analytique à l'usage des Elèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Ecoles du Gouvernement; par *B. Niewenglowski,* Professeur de Mathématiques spéciales au Lyceé Louis-le Grand, Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. T. I. Sections coniques. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894.

Celé dílo, jehož účel dostatečně naznačen titulem, bude se skládati ze tří svazků; tento první svazek věnován přímce, kružnici a kuželosečkám, kdežto druhý mimo doplňky o kuželosečkách bude obsahovati theorii rovinných čar vůbec, třetí pak analytickou geometrii v prostoru.

Nelze popříti, že vniknutí do některé partie mathematické se u začátečníků zvlášť zabezpečí, učiní-li se příslušné úvahy zajímavými jasným, přesným a pokud lze i nenuceným vyvinutím výsledků; úvaha vedoucí přirozeným třeba delším postupem k cíli, má větší methodické ceny než sebe elegantnější však pro začátečníka umělá, a tudíž neplodná úvaha. V knize, o níž referuji, šetřeno těchto zásad takovou měrou, že ji lze doporučiti jakožto výbornou pomůcku při studiu analytické geometrie, a to tím více, že i obsah svou bohatostí vyniká. Bylo by zbytečno tento obsah dopodrobna vypočítávati, poukáži jen k některým částem, s nimiž se buď řídčeji v podobných spisech setkáváme, neb jež zde zvlášť přesně a úplně jsou vyloženy.

Jest to zejména četnými applikacemi a příklady doložená theorie souřadnic homogenních a přímkových a dále úvahy o homogennosti v geometrických formulích a o konstrukci algebraických výrazů, o imaginárných elementech v geometrii, obecná theorie středů a průměrů čar v rovině, projektivné vlastnosti, též theorie involuce, pojem invariantů a jich užití při transformaci kuželosečky k hlavním osám a k odvození jistých vlastností kuželoseček, homothetie a podobnost, užívání infinitesimalných úvah při strojení tečen, reciproké poláry, Plückerova definice ohnisek a m. v.

Ed. Weyr.