Jaromír Štěpán

Kritérium dominantnosti kořenů

Kybernetika, Vol. 3 (1967), No. 1, (57)--68

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/125519

KYBERNETIKA ČÍSLO 1, ROČNÍK 3/1967

Kritérium dominantnosti kořenů

JAROMÍR ŠTĚPÁN

Průběhy regulačních pochodů v obvodech popsaných přenosy ve tvaru racionální funkce lomené jsou zpravidla určeny jen několika dominantními kořeny, tj. kořeny s nejmenší absolutní hodnotou. V článku je uvedena definice dominantních kořenů. Dále je odvozeno kritérium dominantnosti kořenů na základě koeficientů přenosové funkce. Je ukázána souvislost kritéria dominantnosti kořenů s řešením kořenů algebraických rovnic.

1. ÚVOD

Teoretické řešení převážné části úloh regulační techniky je založeno na znalosti kořenů charakteristické rovnice přenosu, který popisuje řešený regulační obvod. Výpočet těchto kořenů u obvodů popsaných diferenciálními rovnicemi vyšších řádů je obtížná úloha, řešitelná pouze numerickými metodami. Byla proto vždy snaha založit řešení úloh regulační techniky na jiných postupech, kdy postačí znalost jiných parametrů, např. koeficientů charakteristické rovnice apod. V této práci obrátíme pozornost na postup, při kterém postačí znalost jen několika (nejčastěji dvou) kořenů a který těsně souvisí s aproximací přenosů ve tvaru racionální lomené funkce. Vlastnosti regulačních obvodů jsou určeny z největší části kořeny s nejmenší absolutní hodnotou. V literatuře se používá pro tyto kořeny názvu dominantní kořeny. Tyto kořeny jsou rozhodující jak při analýze (např. při identifikaci regulovaných soustav) tak i při syntéze (např. při optimalizaci regulačních pochodů). Širšímu použití metod, popřípadě výpočtových postupů založených na dominantních kořenech brání několik skutečností. Chybí přesnější (kvantitativní) definice dominantních kořenů a dále jednoduché hledisko pro posouzení nakolik kořeny s nejmenší absolutní hodnotou jsou dominantní vůči všem zbývajícím kořenům charakteristické rovnice. Tyto dvě otázky budou předmětem dalších úvah.

2. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Dynamické vlastnosti soustav jsou většinou dány přenosy ve tvaru

$$F_s(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \tag{1}$$

V této práci se omezíme na tzv. soustavy s minimální fází a na případy, kdy $m \leqq n - k$ (k je počet dominantních kořenů). Kořeny jmenovatele nazýváme dále póly a kořeny čitatele nuly. Přenos zavřeného obvodu pro poruchu z na vstupu do soustavy je dán vztahem

$$F_z(p) = \frac{x(p)}{z(p)} = \frac{F_s}{1 + F_s F_R}, \tag{2}$$

kde x je regulovaná veličina a F_R přenos regulátoru. Vzhledem k tvaru přenosu (1) postačí uvažovat ideální proporcionální regulátor s přenosem [1]

$$F_R(p) = r_0, \tag{3}$$

kde r_0 je zesílení.

Regulační pochody v obvodu popsaném přenosem (2) budou záviset na počátečních podmínkách, tvaru poruchy z, rozdělení kořenů charakteristické rovnice a nul čitatele přenosu (2). Počáteční podmínky lze uvažovat nulové, protože u lineárních soustav (obvodů) platí princip superposice. Poruchu volíme ve tvaru jednotkového skoku. Jiné tvary vstupního signálu budeme diskutovat v závěru.

Přechodová funkce (originál ve smyslu Laplaceovy transformace) příslušná přenosu (obrazu) (2) má pro dva dominantní kořeny a $x(\infty) = 0$ tvar

$$x(t) = 2A_1 \, e^{\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \sum_{i=3}^{n} C_i \, e^{p_i t}. \tag{4}$$

Prvý člen vztahu (4) je složka příslušná dominantním kořenům $p_{1,2} = \alpha_1 \pm j\omega_1$. Ostatní kořeny jsou jednoduché, komplexně sdružené nebo reálné. Funkci $x(t)$ lze napsat ve tvaru

$$x(t) = h(t) + g(t), \tag{5}$$

kde $h(t)$ je složka dominantních kořenů a $g(t)$ je složka všech ostatních kořenů.

Dominantnost kořenů můžeme posuzovat z různých hledisek. V této práci uvedeme dvě z těchto hledisek.

Funkce $x(t)$ je možno považovat za prvky prostoru funkcí L_2 ($x \in L_2(0, \infty)$). Funkce $x(t)$, popřípadě jejich složky, tvoří zřejmě v tomto prostoru lineál. Pojem normy prvku x v prostoru $L_2(0, \infty)$ odpovídá pojmu kvadratické regulační plochy. Norma funkce $x(t)$ je definována vztahem

$$\|x\| = \left(\int_0^\infty x^2(t) \, dt \right)^{1/2}. \tag{6}$$

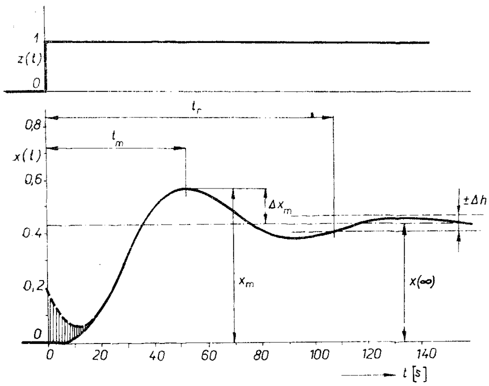
Kvadratická regulační plocha příslušná funkci $x(t)$ podle vztahu (4) je dána vztahem

$$P_2 = \int_0^\infty x^2(t) \, dt = \int_0^\infty [2A_1 \, e^{\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \sum_{i=3}^{n} C_i \, e^{p_i t}]^2 \, dt = \|x\|^2. \tag{7}$$

Při posuzování dominantnosti kořenů jde o otázku, jak přesně aproximuje složka $h(t)$ funkci $x(t)$. Napišme vztah pro vzdálenost prvků h a x

$$d(x, h) = \|x - h\| = \left(\int_0^\infty [x(t) - h(t)]^2 \, dt \right)^{1/2} = \|g\| . \tag{8}$$

Střední kvadratická odchylka (vzdálenost) funkcí x a h je dána normou funkce g. Měřítkem dominantnosti složky $h(t)$ je tedy velikost normy $\|g\|$ za předpokladu, že normalisujeme funkci $h(t)$ např. požadavkem Im $p_{1,2} = \pm j$ (viz odst. 4).



Obr. 1. Charakteristické hodnoty přechodové charakteristiky.

Věnujme nyní pozornost jinému pojetí dominantnosti kořenů [1]. Na obr. 1 je nakreslena přechodová charakteristika pro $x(0) = 0$. Jsou zde vyznačeny hodnoty důležité pro posuzování regulačních pochodů: maximální odchylka x_m; přeregulování $\Delta x_m = x_m - x(\infty)$, doba maximální odchylky t_m (tj. doba, která uplyne do okamžiku, kdy nastane maximální odchylka) a konečně doba ukončení regulačního pochodu t_r (regulovaná veličina nevystoupí z daných mezí např. $\pm 1\%$ konečné hodnoty). Rozdíl mezi složkou příslušnou dominantním kořenům a výsledným průběhem je v obr. 1 vyznačen šrafováním. Hodnoty důležité pro posouzení regulačního pochodu jsou dány pouze složkou dominantních kořenů. Pro posouzení vlivu dominantních kořenů je rozhodující podíl složky těchto kořenů na přeregulování

$$G = \frac{1}{1 + \left| \dfrac{g(t_m)}{h(t_m)} \right|} . \tag{9}$$

Vztah (9) je v práci [1] přibližně řešen pro soustavy, které mají přenos s konstantou v čitateli a reálnými póly ve jmenovateli.

Obě uvedená hlediska ukazují, že základním problémem posuzování dominantnosti kořenů je výpočet některých charakteristických hodnot složky $g(t)$ bez znalosti polohy příslušných kořenů. Pokusme se o takový výpočet pomocí vhodné aproximace funkce $g(t)$. Uvažujme funkci ${}^2r(t)$ v tomto tvaru

$$(10) \qquad {}^2r(t) = \sum_{i=3}^{n} C_i \frac{(p_i - p_1)(p_i - p_2)}{p_i^2} e^{p_i t} .$$

Kořeny p_i příslušné funkcím $g(t)$ a ${}^2r(t)$ jsou totožné. Liší se pouze koeficienty jednotlivých členů funkcí $g(t)$ a ${}^2r(t)$ v té části, která je určena dominantními kořeny. Ve vztahu (10) jde o nejčastější případ pro dva dominantní kořeny. Podobně lze psát vztah obdobný vztahu (10) pro k dominantních kořenů

$$(10') \qquad {}^kr(t) = \sum_{i=k+1}^{n} C_i \frac{\prod_{l=1}^{k}(p_i - p_l)}{p_i^k} e^{p_i t} .$$

Každý z těchto dominantních kořenů znamená další přibližnou integraci průběhu $g(t)$. Pro funkce ${}^kr(t)$ tedy platí

$$ {}^kr(t) = (-1)^k \int_t^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \dots \int_{\tau_{k-1}}^{\infty} r(\tau_k) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \dots d\tau_k .$$

Pokud půjde o dominantní kořeny dostatečně blízké počátku komplexní roviny a kořeny příslušné složce $g(t)$ mají dostatečně velké absolutní hodnoty, lze psát

$$(11) \qquad g(t) \approx {}^kr(t) .$$

Zaveďme ještě odezvu na impuls

$$ {}^{-1}r(t) = \frac{d}{dt} {}^0r(t) \quad (\text{kde } {}^0r(t) \equiv r(t)) .$$

Funkci ${}^{-1}r(t)$ odpovídá přenos, který vypočteme z přenosu (2) vydělením jmenovatele rovnicí dominantních kořenů.

$$(12) \qquad {}^{-1}F_r(p) = \frac{{}^{-1}M(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{c_{n-k} p^{n-k} + c_{n-k-1} p^{n-k-1} + \dots + c_1 p + c_0} .$$

Další přenosy ${}^kF_r(p)$ příslušné funkcím ${}^kr(t)$ pro ${}^kr(\infty) = 0$ mají jmenovatel shodný se jmenovatelem přenosu (12) a čitatel ${}^kM(p)$ lze počítat podle rekurentního vztahu

$$(13) \qquad {}^kM(p) = \frac{1}{p} \left[{}^{k-1}M(p) - \frac{{}^{k-1}M(0)}{N(0)} N(p) \right] .$$

Výhodnost funkcí ${}^k r(t)$ proti funkcím $g(t)$ spočívá ve snadnosti výpočtu jejich normy (jejich kvadratické regulační plochy). Numerický postup výpočtu kvadratické regulační plochy z koeficientů přenosů typu (12) je popsán v literatuře [2; 3].

3. DEFINICE DOMINANTNÍCH KOŘENŮ

Jak plyne z úvah předcházejícího odstavce, definice dominantních kořenů může být založena buď na normách funkcí $h(t)$ a $g(t)$ podle vztahu (8) nebo na hodnotách funkcí $g(t)$ a $h(t)$ v okamžiku maximální odchylky podle vztahu (9). Uvedeme obě možnosti.

Kořeny příslušné složce $h(t)$ jsou dominantní s konstantou μ vůči kořenům složky $g(t)$, je-li splněna nerovnost

$$(14) \qquad \frac{\|g\|}{\|h\|} \leqq \mu .$$

Pro dostatečně malé μ jsou splněny předpoklady pro použití vztahu (11) a přibližný výpočet nerovnosti (14) nečiní potíže.

Rozbor charakteristických údajů regulačních pochodů v souvislosti s obr. 1 ukazuje, že pro úlohy regulační techniky bude zpravidla výhodnější následující definice:

Kořeny příslušné složce $h(t)$ jsou dominantní s konstantou $\varkappa$, splňují-li hodnoty složek $h(t)$ a $g(t)$ v okamžiku maximální odchylky nerovnost

$$(15) \qquad \left|\frac{g(t_m)}{h(t_m)}\right| \leqq \varkappa .$$

Podle výsledků práce [1] vyhoví této nerovnosti pro $\varkappa = 0{,}01$ široká třída funkcí typu (4).

Při výpočtu nerovnosti (15) je třeba řešit aproximaci funkce $g(t)$ aproximační funkcí $v(t)$. Kořeny aproximační funkce $v(t)$ určíme pomocí funkcí ${}^k r(t)$ (vztah (10')). Vyjdeme z rovnosti norem

$$(16) \qquad \|{}^k r\| = \|{}^k v\| ,$$

kde

$${}^k v(t) = (-1)^k \int_t^\infty \int_{\tau_1}^\infty \dots \int_{\tau_{k-1}}^\infty v(\tau_k)\, \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2 \dots \mathrm{d}\tau_k .$$

Aproximační funkce $v(t)$ může být při dostatečně malých $\varkappa$ velmi jednoduchá. Z úvah o majorantách a minorantách přechodových charakteristik v práci [1] plyne, že funkce $v(t)$ příslušná soustavě prvého řádu je nejnepříznivější případ, pokud jde o soustavy s reálnými kořeny. Kořen soustavy prvého řádu je dán vztahem

$$(\bar{\alpha}_1)^{1+2k} = \frac{0{,}5}{\|{}^k r\|^2} .$$

 Podobně lze počítat s-násobné reálné kořeny

$$(\bar{\alpha}_s)^{1+2k} = \frac{H_s}{\|^k r\|^2}$$

kde H_s jsou konstanty.

Uvedený postup výpočtu kořenů lze použít i pro složitější funkce $v(t)$. V aplikacích budou však mít význam jen nejjednodušší typy funkcí. Správnost typu zvolené aproximační funkce kontrolujeme podle rovnosti norem (16) pro další indexy.

4. KRITÉRIA VLIVU DOMINANTNÍCH KOŘENŮ

Použití vztahů (14) nebo (15) při rozhodování o vlivu dominantních kořenů nečiní nějaké zvláštní potíže. Numerický výpočet především norem $\|^k r\|$ může však být pracný. Pokusíme se proto odvodit v tomto odstavci jednoduché kritérium pro určení vlivu dominantních kořenů. Vyjdeme z přenosu (1) s konstantou v čitateli ($m = 0$). Přenos (2) bude mít potom tvar

$$F_z(p) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 + r_0} . \tag{2'}$$

Tento přenos normalizujeme pro $r_0 = r_{0k}$ tak, že dominantní kořeny budou

$$p_{1,2} = \pm \mathrm{j} .$$

Jde o změnu časového měřítka přechodové funkce $x(t)$

$$\mathscr{L}[x(\gamma t)] = F\left(\frac{p}{\gamma}\right). \tag{17}$$

Po vydělení jmenovatele přenosu (2') rovnicí dominantních kořenů dostaneme přenos příslušný zbývajícím kořenům (pro $\hat{b}_0 d_0 = b_0$)

$$^{-1}S_r(p) = \frac{^{-1}R(p)}{P(p)} = \hat{b}_0 \frac{d_0}{d_{n-2} p^{n-2} + \ldots + d_1 p + d_0} . \tag{18}$$

Přenosu (18) přísluší funkce času $^{-1}s(t)$. Přenosy příslušné funkcím

$$^k s(t) = (-1)^k \int_t^\infty \int_{\tau_1}^\infty \ldots \int_{\tau_{k-1}}^\infty s(\tau_k)\, \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2 \ldots \mathrm{d}\tau_k$$

dostaneme dosazením čitatelů $^k R(p)$, které vypočteme ze vztahů

$$^0 R(p) = \frac{1}{p}\left[{}^{-1}R(p) - \frac{^{-1}R(0)}{P(0)} P(p)\right], \tag{19}$$

$$^k R(p) = \frac{1}{p}\left[{}^{k-1}R(p) - \frac{^{k-1}R(0)}{P(0)} P(p)\right].$$

Zaveďme ještě funkcionály příslušné funkcím ${}^{k}s(t)$ vztahy

$$(20)\qquad {}^{-1}\mathrm{f}s = \int_0^\infty {}^{-1}s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{d_0}{d_0} = 1\,,$$

$${}^{0}\mathrm{f}s = \int_0^\infty s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{d_0}\left(-{}^{-1}\mathrm{f}s\,d_1\right),$$

$${}^{1}\mathrm{f}s = \int_0^\infty {}^{1}s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{d_0}\left(-{}^{-1}\mathrm{f}s\,d_2 - {}^{0}\mathrm{f}s\,d_1\right),$$

$${}^{k}\mathrm{f}s = \int_0^\infty {}^{k}s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{d_0}\left(-{}^{-1}\mathrm{f}s\,d_{k+1} - {}^{0}\mathrm{f}s\,d_k - \ldots - {}^{k-1}\mathrm{f}s\,d_1\right).$$

Protože jde jen o výpočet poměru složek $h(t)$ a $g(t)$, není třeba uvažovat $\hat{b}_0$ ve vztahu (18).

Funkcionály (20) udávají lineární regulační plochy průběhů ${}^{k}s(t)$.

Napišme ještě vztahy pro vzdálenost prvků ${}^{k}s(t)$

$$(21)\qquad [d({}^{k-l}s, {}^{k+1}s)]^2 = \|{}^{k-l}s - {}^{k+1}s\|^2 = $$
$$= \|{}^{k-l}s\|^2 + \|{}^{k+1}s\|^2 - 2({}^{k-l}s, {}^{k+1}s)\,.$$

Skalární součiny ze vztahu (21) lze jednoduše počítat. Pro vztah mezi počátečními hodnotami ${}^{k}s(0)$ a funkcionály ${}^{k}\mathrm{f}s$

$$(22)\qquad {}^{k}s(0) = {}^{k-1}\mathrm{f}s$$

dostaneme pro $l = 0$, 1 a 2

$$(23)\qquad ({}^{k+1}s; {}^{k}s) = \int_0^\infty {}^{k+1}s(t)\,{}^{k}s(t)\,\mathrm{d}t = [({}^{k+1}s)^2]_0^\infty - \int_0^\infty {}^{k}s(t)\,{}^{k+1}s(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\tfrac{1}{2}[{}^{k+1}s(0)]^2 = -\tfrac{1}{2}({}^{k}\mathrm{f}s)^2\,,$$

$$(24)\qquad ({}^{k-1}s, {}^{k+1}s) = -{}^{k}\mathrm{f}s\,{}^{k-1}\mathrm{f}s - \|{}^{k}s\|^2\,,$$

$$(25)\qquad ({}^{k-2}s, {}^{k+1}s) = -{}^{k-2}\mathrm{f}s\,{}^{k}\mathrm{f}s + \tfrac{1}{2}({}^{k-1}\mathrm{f}s)^2\,.$$

Pomocí uvedených vztahů a Schwarzovy-Buňakovského nerovností [4] lze v některých případech jednoduše určit meze, ve kterých budou ležet normy $\|{}^{k}s\|$. Pro kritérium dominantnosti je důležitá především horní mez. Úlohy, pro které bude možno řešit horní mez s použitím uvedených vztahů, jsou omezeny případy, kdy prvky jsou ortogonální, tzn. případy, kdy pro skalární součiny platí

$$(26)\qquad ({}^{k-l}s, {}^{k+1}s) = 0\,.$$

Názorně je možno řešit tento problém vektorovou algebrou. Považujeme-li jednotlivé prvky ${}^{k}s$ za vektory, jde ve vztazích (23) až (25) o úhel dvou vektorů

$$\cos \varphi_{k+1}^{k-l} = \frac{({}^{k-l}s, {}^{k+1}s)}{\|{}^{k-l}s\| \, \|{}^{k+1}s\|} . \tag{27}$$

Pro výpočet horní meze norem ${}^{k}s$ lze použít vztahu (24) v případě, že platí

$$({}^{k-1}s, {}^{k+1}s) \geqq 0 , \tag{28}$$

$$\|{}^{k}s\|^{2} \leqq {}^{k-1}\mathrm{f}s \, {}^{k}\mathrm{f}s . \tag{28'}$$

Hledáme tedy podmínky pro platnost nerovnosti (28'). Vyjdeme ze vztahu (27) a Schwarzovy-Buňakovského nerovnosti

$$|({}^{k-l}s, {}^{k+1}s)| \leqq \|{}^{k-l}s\| \, \|{}^{k+1}s\| . \tag{29}$$

Znaménko rovnosti platí pouze v případech, kdy funkce ${}^{k-l}s$ je násobkem ${}^{k+1}s$

$${}^{k-l}s = m_{k} \, {}^{k+1}s . \tag{30}$$

Mají-li rozhodující členy posloupnosti $\{{}^{k}\mathrm{f}s\}$ ${}^{k-2}\mathrm{f}s$ až ${}^{k+1}\mathrm{f}s$ alternující znaménka, jsou příslušné prvky otočeny o úhel $\frac{1}{2}\pi < \varphi_{k-1}^{k} < \pi$. Úhel prvků ${}^{k-2}s$ a ${}^{k+1}s$ určuje vztah (25), alespoň pokud jde o znaménko. Platí-li nerovnost

$${}^{k-2}\mathrm{f}s \, {}^{k}\mathrm{f}s \geqq \tfrac{1}{2}({}^{k-1}\mathrm{f}s)^{2} , \tag{31}$$

jsou prvky ${}^{k-2}s$ a ${}^{k+1}s$ otočeny o úhel $\frac{1}{2}\pi < \varphi_{k+1}^{k-2} < \pi$. Protože pro úhel φ_{k-1}^{k-2} musí platit $\frac{1}{2}\pi < \varphi_{k-1}^{k-2} < \pi$, bude ležet úhel φ_{k-1}^{k+1} v mezích $0 < \varphi_{k-1}^{k+1} < \frac{1}{2}\pi$. Lze tedy vyslovit závěr: Platí-li vztah (31), bude platit i vztah (28').

Uvedeným postupem jsme se vyhnuli pracnému výpočtu norem $\|{}^{k}s\|$. Použitím nerovnosti (28') získáme horní mez hledané normy. Další výpočet je již jednoduchý. Např. pro aproximační funkci $v(t)$ prvého řádu vypočteme nejdříve kořen náhradního přenosu soustavy

$$\bar{\alpha}_{1} = \tfrac{1}{5} \lg \frac{0{,}5}{\|{}^{k}s\|} = \tfrac{1}{5} \lg \frac{0{,}5}{(-{}^{k-1}\mathrm{f}s \, {}^{k}\mathrm{f}s)^{1/2}} . \tag{32}$$

Vztah (15) bude mít pro $k = 2$ tvar

$$\left| \frac{{}^{2}r(t_{m})}{h(t_{m})} \right| = \left| \frac{\mathrm{e}^{\alpha_{1} t_{m}}}{\alpha_{1}(1 + \alpha_{1}^{2})^{1/2}} \right| \leqq \varkappa . \tag{33}$$

Uveďme ještě druhou variantu kritéria dominantnosti kořenů s nejmenší absolutní hodnotou. Časový okamžik přeregulování je určen fázovým posunem koeficientu dominantní složky ψ_{1}. Toto posunutí bude vždy větší než π ($\psi_{1} > \pi$). Potom kořeny

$p_{1,2} = \pm j$ jsou dominantní kořeny (pro $\varkappa = 0{,}01$ a $k = 2$), platí-li vztah

$$(34) \qquad -{}^1fs\,{}^2fs \leqq 0{,}165$$

a podmínky uvedené v souvislosti se vztahem (28').

Prvá varianta kritéria dominantnosti platí i pro přenosy typu (1) za předpokladu, že jde jen o dva dominantní kořeny $p_{1,2} = \pm j$. Plyne to např. z Padého aproximace [5], kterou lze každou racionální funkci lomenou převést na tvar s konstantou v čitateli. Otázkou zůstává stanovení počtu dominantních kořenů a vlivu nul na složku dominantních kořenů. Při řešení praktických úloh začínáme zjišťovat dominantnost kořenů vždy postupem uvedeným v tomto odstavci. Teprve po jeho selhání přistupujeme k širším úvahám podle odst. 2.

Závěrem diskutujme ještě tvar vstupního signálu. Opakujme výsledky uvedené v práci [1]. Póly a nuly rušivé funkce neovlivní polohu kořenů, ovlivní pouze velikost residuí. Pól rušivé funkce v blízkosti dominantních kořenů zvětšuje vliv dominantní složky. Nula rušivé funkce v blízkosti dominantních kořenů zmenšuje vliv dominantní složky na průběh regulačního děje. O vlivu pólů a nul rušivé funkce na složky ostatních kořenů si nejlépe uděláme představu podle takto upravené rovnice (5)

$$x(t) \approx h(t) + {}^k r(t)\,,$$

kde k závisí na počtu a poloze nul a pólů rušivé funkce.

5. METODA ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Kritérium pro vyšetření dominantnosti kořenů s nejmenším modulem, jak bylo popsáno v předcházejícím odstavci, charakterizuje vzájemnou polohu kořenů příslušné charakteristické rovnice. V tomto odstavci naznačíme, jak lze využít vztahy (19) a (20) při výpočtu kořenů jmenovatele přenosu (18) a současně tím ukážeme problematiku dominantních kořenů z jiného pohledu. Omezíme se na případy, kdy rovnice má $\frac{1}{2}n$ párů komplexně sdružených kořenů, jejíž moduly jsou $(\alpha_k^2 + \omega_k^2)^{1/2} \geqq 1$. Hledáme tedy pár komplexně sdružených kořenů s nejmenším modulem rovnice

$$(36) \qquad d_{n-2}y^{n-2} + d_{n-3}y^{n-3} + \ldots + d_1 y + d_0 = 0\,.$$

Integrujeme-li odezvu na impuls příslušnou přenosu (18), dostáváme funkce ${}^k s(t)$, kterým odpovídají přenosy

$$(37) \qquad {}^k S(p) = \frac{{}^k R(p)}{P(p)}\,,$$

kde $P(p)$ je jmenovatel přenosu (18) a přenosy ${}^k R(p)$ vypočteme podle vztahů (19). Absolutní hodnoty residní vzdálených kořenů budou konvergovat k nule rychleji než kořenů blízkých počátku. Zmenšování složek vzdálených kořenů se projeví změnou čitatele přenosu ${}^kS(p)$. Kořeny čitatele se budou rušit s velkými kořeny jmenovatele. Příslušný přenos lze upravit takto

$$(38) \quad {}^kS(p) = \frac{{}^kR(p)}{P(p)} = \frac{c_{n-3}\,p[p^{n-4} + (c_{n-4})/(c_{n-3})\,p^{n-5} + \ldots + (c_1)/(c_{n-3})] + c_0}{d_{n-2}p^{n-2} + \ldots + d_1 p + d_0}.$$

Nejlepší přiblížení nastane pro $c_0 = 0$, tzn. podle vztahů (20) pro ${}^k\mathrm{f}s = 0$. Pro dostatečně velké rozdíly modulů kořenů rovnice (36) jsou dva nejmenší dominantní kořeny dány podílem jmenovatele a čitatele přenosu (38). Při praktických výpočtech zpravidla nedojde k vynulování konstanty c_0. Potom je třeba počítat chybu vypočtených kořenů, popřípadě je zpřesnit jinou metodou. Rozbor dalšího postupu, popřípadě porovnání popsané metody s jinými metodami řešení algebraických rovnic je mimo rámec této práce.

6. PŘÍKLADY

Použitelnost výsledků odvozených v předcházejících odstavcích si nejlépe ukážeme na příkladech.

a) Mějme soustavu s přenosem

$$F_s(p) = \frac{1}{p^6 + 6p^5 + 15p^4 + 20p^3 + 15p^2 + 6p + 1}.$$

Máme vyšetřit, zda dominantní kořeny určují dynamické pochody v obvodech s touto soustavou. Nejdříve vypočteme r_{0k} a ω_k příslušné obvodu s proporcionálním regulátorem. Podle odst. 4 transformujeme přenos obvodu pro dominantní kořeny $p_{1,2} = \pm\,\mathrm{j}$

$$F_z(p) = \frac{26{,}9}{p^6 + 10{,}4p^5 + 44{,}9p^4 + 103{,}4p^3 + 134{,}3p^2 + 93p + 90{,}4}.$$

Po vydělení jmenovatele součinem kořenových činitelů dominantních kořenů dostaneme přenos (18) ve tvaru

$${}^{-1}S(p) = \frac{1}{3{,}37}\,\frac{90{,}4}{p^4 + 10{,}4p^3 + 43{,}9p^2 + 93p + 90{,}4}.$$

Podle vztahů (20) vypočteme funkcionály ${}^k\mathrm{f}s$

$$\{{}^k\mathrm{f}s\} = 1;\ -1{,}028;\ +0{,}572;\ -0{,}204;\ +0{,}04\ldots$$

Pomocí vztahů (28) a (31) určíme horní mez $\|{}^2s\|$

$${}^1\mathrm{f}s\,{}^3\mathrm{f}s \geqq \tfrac{1}{2}\,({}^2\mathrm{f}s)^2 \Rightarrow 0{,}0228 > 0{,}0208\,,$$

$$\|{}^2s\|^2 < -{}^1\mathrm{f}s\,{}^2\mathrm{f}s \Rightarrow \|{}^2s\|^2 < 0{,}117\,.$$

Kořen náhradního přenosu prvého řádu podle vztahu (32) $\alpha_1 = 1{,}34$. Časový okamžik maximálního překyvnutí vypočteme z fázového posunutí složky dominantních kořenů ($t_m = 4{,}2$ s).

Pro $\varkappa = 0{,}01$ ve vztahu (33) dostaneme

$$\left| \frac{e^{\alpha_1 t_m}}{\alpha_1 (1 + \alpha_1^2)^{1/2}} \right| = 0{,}001645 < 0{,}01 .$$

Poslední vztah ukazuje, že dynamické vlastnosti obvodu se zkoumanou soustavou jsou určeny převážně dominantními kořeny.

Dominantnost složky kořenů $p_{1,2} = \pm \mathrm{j}$ lze posoudit také podle zjednodušeného výrazu (34)

$$^1\mathrm{f}s\, ^2\mathrm{f}s = 0{,}117 < 0{,}165 .$$

b) Počítejme kořeny rovnice

$$y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 20 = 0$$

postupem posaným v odst. 5. Počítejme nejdříve posloupnost funkcionálů $\{\mathrm{f}s\}$, podle vztahů (20), která ukáže, zda řešení dostatečně rychle konverguje

$$\{\mathrm{f}s\} = 1;\ -1{,}6;\ +1{,}36;\ -0{,}654;\ +0{,}0025 \ldots$$

Hledáme tedy přenos (38) pro $k = 3$

$$^3S(p) = \frac{^3R(p)}{P(p)} = -\frac{0{,}654p(p^2 + 5{,}92p + 9{,}78) + 0{,}05}{p^4 + 8p^3 + 24p^2 + 32p + 20},$$

kde $^3R(p)$ vypočteme pomocí vztahů (19). Velké kořeny se blíží výrazu v závorce čitatele přenosu. Dělením jmenovatele členem v závorce čitatele dostaneme malé kořeny. Vypočteme tyto kořeny

$$(y^2 + 5{,}92p + 9{,}78)(y^2 + 2{,}08p + 1{,}91) = 0 .$$

Skutečné kořeny jsou

$$(y^2 + 6y + 10)(y^2 + 2y + 2) = 0 .$$

Vzhledem k jednoduchosti výpočtu je výsledek vyhovující. Vypočítané kořeny lze zpřesnit např. Shin-Nge-Linovou metodou.

(Došlo dne 27. dubna 1966.)

LITERATURA

[1] J. Štěpán: Aproximace přenosů jednoho typu soustav pomocí dominantních kořenů. Zpráva ÚTIA ČSAV č. 104 (1962).

[2] J. Nekolný: Současná kontrola stability a jakosti regulace. Sborník „Souhrn prací o automatizaci 1959". NČSAV, Praha 1961.

[3] R. C. Oldenbourg, H. Sartorius: A Uniform Approach to the Optimum Adjustement of Control Loops. Sborník: Frequency response. The Macmillan Co., New York 1956.

[4] Люстерник, Л. А., Соболев, В. И.: Элементы функционального анализа. Гостехиздат, Москва—Ленинград 1951.

[5] Padé, H. E.: Sur la répresentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles. Ann. sci. Ec. norm. sup. Paris 3 (1892), 1—92.

Criterion of Root Dominance

JAROMÍR ŠTĚPÁN

The course of control operations in circuits described by transfer functions in the form of a rational broken function of the type (2) are usually determined by several dominant roots, that is, roots with the smallest possible value. The time functions corresponding to the transfer functions (2) may therefore be divided into a component of dominant roots $h(t)$ and into a component of the other roost $g(t)$ in accordance with relation (5). The fundamental problem is evaluation of the component $g(t)$ without knowing the corresponding roots. A function ${}^k r(t)$ (relation (10')) is introduced. The roots corresponding to the functions $g(t)$ and ${}^k r(t)$ are identical. Only the residua of the functions are different, as follows from relations (4) and (10').

The paper presents two definitions of dominant roots (relations (14) and (15)). These defintional relations may be readily evaluated for transfer functions of the type (2) with a constant in the numerator by means of the criterion shown in sect. 4. This criterion is based only on operations with the coefficients of the transfer function (18) which is produced by dividing the denominator of the transfer function (2') by the equation of the dominant roots. Sect. 5 shows the relationship between the criterion of the root dominance and the solution of the algebraic equations.

Ing. Jaromír Štěpán, CSc., Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.