Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Josef Langr

Drobnosti z geometrie trojúhelníka

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 4, 505--510

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/124042`

Drobnosti z geometrie trojúhelníka.

Podává Ing. **Jos. Langr.**

Vedeme-li vrcholy daného trojúhelníka ABC pořadem 3 přímky tak, aby stanovily trojúhelník $A_1B_1C_1$ o daných vnitřních úhlech α_1, β_1 a γ_1, lze dokázati o nově vzniklém trojúhelníku následující vlastnosti:

1. Vrcholy jeho pohybují se po 3 kružnicích K_1, K_2 a K_3.

2. Všecky tři kružnice K_1, K_2 a K_3 protínají se ve společném bodě.

3. Středy těchto kružnic stanoví $\triangle\ O_1O_2O_3$ podobný $\triangle\ A_1B_1C_1$.

4. Těžisko $\triangle\ A_1B_1C_1$ opisuje kružnici K, jejíž střed se stotožňuje s těžiskem $\triangle\ O_1O_2O_3$.

5. Plocha měnného trojúhelníka $A_1B_1C_1$ roste od nuly do jistého maxima a zpět. Spojnice obou těžisek, t. j. těžiska trojúhelníka o obsahu rovném nule a těžiska trojúhelníka o maximálním obsahu je průměrem kružnice K.

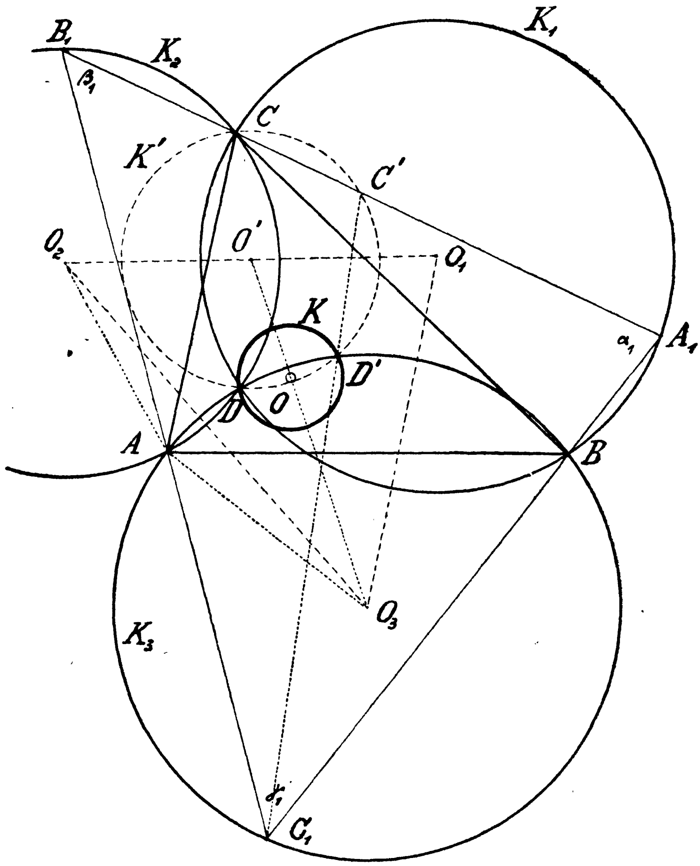
6. Spojnice těžisek dvou trojúhelníků $A_1B_1C_1$ o stejném obsahu je kolma ku dříve uvedenému průměru.

Důkazy lze provésti následujícím způsobem:

1. Vedeme vrcholy daného trojúhelníka ABC (obr. 1.) tři přímky, stanovící $\triangle\ A_1B_1C_1$ o daných úhlech α_1, β_1 a γ_1. Při tom jest ku př. nad stranou BC sestrojen $\sphericalangle\ \alpha_1$. Poněvadž jest tento úhel dán a jeho ramena procházejí pevnými body B a C, musí se vrchol A_1 pohybovati po kružnici jakožto přísl. geometrickém místě se středem O_1, při čemž $\sphericalangle\ CO_1B = 2\alpha_1$. To platí i o druhých vrcholech B_1 a C_1.

2. Všechny tři kružnice K_1, K_2 a K_3 procházejí společným bodem D.

Považujme bod D jako průsečík kružnic K_1 a K_3. Pak jest: $\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA = 2\pi$.



Obr. 1.

Poněvadž jest $\sphericalangle ADB = \pi - \gamma_1$ a $\sphericalangle BDC = \pi - \alpha_1$, musí $\sphericalangle CDA = \alpha_1 + \gamma_1 = \pi - \beta_1$, čili bod D musí ležeti na kružnici K_2, která je geom. místem vrcholu úhlu β_1 resp. $\pi - \beta_1$.

3. V důkazu, že $\triangle\ O_1 O_2 O_3$ jest podoben $\triangle\ A_1 B_1 C_1$, pokračujme následovně.

Z $\triangle O_2AO_3$ vychází:

$$\overline{O_2O_3^2} = \overline{O_2A^2} + \overline{O_3A^2} - 2\,.\,\overline{O_2A}\,.\,\overline{O_3A}\, cos \sphericalangle O_2AO_3.$$

Dále jest:

$$\sphericalangle O_2AO_3 = \sphericalangle O_2AC + \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAO_3 = \frac{\pi}{2} - \beta_1 +$$

$$+ \alpha + \frac{\pi}{2} - \gamma_1 = \alpha + \alpha_1,$$

$$\overline{O_2A} = \frac{b}{2\, sin\, \beta_1} \text{ a } \overline{O_3A} = \frac{c}{2\, sin\, \gamma_1},$$

tedy

$$\overline{O_2O_3^2} = \frac{b}{4\, sin^2\, \beta_1} + \frac{c^2}{4\, sin^2 \gamma_1} - \frac{2bc\, cos\, (\alpha + \alpha_1)}{4\, sin\, \beta_1\, sin\, \gamma_1}.$$

Zavedeme-li místo funkcí úhlů α_1, β_1 a γ_1 strany a_1, b_1 a c_1, dospějeme ku vzorci

$$(\alpha) \ldots \overline{O_2O_3^2} = \frac{a_1^2}{32\, P_1^2}\,[a^2(-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + b^2(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2) +$$

$$+ c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) + 16PP_1],$$

kdež P a P_1 jsou plošné obsahy trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$.

Položíme-li

$$a^2(-a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + b^2(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2) + c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) +$$

$$+ 16PP_1 = M,$$

jest

$$\overline{O_2O_3^2} = a_1^2 \cdot \frac{M}{32P_1^2}.$$

Podobně i

$$\overline{O_1O_3^2} = b_1^2 \cdot \frac{M}{32P_1^2} \text{ a } \overline{O_1O_2^2} = c_1^2\, \frac{M}{32P_1^2};$$

ze vzorců těch plyne

$$a_1 : b_1 : c_1 = \overline{O_2O_3} : \overline{O_1O_3} : \overline{O_1O_2},$$

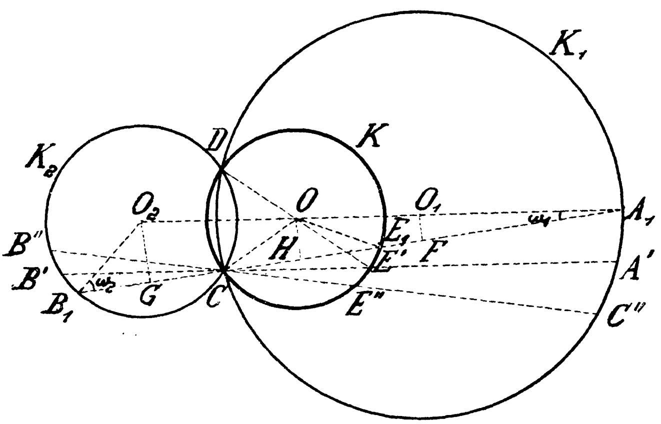
t. j. strany obou trojúhelníků jsou úměrny a oba trojúhelníky jsou si podobny.

4. Abychom dokázali, že těžiště $\triangle A_1B_1C_1$ opisuje kružnici, jejíž střed leží v těžišti $\triangle O_1O_2O_3$, dokažme nejprve následující:

Jsou dány 2 kružnice K_1 a K_2 (obr. 2.) o středech O_1 a O_2 a poloměrech r_1 a r_2. Průsečíky kružnic označme C, D.

Vedeme-li jedním z obou průsečíkův, třebas C, paprsek $A_1B_1 = x$, a rozdělíme-li jej bodem E_1 v poměru $\frac{\overline{A_1E_1}}{\overline{B_1E_1}} = \lambda$, opisuje bod E_1 kružnici K, jejíž střed O leží na obojstředné O_1O_2 děle ji v poměru $\frac{\overline{O_1O}}{\overline{O_2O}} = \lambda$.

Průsečíky C, D leží na kružnici K.



Obr. 2.

K důkazu učiňme následující:

Spusťme s bodů O_1 O_2 a O kolmice O_1F, O_2G a OH na přímku A_1B_1 a označme $\sphericalangle O_1A_1F = \omega_1$, $\sphericalangle O_2B_1G = \omega_2$.

Pak jest $\overline{HE_1} = \overline{B_1E_1} - \overline{HB_1}$.

Avšak

$$\overline{B_1E_1} = \frac{x}{1-\lambda} \text{ a}$$

$$\overline{HB_1} = \overline{HG} + \overline{GB_1} = \frac{x}{2(1-\lambda)} + r_2 \cos \omega_2,$$

pročež

$$\overline{HE_1} = \frac{r_1 \cos \omega_1 - \lambda r_2 \cos \omega_2}{1-\lambda}.$$

Dále jest

$$\overline{OH} = \frac{\overline{O_1F} - \lambda . \overline{O_2G}}{1-\lambda} = \frac{r_1 \sin \omega_1 - \lambda r_2 \sin \omega_2}{1-\lambda}.$$

Dosazením a úpravou obdržíme

$$\overline{OE_1^2} = \overline{OH^2} + \overline{HE_1^2} = \frac{\lambda r_2^2 + r_1^2 - 2\lambda r_1 r_2 \cos \omega}{(\lambda - 1)^2},$$

kdež $\alpha = \sphericalangle O_1CO_2$.

Vidno tedy, že $\overline{OE_1}$ jest konstantní, a že dělící bod E_1 pohybuje se po kružnici K o středu O, jak bylo dokázati.

Dále jest

$$\overline{CH} = \overline{GH} - \overline{CG} = \frac{B_1E_1 - \overline{CB_1}}{2} = \frac{CE_1}{2},$$

pročež

$\overline{CH} = \overline{HE_1}$ a $\overline{CO} = \overline{E_1O}$.

Kružnice K prochází bodem C.

Vraťme se nyní ku obrazu 1. Vrcholy A_1 a B_1 se pohybují po kružnicích K_1 a K_2. Obě kružnice se protínají v bodech C a D, strana $\overline{A_1B_1}$ prochází bodem C. Jest to tedy týž případ, jako na obr. 2. Proto bod C' půlící stranu A_1B_1 se musí pohybovati po kružnici K', opsané ze středu O', ležícího uprostřed strany O_1O_2. Kružnice K' obsahuje body C a D a seče kružnici K_3 v bodě D'. Vznikl tedy $\triangle BCD'$, nad jehož stranami co tětivami jsou opsány kružnice K_1, K_3 a K', protínající se ve společném bodě D. Vrcholy tohoto trojúhelníka jsou vedeny 3 přímky, určující trojúhelník A_1C_1C'. Jeho vrcholy pohybují se po zmíněných 3 kružnicích K, K_3 a K'. Strana C_1C' jest však tížnicí $\triangle A_1B_1C_1$. Tížnice tato prochází bodem D' a její koncové body pohybují se po 2 kružnicích. Tedy zase týž případ jako na obr. 2. Bod, který dělí tížnici v poměru $1:2$, t. j. těžiště $\triangle A_1B_1C_1$, bude opisovati kružnici K, jejímž středem jest bod O. Při tom jest $\overline{O'O} : \overline{OO_3} = 1:2$.

Tím jsme podali důkaz, že těžiště $\triangle A_1B_1C_1$ opisuje kružnici, jejíž střed leží v těžišti $\triangle O_1O_2O_3$.

5. Plocha $\triangle A_1B_1C_1$ roste se čtvercem jeho strany. Uvažujme opět obr. 2., kdež úsečka $\overline{A_1B_1} = x$ odpovídá kterékoliv straně $\triangle A_1B_1C_1$. Nazveme úhel, který svírá A_1B_1 s O_1O_2 ω.

Pak jest

$$\overline{GF} = \frac{x}{2} = a \cos \omega, \text{ kdež } \overline{O_1 O_2} = a.$$

Tedy $x = 2a \cos \omega$.

Je-li $\omega = 90^0$, jest $x = 0$, je-li $\omega = 0$, jest $x = 2a$.

Lze tedy pro $\triangle A_1 B_1 C_1$ vysloviti následující větu:

Jsou-li jeho strany kolmy ku stranám $\triangle O_1 O_2 O_3$, jest obsah jeho roven nule, t. j. celý trojúhelník se smrskuje na bod D, jsou-li jeho strany rovnoběžny se stranami $\triangle O_1 O_2 O_3$, nabývá maximálního obsahu, rovnaje se 4násobné ploše $\triangle O_1 O_2 O_3$.

6. Veďme v obr. 2. $A'B' \parallel O_1 O_2$ a $A''B''$ svírající $\sphericalangle \omega$ s $A'B'$. Dle předešlého jest

$$A''B'' = A'B'.$$

Průsečíky s kružnicí K vyhovují podmínce

$$\frac{\overline{B_1 E_1}}{\overline{C_1 E_1}} = \frac{\overline{B'E'}}{\overline{C'E'}} = \frac{\overline{B''E''}}{\overline{C''E''}}.$$

Poněvadž obvodové úhly na kružnici K jsou stejny, t. j.

$$\sphericalangle E_1 CE' = \sphericalangle E'CE'',$$

musí býti i přísl. středové úhly si rovny

$$\sphericalangle E_1 OE' > \sphericalangle E'OE'',$$

a tedy body E' a E'' jsou symetricky položeny dle $E'O$. Obdobně jako v odst. 4. dá se dokázati i pro celý trojúhelník věta uvedená.

7. Zabývejme se ještě zvláštními případy:

a) Je-li $\triangle A_1 B_1 C_1$ podoben danému $\triangle ABC$, vychází dle rovnice (α) po dosazení a úpravě

$$\overline{O_2 O_3} = a, \text{ t. j. } \triangle O_1 O_2 O_3$$

shoduje se s daným trojúhelníkem.

b) Je-li $\triangle A_1 B_1 C_1$ rovnostranný, jest $\triangle O_1 O_2 O_3$ také rovnostranný a jeho strana jest

$$\overline{O_2 O_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2P}{\sqrt{3}}.$$

O tomto specielním rovnostranném trojúhelníku pojednává náš článek „O jisté úloze v trojúhelníku“ v XXXIV. roč. tohoto časopisu na str. 65.
