Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

O stanovení orthogonálných trajektorií kružnic v rovině

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 1, 20--24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/123966

Tudíž

$$x'^2 + ky'^2 \leqq \frac{k}{\lambda} p + \frac{\lambda}{4} p.$$

Avšak při $k = 1$, neb $k = 2$, máme předpokládajíce $\lambda > 1$:

$$\frac{4k + \lambda^2}{4\lambda} < \lambda \text{ tedy } x'^2 + ky'^2 < \lambda p.$$

Je-li $k = 3$, tu máme $\frac{12 + \lambda^2}{4\lambda} < \lambda$ jakmile $\lambda > 2$. Zbývající případ $\lambda = 2$, nemůže se však vyskytnouti; neboť pak by $m^2 + 3n^2$ bylo číslo sudé, tudíž m i n lichá čísla, a tedy by $m^2 + 3n^2$ nanejmíň $= 4p$.

O stanovení orthogonálných trajektorií kružnic v rovině.

Napsal

Eduard Weyr.

K úvahám, jež následují, byl jsem pobídnut prací p. *Catalana* „Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde", obsaženou v Liouvilleově žurnalu, tom. XII. Vyvineme-li differencialní rovnici, na níž záleží řešení problému, cestou nejpřímější, tu se vyskytne tvar, jehož integrace by se nám as snadno nepodařila; p. spisovatel překonává tuto obtíž zaváděje vhodné nové proměnné.

Promítneme-li kruhové řezy trojosého ellipsoidu kolmo na rovinu rovnoběžnou s rovinami oněch řezů, tu obdržíme co průměty systém kružnic, které se jisté ellipsy dvakráte dotýkají. Orthogonalné trajektorie těchto kružnic jsou patrně průměty hledaných trajektorií na ellipsoidu. Řešený onen úkol jest tedy jen zvláštním případem stanovení orthogonálných trajektorií kružnic, jichž středy jsou na přímce.

Tento obecnější problém rozřešíme kvadraturami; totéž ukážeme vzhledem k úkolu obecnějšímu, kdy jde o stanovení orthogonálných trajektorií kružnic, jež protínají pevnou kružnici pravoúhle (aneb jež procházejí pevným bodem). Oba tyto výsledky však zahrnuje patrně tato věta:

„*Známa-li jedna orthogonálná trajektorie soustavy kružnic v rovině, tu lze stanoviti všecky ostatní pouhými kvadraturami*;“ touto větou ukončím své úvahy.

Značí-li α a r libovolně dané funkce nějaké proměnné t, tu repraesentuje rovnice:

$$(x-\alpha)^2+y^2-r^2=0 \tag{1}$$

každý systém kružnic, jichž středy jsou na přímce; přímku tu jsme k vůli zjednodušení počtu zvolili za osu x pravoúhlých souřadnic x, y. Differencováním máme z (1):

$$(x-\alpha)\,dx+ydy=0.$$

Eliminací hodnoty t z rovnice:

$$ydx-(x-\alpha)\,dy=0 \tag{2}$$

a z rovnice (1) obdržíme tedy differenciálnou rovnici orthogonálných trajektorií soustavy (1). —

Učiníme-li:

tu pak
$$\begin{aligned} x &= \alpha + r\cos\omega, \\ y &= r\sin\omega. \end{aligned} \tag{3}$$

Zavedeme-li na místo proměnných x, y proměnné ω, t do differenciální rovnice trajektorií, tu lze úkol kvadraturou řešiti.

Vskutku zní nyní differenciálná rovnice orthogonálných trajektorií:

$$\frac{dy}{dx}=tg\,\omega,$$

t. j. vzhledem k rovnici (3) a po krátké redukci:

$$\frac{d\omega}{\sin\omega}=\frac{\alpha'}{r}\,dt; \tag{4}$$

zde značí α' derivaci α podle t. Máme tedy integrováním:

$$\log tg\,\tfrac{1}{2}\omega=\int\frac{\alpha'}{r}\,dt+const.$$

co rovnici hledaných čar.

2. Transformujeme-li nějaký obrazec methodou reciprokých průvodičů, tu jest obraz originalu v nekonečně malých částech podoben, t. j. úhly, v nichž se libovolné čáry protínají se nemění onou transformací. Známe-li tedy orthogonálné (neb kosoúhlé) trajektorie zobrazeného systemu čar, tu můžeme ihned ustanoviti trajektorie systému původního.

Značí li h stálou, tu vyjadřují formule:

$$x = \frac{h\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{h\eta}{\xi^2 + \eta^2} \tag{5}$$

transformaci reciprokými průvodiči; x, y a ξ, η jsou pravoúhlé souřadnice bodů navzájem zobrazených.

Snadno shledáme, že kružnici:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 \tag{6}$$

zobrazuje kružnice:

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{7}$$

jestliže položíme:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{h\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}, \\ \eta_0 &= \frac{h\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}, \\ \varrho &= \xi_0{}^2 + \eta_0{}^2 - \frac{h^2}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Pokládáme-li v rovnici (6) hodnoty α, β, r za funkce nějaké proměnné t, tu repraesentuje (6) soustavu kružnic, a totéž pak platí o rovnici (7). Mají-li se středy kružnic (7) nalézati na nějaké přímce:

$$A\xi_0 + B\eta_0 + C = 0, \tag{9}$$

tu musí hodnoty α, β, r hověti rovnici:

$$A\frac{h\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2} + B\frac{h\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - r^2} + C = 0,$$

t, j. musí:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + a\alpha + b\beta}, \tag{10}$$

v čemž a, b značí zlomky $\frac{hA}{C}$, $\frac{hB}{C}$.

Je-li podmínka (10) vyplněna, tu lze dle článku 1. stanoviti orthogonálné trajektorie soustavy (7) pouhou kvadraturou; transformací pak obdržíme orthogonálné trajektorie soustavy (6), tyto tedy také stanoveny jedinou kvadraturou.

Uvážíme-li, že značily litery A, B, C libovolné hodnoty, tu vychází, že rovnice

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

přísluší libovolné, počátkem souřadnic vedené kružnici K. Hodnota r, kterou podává rovnice (10) jest tedy délkou tečny vedené z bodu $x = \alpha$, $y = \beta$ ku kružnici K. Podmínka (10) praví tedy jen tolik, že kružnice (6) orthogonálně protíná kružnici K. Tím naznačen spůsob, jímž lze stanoviti orthogonalné trajektorie soustavy kružnic protínajících kolmo pevnou kružnici; řešení vyžaduje jediné kvadratury. Podrobné provedení počtu zůstavuji čtenáři.

3. Kružnice K, o které jsme právě jednali, jakož i osa x v případu v článku 1. uvažovaném, jsou patrně samy již orthogonálnými trajektoriemi, t. j. repraesentují partikulárné inteprály oné differenciálné rovnice, na jejíž integrování závisí řešení problému. Tím je patrno, že zahrnuje výsledky, jichž jsme se dodělali, tato věta:

„*Známa-li jedna orthogonální trajektorie libovolné soustavy kružnic v rovině, tu lze všecky stanoviti pouhými kvadraturami.*"

Výrok ten můžeme taky takto vysloviti:

„Sestrojíme-li soustavu kružnic, jichž středy (α, β) se nalézají na libovolné čáře, jichž poloměry však se rovnají délce tečen vedených ze středů k jiné dané pevné čáře, tu lze vždy stanoviti orthogonálné trajektorie onoho systému kružnic pouhými kvadraturami." Daná pevná čára patrně repraesentuje jednu orthogonálnou trajektorii.

Značí-li α, β a r dané funkce proměnné t, tu stanoví rovnice:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0 \tag{11}$$

soustavu kružnic v rovině. Eliminujeme-li z ní a z rovnice:

$$(y - \beta)\, dx - (x - \alpha)\, dy = 0$$

hodnotu t, tu obdržíme differenciálnou rovnici, jejíž integrování podává orthogonálné trajektorie soustavy (11). — Zavedeme-li novou proměnnou ω rovnicí:

$$x = \alpha + r \cos \omega,$$

tu pak:

$$y = \beta + r \sin \omega, \tag{12}$$

a tedy:

$$dx = (\alpha' + r' \cos \omega)\, dt - r \sin \omega\, d\omega,$$
$$dy = (\beta' + r' \sin \omega)\, dt + r \cos \omega\, d\omega.$$

Tím ale differenciálná rovnice trajektorií:

$$\frac{dy}{dx} = tg\, \omega$$

nabývá tvaru:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\alpha'}{r} \sin\omega - \frac{\beta'}{r} \cos\omega\,; \tag{13}$$

zde značí α', β', r' opět derivace hodnot α, β, r dle t. Položíme-li k vůli stručnosti:

$$\frac{\alpha'}{r} = T; \qquad -\frac{\beta'}{r} = U, \tag{14}$$

tu máme z (13):

$$\frac{d\omega}{dt} = T \sin\omega + U \cos\omega. \tag{15}$$

Chtějíce převésti tuto rovnici na tvar známější*) připomeňme si, že vyjádřivše $\sin\omega$ a $\cos\omega$ co racionálné funkce nové proměnné v i $d\omega$ se objeví co racionálný differenciál. Známo, že to vykoná substituce:

$$tg\, \tfrac{1}{2}\omega = v\,; \tag{16}$$

tou (15) přejde na rovnici:

$$\frac{dv}{dt} + \tfrac{1}{2} U v^2 - T v - \tfrac{1}{2} U = 0, \tag{17}$$

Jest však známo, že lze rovnici tvaru:

$$\frac{dv}{dt} + \varphi(t)\, v^2 + \psi(t)\, v + \chi(t) = 0$$

vždy integrovati, jakmile je znám jeden partikulárný integrál. Tím patrně dokázána vyslovená věta.

Příspěvek ke theorii ploch druhého stupně.

Podal

V. Jung v Pardubicích.

Rovnice stupně druhého mezi třemi proměnnými znamená plochu druhého stupně a má všeobecně tvar:

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{13} xz + 2a_{14} x$$
$$+ 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0 \tag{1}$$

Degeneruje-li plocha druhého stupně na plochu buď kuželovou buď válcovou, aneb na dvojinu rovin, v konečnu se pronikajících, aneb na dvojinu rovin stejnosměrných, platí mezi

*) Viz článek pana *Besge-a* v XI. svazku 1. serie žurnálu Liouville-ova, str. 445.