Jaroslav Lukeš; Ivan Netuka; Jiří Veselý

K životnímu jubileu Josefa Krále

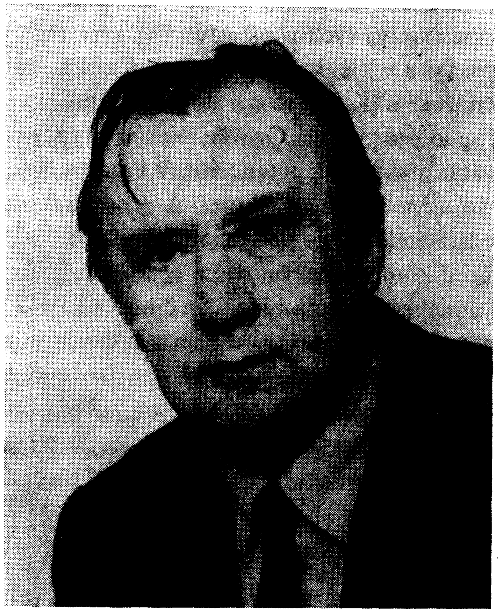
Mathematica Bohemica, Vol. 116 (1991), No. 4, 425–438

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126025

K ŽIVOTNÍMU JUBILEU JOSEFA KRÁLE

JAROSLAV LUKEŠ, IVAN NETUKA, JIŘÍ VESELÝ, Praha

Před deseti lety, v prosinci 1981, se konalo na matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy „Harmonické odpoledne". Bylo věnováno přednáškám z různých oblastí teorie potenciálu. Mezi účastníky semináře byl i jubilant Josef Král, který podstatnou část své vědecké práce zasvětil právě teorii harmonických funkcí a jehož osobní vlastnosti jsou přímo ukázkově harmonické. Patrně všichni, kdo ho znají, potvrdí, že při žádném setkání s ním nedochází k disharmoniím. Autoři tohoto článku jsou přesvědčeni, že by bylo možno následující domněnku i dokázat: *Kdyby většina lidí byla jako Josef Král, nemohlo by na světě docházet k žádným rozporům a svět by byl tak harmonický, že by již nemohl být harmoničtější.*



Josef Král se narodil 23. prosince 1931 v Dolních Bučicích u Čáslavi. Po ukončení vysokoškolských studií na matematicko-fyzikální fakultě UK v roce 1954 se Josef Král stal asistentem tehdejší její katedry matematiky a záhy poté i jejím vědeckým aspirantem. V roce 1960 obhájil kandidátskou disertační práci na téma „O Lebesgueově povrchu uzavřených ploch". Od roku 1965 pracoval jako vědecký pracovník v Matematickém ústavu ČSAV v oddělení parciálních diferenciáních rovnic a od roku 1980 se stal vedoucím oddělení metod matematické fyziky. Mezitím v roce 1967 podal doktorskou disertační práci „Fredholmova metoda v teorii potenciálu", kterou obhájil v r. 1968. Přibližně v téže době předložil Josef Král i habilitační práci „Tepelné toky a Fourierova úloha". Na základě mimořádné úrovně této práce a vysokého hodnocení jeho vědecké činnosti i jeho pedagogického působení na MFF UK navrhla v roce 1969 vědecká rada fakulty jmenování Josefa Krále řádným profesorem. Po mnoha peripetiích a opětovném projednání před vědeckou radou byl konečně v roce 1990 jmenován profesorem pro obor matematická analýza.

Ač odešel pracovat do Matematického ústavu ČSAV, kontakt s fakultou nikdy nepřerušil. Jeho pedagogická činnost je mimořádně rozsáhlá. Po celou dobu konal jak kursovní, tak výběrové přednášky z integrálních a diferenciálních rovnic, z teorie míry, z teorie potenciálu, vedl řadu diplomových prací, působil jako člen komisí pro státní závěrečné, rigorózní a kandidátské zkoušky a je autorem a spoluautorem čtyřdílného rozsáhlého souboru skript z teorie potenciálu; viz [63], [71], [79], [81]. K přednáškovým pobytům je zván i do zahraničí, dlouhodobě je přijat jako hostující profesor na Brownově univerzitě v Providence (USA, 1965–66), na Univerzitě Paris VI (Francie, 1974) a na univerzitě v Campinas (Brazílie, 1978).

V roce 1967 zakládá na MFF UK seminář z matematické analýzy orientovaný především na teorii potenciálu, vychovává řadu žáků a stmeluje kolem sebe kolektiv spolupracovníků. Seminář a výsledky jeho účastníků získávají postupně mezinárodní ohlas a pod vedením Josefa Krále se formuje pražská skupina teorie potenciálu nazývaná přáteli Prague Harmonic Group. Velice brzy jsou navázány kontakty s mnoha světovými odborníky teorie potenciálu. V Praze můžeme přivítat matematiky zvučných jmen jako jsou M. Brelot, H. Bauer, A. Cornea, G. Choquet či B. Fuglede a další významní představitelé teorie potenciálu přijíždějí do Prahy v roce 1987, kdy se zde koná mezinárodní konference věnovaná speciálně této matematické disciplíně.

Podívejme se nyní poněkud blíže na vědeckou činnost Josefa Krále. Její podstatnou část tvoří práce z matematické analýzy, zejména z teorie míry a integrálu a teorie potenciálu. První články Josefa Krále vznikají v celkové vědecké atmosféře konce padesátých let a jsou silně ovlivněny osobnostmi jako jsou J. Mařík, V. Jarník či E. Čech. Práce se týkají především geometrické teorie míry.

Míra a integrál

V pracích [1], [2], [4], [5], [7], [57], [13], [78] jsou vyšetřovány křivkové a plošné integrály. Jako ilustraci uveďme výsledek, který plyne z [2] a který byl zařazen do skript [63]: *Nechť* $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}^2$ *je spojitá parametrická křivka konečné délky,* $f([a, b]) = K$ *a nechť* $\operatorname{ind}_f z$ *značí index bodu* $z \in \mathbf{R}^2 \setminus K$ *vzhledem ke křivce* f. *Pro celá* p *položme* $G_p = \{z \in \mathbf{R}^2 \setminus K;\ \operatorname{ind}_f z = p\}$, $G = \bigcup_{p \neq 0} G_p$. *Nechť* $\omega\colon G \to \bar{\mathbf{R}}$ *je lokálně integrovatelná funkce a* $v = (v_1, v_2) : K \cup G \to \mathbf{R}^2$ *je spojitá vektorová funkce. Jestliže pro každý uzavřený čtverec* $R \subset G$ *s kladně orientovanou hranicí* ∂R *platí*

$$\int_{\partial R} (v_1 \,\mathrm{d}x + v_2 \,\mathrm{d}y) = \iint_R \omega \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,,$$

pak pro každé $p \neq 0$ *existuje vhodně definovaný nevlastní integrál* $\iint_{G_p} \omega \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ *a řadu*

$$\sum_{p=1}^{\infty} p\Big(\iint_{G_p} \omega \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - \iint_{G_{-p}} \omega \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\Big)$$

(*která nemusí konvergovat*) *lze sčítat Cesàrovou metodou aritmetických průměrů k součtu* $\int_f (v_1 \, dx + v_2 \, dy)$.

Transformace integrálů se týkají práce [55], [3] a [61]. Poslední článek je věnován převodu integrálu podle k-rozměrné Hausdorffovy míry na hladké k-rozměrné ploše v $\boldsymbol{R}^m$ na Lebesgueův integrál v $\boldsymbol{R}^k$ (z něho speciálně vyplývá věta o substituci pro Lebesgueovy integrály v $\boldsymbol{R}^m$). V práci [3] se dokazuje věta o substituci pro jednorozměrné Lebesgue-Stieltjesovy integrály. Jako speciální případ se pak dostane věta Banachova typu o variaci složené funkce, z které, jak upozornil Solomon Marcus (Zentralblatt für Math. 80 (1959), s. 271), plyne negativní odpověď na jednu otázku H. Steinhause z "The New Scottish Book". Do této kategorie prací spadá též [6], kde je sestrojen příklad zobrazení $T: D \to \boldsymbol{R}^2$ absolutně spojitého v Banachově smyslu na rovinné oblasti $D \subset \boldsymbol{R}^2$, pro které má Banachova indikatrix $N(\cdot, T)$ na $\boldsymbol{R}^2$ striktně větší integrál než je integrál přes D z absolutní hodnoty Schauderova zobecněného jakobiánu $J_s(\cdot, T)$. Tím Král vyřešil problém, který položil T. Radó v monografii Length and Area (Amer. Math. Soc. 1948, (i) na s. 419). Povrchových měr se týkají práce [56], [9], [10], [11], [12] a [15]. Články [9] a [10] jsou vlastně části již zmíněné kandidátské práce, v níž byl (nezávisle na W. Flemingovi) řešen problém o souvislosti Lebesgueova povrchu a perimetru v trojrozměrném prostoru položený H. Federerem v Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 447–451. V práci [11] je zodpovězena otázka E. Čecha z "The New Scottish Book" týkající se povrchu konvexní plochy ve smyslu A. D. Alexandrova.

Do oblasti teorie integrálu spadají práce [14] a [43]. Z první práce plyne jisté zobecnění Fatouova lemmatu: Je-li $\{f_n\}$ taková posloupnost integrovatelných funkcí na prostoru X se σ-konečnou mírou μ, že pro každou měřitelnou množinu $M \subset X$ je posloupnost $\{\int_M f_n \, d\mu\}$ shora omezená, pak funkce $\liminf f_n^+$ je μ-integrovatelná (ačkoliv posloupnost $\{\int_X f_n^+ \, d\mu\}$ nemusí být omezená). V druhé práci je dokázána věta o dominované konvergenci pro neabsolutně konvergentní GP-integrál, což dává odpověď na jednu otázku J. Mawhina z Czechoslovak Math. J. 106 (1981), 614–632.

V práci [16] Král vyšetřil souvislost mezi délkou obecně nespojitého zobrazení $f: [a, b] \to P$ s hodnotami v metrickém prostoru P a mezi integrálem Banachovy indikatrix vzhledem k lineární míře na $f([a, b])$. Pro spojitá zobrazení f dává výsledek kladnou odpověď na otázku formulovanou G. Nöbelingem v roce 1949.

V práci [27] je dokázáno, že funkce splňující integrální Lipschitzovu podmínku splývají s funkcemi s konečnou variací ve smyslu Tonelli-Cesariho, práce [78] uvádí protipříklad k obrácení Greenovy věty. Konečně práce [52] podává elementární charakterizaci harmonických funkcí v kruhu reprezentovatelných Poissonovým integrálem riemannovsky integrovatelné funkce.

Z oblasti míry a integrování je také ještě práce [33], kde Král podává zajímavé řešení matematické úlohy o vlasech (formulované L. Zajíčkem): Ke každé otevřené množině $G \subset \boldsymbol{R}^2$ existuje množina $H \subset G$ plné míry a zobrazení přiřazující každému bodu $x \in H$ oblouk $A(x) \subset G$ s koncovým bodem x tak, že $A(x) \cap A(y) = \emptyset$, kdykoliv $x \neq y$.

Metoda integrálních rovnic v teorii potenciálu

V práci [58] se začíná Král zabývat problematikou metody integrálních rovnic a jejím použitím při řešení okrajových úloh teorie potenciálu. Kořeny této metody sahají do minulého století a jsou spojeny např. se jmény C. Neumann, H. Poincaré, A. M. Ljapunov, I. Fredholm či J. Plemelj. Všeobecně přijímané názory o nezbytnosti silných omezujících předpokladů o hladkosti hranice pro podstatné vlastnosti integrálních rovnic vyjádřené např. v monografiích F. Riesze a B. Sz.-Nagye, R. Couranta a D. Hilberta, nebo B. Epsteina, vyvrcholily přesvědčením, že tato metoda dosáhla pro rovinný případ přirozené meze své aplikovatelnosti ve výsledcích J. Radona, ale nehodí se pro oblasti s nehladkými hranicemi. Poznamenejme, že sama metoda však poskytuje některé výhody: při jejím použití krásně vyniká dualita Dirichletovy a Neumannovy úlohy, poskytuje integrální reprezentaci řešení a – jak se ukázalo v nedávné době – je vhodná i z hlediska numerických výpočtů.

K popsání Králových výsledků je vhodné definovat jím zavedenou mimořádně užitečnou veličinu, tzv. cyklickou variaci. Je-li $G \subset \boldsymbol{R}^m$ libovolná otevřená množina s kompaktní hranicí a $z \in \boldsymbol{R}^m$, označme $p(z; \theta)$ polopřímku s počátečním bodem z a směrem $\theta \in \Gamma := \{\theta \in \boldsymbol{R}^m; |\theta| = 1\}$. Pro každou $p(z; \theta)$ spočítáme počet bodů, které jsou podstatnými nárazy $p(z; \theta)$ na ∂G; jsou to ty body z $p(z; \theta) \cap \partial G$, v jejichž každém okolí U na této polopřímce leží ve smyslu jednorozměrné (Hausdorffovy) míry H_1 dostatečně mnoho bodů z G i z $\boldsymbol{R}^m \setminus G$, tj. platí

$$H_1(U \cap p(z; \theta) \cap G) > 0\,, \quad H_1(U \cap p(z; \theta) \cap (\boldsymbol{R}^m \setminus G)) > 0\,.$$

Počet těch nárazů $p(z; \theta)$ na ∂G, které jsou od z vzdáleny maximálně o r, označme $n_r(z, \theta)$. Nyní definujeme hodnotu $v_r^G(z)$ jako průměrný počet nárazů $n_r(z, \theta)$ vzhledem ke všem možným polopřímkám s počátkem v bodě z, tj.

$$v_r^G(z) = \int_\Gamma n_r(z, \theta)\, \mathrm{d}\sigma(\theta)\,,$$

kde integrujeme vzhledem k (normalizované) povrchové míře σ na Γ. Pro $r = \infty$ píšeme stručněji $v^G(z) := v_\infty^G(z)$. Z hlediska užití metody integrálních rovnic je vhodné si položit následující otázky: (1) pro jak obecné množiny lze rozumně zavést potenciál dvojvrstvy (jádro je odvozeno od fundamentálního řešení Laplaceovy rovnice), resp. normálovou derivaci potenciálu jednoduché vrstvy definované nábojem rozloženým na hranici ∂G; (2) kdy lze tento potenciál (spojitě) rozšířit z oblasti na její hranici; (3) kdy lze tímto rozšířením definované operátorové rovnice řešit?

Odpověď na první dvě otázky má formu nutných a postačujících podmínek formulovaných pomocí funkce v^G. V [58] vyřešil Král plně problém (2) při současném použití ještě tzv. radiální variace; obě veličiny mají svůj inspirační zdroj v Banachově indikatrix. Poznamenejme na tomto místě, že Dirichletova úloha je lehce formulovatelná i pro množiny s nehladkou hranicí, zatímco u Neumannovy úlohy u takových množin narážíme na principiální obtíže od samotného počátku, bez závislosti na použité metodě. Proto bylo nutno přejít ve formulaci od popisu pomocí bodové funkce v okrajové podmínce k popisu pomocí toku potenciálu indukovaného nábojem na hranici.

Metodou integrálních rovnic se Dirichletova a Neumannova úloha řeší nepřímo: řešení se hledá ve tvaru potenciálu dvojvrstvy nebo potenciálu jednoduché vrstvy. Pomocí vět o skoku se tyto úlohy převedou na řešení operátorových rovnic

$$\overline{W}^G f = g \quad \text{a} \quad \overline{NU}\mu = \nu ,$$

kde f je hledaná a g předem určená spojitá funkce, μ hledaný a ν daný náboj na hranici ∂G. Uvažované potenciály jsou harmonické funkce na G, přičemž funkce g a náboj ν určují okrajové podmínky. Pro zjednodušení sledujme pouze průhlednější, i když matematicky méně zajímavý, případ Dirichletovy úlohy, který odpovídá první z výše uvedených rovnic. Všimněme si tří veličin stejné povahy, které souvisejí s řešitelností problémů (1)–(3) a které jsou vesměs odvozeny od zavedené cyklické variace:

$$\text{(a) } v^G(x)\,, \quad \text{(b) } V^G := \sup\{v^G(\xi);\ \xi \in \partial G\}\,,$$

$$\text{(c) } v_0^G := \lim_{r\to 0+} \sup\{v_r^G(\xi);\ \xi \in \partial G\}\,.$$

Zatímco v [58] je výchozím bodem množina $G \subset \boldsymbol{R}^2$ ohraničená křivkou K konečné délky, v dalších pracích [22], [64] se již vyšetřuje od počátku libovolná otevřená množina G s kompaktní hranicí ∂G. V [58] je řešena otázka (2), čímž se otevřela cesta k zobecnění Radonových výsledků pro křivky s omezenou rotací. Je zde zavedena také ještě radiální variace křivky a obou variací je použito v [60], [17] pro studium úhlových limit potenciálu dvojvrstvy; nalezené výsledky určují explicitně hodnotu limity a dávají geometricky názorná kritéria, která jsou nutnými a postačujícími podmínkami existence těchto limit. Vzájemný vztah obou veličin a jejich vztah k délce a ohybu křivek je studován v [59] a [17]. Problematika je pro rovinný případ shrnuta ve velmi obsáhlé práci o dvou částech [20], [21], kde jsou nalezené výsledky propojeny a jsou dány podmínky řešitelnosti získaných operátorových rovnic.

Pro případ dimenze $m \geqq 3$ uveďme podmínky explicitně. Je-li $G \subset \boldsymbol{R}^m$ množina s *hladkou hranicí* ∂G, je potenciál dvojvrstvy Wf se spojitou hustotou f definovanou na ∂G definován vzorcem

$$Wf(x) := \int_{\partial G} f(y) \frac{(y - x) \cdot n(y)}{|x - y|^m} \, \mathrm{d}H_{m-1}(y)\,, \quad x \in \boldsymbol{R}^m \setminus \partial G\,,$$

kde $n(y)$ je vektor (vnější) normály ke G v bodě $y \in \partial G$. Hodnotu $W\varphi(x)$ lze pro $x \notin \partial G$ definovat distributivně pro libovolnou otevřenou G s kompaktní hranicí a každou hladkou funkci φ; tato hodnota je integrálem podle jisté míry (závislé na x) právě tehdy, je-li veličina (a) konečná. Pak lze ale definovat $Wf(x)$ pro dostatečně obecnou f integrálem z f podle této míry.

Chceme-li tedy definovat na G zobecněný potenciál dvojvrstvy, hodnota (a) musí být konečná pro všechna $x \in G$. Stačí však konečnost $v^G(x)$ na konečné množině bodů x z G, které však nesmí ležet v jediné nadrovině; množina G má pak již konečný perimetr. Na její podstatné hranici (jisté rozhodující části hranice) lze definovat normálu aproximativně. To se promítne do situace příjemným způsobem: vzorec pro výpočet Wf zůstává zachován, nahradí-li se v něm klasická normála zobecněnou normálou ve Federerově smyslu. Je-li veličina V^G z (b) konečná, je konečná i funkce v (a) všude na G a Wf lze spojitě rozšířit z G na $\bar{G}$ pro každou f spojitou na ∂G. Tato podmínka je opět podmínkou nutnou a postačující a lze tedy v tomto případě nahradit řešení Dirichletovy úlohy řešením první z výše uvedených operátorových rovnic. Přitom operátor $\overline{W}^G f$ je definován limitními hodnotami $W^G f$ v bodech hranice ∂G. Podobná situace, kterou podrobněji nepopíšeme, nastává pro duální rovnici s operátorem $\overline{NU}^G$.

Tyto výsledky (zobecňující předešlé pro vícerozměrný případ) lze nalézt v pracích [22], [64], kde je také studována řešitelnost těchto rovnic. Tam dostává Král postačující podmínku řešitelnosti závisející na velikosti veličiny v (c), pomocí níž explicitně vyjadřuje tzv. Fredholmův poloměr jistých operátorů souvisejících s operátory v uvažovaných rovnicích. Za poznámku stojí, že pouhá hladkost hranice nezaručuje konečnost veličin v (b) či (a); srv. [23].

Vzhledem k mnoha příbuzným vlastnostem Laplaceovy rovnice a rovnice vedení tepla je přirozené se ptát, zda se Králův přístup (realizující plán vytýčený Plemeljem) dá použít pro rovnici vedení tepla. Nahradíme-li v definici v^G svazek polopřímek vyplňující celý prostor $\boldsymbol{R}^m$ svazkem parabolických oblouků, který vyplňuje poloprostor v $\boldsymbol{R}^{m+1}$ časově „pod" uvažovaným bodem (x, t) časoprostoru, lze dospět k obdobným výsledkům i pro rovnici vedení tepla. Jen hlubší pohled na příbuznost a odlišnost rovnic dává tušit, že postup musel doznat zásadních změn, aby bylo možno dosáhnout srovnatelných výsledků; viz [65], [24]. Je třeba říci, že zavedená cyklická variace se ukázala dobrou pomůckou při studiu dalších problémů, např. svázaných s Cauchyovým integrálem; viz [25], [28].

Je třeba také říci, že Král kromě již zmíněných skript vydává později v monografii [38] ucelený přehled popsaných výsledků – tam se s nimi pro Laplaceovou rovnici může čtenář nejpohodlněji seznámit. V této monografii jsou zahrnuty i některé nové výsledky: je-li např. veličina uvedená v (c) dostatečně malá, má G pouze konečně mnoho komponent – toto je jeden z důsledků Fredholmovy metody; viz [73], [38]. Část publikace je věnována výsledkům z [35] o kontraktivitě Neumannova operátoru, která souvisí s problematikou numerického řešení okrajových úloh; odpověď je opět definitivní – jde přitom o problematiku starou více než 100 let.

Práce [76], [80], [86], [47], spadající tématicky do oblasti použití metody integrálních rovnic, souvisejí s pozváními k přednáškám na konferencích a sympóziích. Král popsané metody dále propracovává a např. v [86] ukazuje použitelnost metod i pro „nekonečněrozměrnou" Laplaceovu rovnici.

V posledním období se vrací k problematice z trochu odlišného zorného úhlu. Veličina v (c) může být relativně malá pro opravdu složité množiny G, avšak může být i nepříjemně veliká pro některé dokonce velmi jednoduché množiny vzniklé např. v $\boldsymbol{R}^m$ jako konečné sjednocení kvádrů. I zde je však pro tento speciální případ řešení již známo. Ukazuje se, že vhodná renormace vede k žádoucímu zmenšení Fredholmova poloměru (pomůckou je „váhová" cyklická variace); viz [44], [48].

Pro Královy výsledky týkající se okrajových úloh je typické, že analytické vlastnosti zkoumaných operátorů jsou vyjádřeny v názorných geometrických termínech. Pro rovinný případ viz zejména [46].

Odstranitelné singularity

Král přispěl významným způsobem k problematice odstranitelných singularit řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Nechť $P(D)$ je parciální diferenciální operátor s hladkými koeficienty definovaný v otevřené množině $U \subset \boldsymbol{R}^m$ a $L(U)$ je množina lokálně integrovatelných funkcí na U. Relativně uzavřená množina $F \subset U$ se nazývá odstranitelná pro $L(U)$ vzhledem k $P(D)$, platí-li tato implikace: Je-li $h \in L(U)$, pro niž $P(D)\,h = 0$ na $U \setminus F$ (ve smyslu distribucí), potom $P(D)\,h = 0$ na celé množině U.

Jako příklad uvažujme případ, že $P(D)$ je Laplaceův operátor v $\boldsymbol{R}^m$, $m > 2$, a $L(U)$ je jedna z následujících dvou množin funkcí: (1) spojité funkce na U; (2) funkce splňující Hölderovu podmínku s exponentem $\gamma \in (0,1)$. Z klasické teorie potenciálu je známo, že v případě (1) je množina odstranitelná pro $L(U)$, právě když má nulovou Newtonovu kapacitu. Pro případ (2) dokázal L. Carleson (1963), že množina je odstranitelná pro $L(U)$, právě když je nulová její Hausdorffova míra dimenze $\gamma + m - 2$.

V práci [67] dosáhl J. Král výsledek Carlesonova typu pro řešení rovnice vedení tepla. Tepelný operátor není, na rozdíl od Laplaceova operátoru, izotropní. Anizotropie do Králova výsledku vstupuje dvojím způsobem: uvažuje se Hölderova podmínka s exponentem γ vzhledem k prostorovým proměnným a $\frac{1}{2}\gamma$ vzhledem k časové proměnné, a dále se užívá anizotropní Hausdorffova míra. Zhruba řečeno, k pokrývání se užívají intervaly o hraně délky s ve směru prostorových souřadnic a hraně délky s^2 ve směru časové osy. Zmíněná práce je začátkem rozsáhlého projektu, jehož cílem je zvládnout odstranitelné singularity pro obecnější diferenciální operátory a širší škály prostorů funkcí.

Nechť M je konečná množina multiindexů a operátor

$$P(D) = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha D^\alpha$$

má nekonečně diferencovatelné koeficienty na otevřené množině $U \subset \boldsymbol{R}^m$. Zvolme pevně m-tici $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ přirozených čísel tak, aby

$$|\alpha : n| = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k / n_k \leqq 1$$

pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in M$.

Pro další je vhodné připomenout, že operátor $P(D)$ se nazývá semieliptický, jestliže $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 0$ je jediným reálným řešením rovnice

$$\sum_{|\alpha:n|=1} a_\alpha \xi^\alpha = 0 .$$

(Zde ovšem $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_m^{\alpha_m}$ pro $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.) Třída semieliptických operátorů zahrnuje mj. eliptické operátory, parabolické operátory ve smyslu Petrovského (speciálně tepelný operátor) i Cauchy-Riemannův operátor.

Při pevném n a při označení $\bar{n} = \max \{n_k; 1 \leqq k \leqq m\}$ přiřadíme operátoru $P(D)$ metriku

$$\varrho(x, y) = \max \{|x_k - y_k|^{n_k/\bar{n}}; 1 \leqq k \leqq m\}, \quad x, y \in \boldsymbol{R}^m .$$

Každé měrné funkci f odpovídá na metrickém prostoru $(\boldsymbol{R}^m, \varrho)$ obvyklým způsobem definovaná Hausdorffova míra. V ní je, zhruba řečeno, zachyceno případné nestejné chování $P(D)$ vzhledem k jednotlivým souřadnicím a právě pomocí měr tohoto typu se J. Královi podařilo charakterizovat odstranitelné singularity pro řadu důležitých velmi obecných situací.

V práci [30] (viz také [72]) se vyšetřují odstranitelné singularity pro anizotropní hölderovské třídy, v [75] pro funkce s jistým anizotropním modulem spojitosti; v takovém případě je měrná funkce pro odpovídající Hausdorffovu míru odvozena od modulu spojitosti. V práci [77] se uvažují hölderovské podmínky integrálního typu (zahrnující Morreyovy a Campanatovy prostory i BMO).

Práce [39] a [42] jdou ještě dále: zkoumají se prostory funkcí, jejichž předepsané derivace splňují podmínky výše zmíněných typů.

Pro obecné operátory Král dokázal, že nulovost (případně σ-konečnost) vhodné Hausdorffovy míry je postačující podmínka odstranitelnosti pro danou množinu funkcí. (Zdůrazněme, že při konstrukci vhodné Hausdorffovy míry odráží metrika ϱ vlastnosti operátoru $P(D)$ a měrná funkce odráží vlastnosti třídy uvažovaných funkcí.)

Je pozoruhodné, že pro semieliptické operátory s konstantními koeficienty Král ukázal, že odvozené postačující podmínky jsou také nutné. Dodatečné omezení na operátory se využije ke stanovení přesných růstových podmínek pro fundamentální řešení a jeho derivace. Metoda teorie potenciálu (kombinovaná s tvrzením Frostmanova typu o rozložení míry), která se v důkazu nutných podmínek uplatňuje, je pěkně vyložena v [99]. Tam jsou také prezentovány výsledky o odstranitelných singularitách pro vlnový operátor; viz [53] a práce [50] z příbuzné tématiky.

Na závěr této části dokumentujeme úplnost Králových výzkumů tímto výsledkem vyplývajícím pro eliptické operátory s konstantními koeficienty z tvrzení dokázaných v [42]: odstranitelné singularity pro funkce, které s určitými svými derivacemi leží ve vhodném Campanatově prostoru, jsou charakterizovány nulovostí klasických Hausdorffových měr, jejichž dimenze (v závislosti na prostoru funkcí) vyplní celý interval mezi 0 a m.

Teorie potenciálu

V šedesátých letech se začala rozvíjet teorie harmonických prostorů. Jejím cílem bylo vybudovat abstraktní teorii potenciálu, která zahrnuje nejen klasickou teorii potenciálu, ale také umožňuje studium široké třídy parciálních diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu. Další vývoj ukázal, že teorie harmonických prostorů představuje vhodný spojovací článek mezi parciálními diferenciálními rovnicemi a stochastickými procesy.

V abstraktní teorii vystupuje místo euklidovského prostoru lokálně kompaktní topologický prostor (to umožňuje zahrnout variety a Riemannovy plochy a zároveň uplatnit teorii Radonových měr) a řešení diferenciální rovnice zastupuje svazek vektorových prostorů spojitých funkcí splňující určité přirozené axiómy. Jedním z nich je např. axióm báze, zaručující existenci báze topologie tvořené množinami regulárními pro Dirichletovu úlohu, či konvergenční axióm, který je vhodnou analogií klasické Harnackovy věty.

J. Král patrně neměl v úmyslu systematicky pracovat v teorii harmonických prostorů. Pochopil však, že tuto moderní rozvíjející se partii teorie potenciálu nelze opomenout. Po delší čas na semináři referoval Bauerovu monografii „Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie“ a později monografii autorů C. Constantinescu a A. Cornea „Potential Theory on Harmonic Spaces“.

Harmonických prostorů se týkají čtyři články ze seznamu prací J. Krále.

V [32] je pozitivně zodpovězen problém J. Lukeše o existenci nedegenerovaného harmonického svazku s Brelotovou konvergenční vlastností na souvislém prostoru, který není lokálně souvislý. Práce [26] poskytuje úplnou charakterizaci množin elipticity a absorbčních množin na jednodimenzionálních harmonických prostorech. Všechny nekompaktní souvislé jednodimenzionální Brelotovy harmonické prostory jsou popsány v [31]. V článku [29] jsou studovány harmonické prostory s touto vlastností pokračování: Každý bod je obsažen v oblasti D takové, že každou harmonickou funkci definovanou na libovolné podoblasti v D lze harmonicky pokračovat na celou oblast D. Je ukázáno, že Brelotův prostor X má tuto vlastnost, právě když má tuto jednoduchou topologickou strukturu: pro každé $x \in X$ existují oblouky $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takové, že $\bigcup \{C_j;\ 1 \leqq j \leqq n\}$ je okolí bodu x a $C_j \cap C_k = \{x\}$ pro $1 \leqq j < k \leqq n$.

Práce [41] a [37] jsou věnovány potenciálům měr. V [41] je ukázáno, že pro jádra K splňující dominanční princip platí následující princip spojitosti: Je-li ν náboj, jehož potenciál $K\nu$ je konečný, a je-li restrikce $K\nu$ na nosič náboje ν spojitá, pak je potenciál $K\nu$ již nutně spojitý na celém prostoru. V případě míry (= nezáporného náboje) se jedná o klasickou Evans-Vasilescovu větu. Z ní však (přechodem ke kladné a záporné části) výše uvedené tvrzení neplyne, může totiž docházet k „vyrušení nespojitostí“.

V článku [37] jsou dokázány nutné a postačující podmínky na míry ν na $\boldsymbol{R}^m$, pro něž existuje netriviální míra ϱ na $\boldsymbol{R}$ taková, že tepelný potenciál míry $\nu \otimes \varrho$ splňuje lokálně anizotropní Hölderovu podmínku.

V práci [45] se studuje velikost množiny jemných ostrých maxim funkcí definovaných na $\boldsymbol{R}^m$. Připomeňme, že jemná topologie v prostoru $\boldsymbol{R}^m$, $m > 2$, je definována jako nejhrubší ze všech topologií, pro něž jsou všechny potenciály spojité. Pro $f: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ označme $M(f)$ množinu bodů $x \in \boldsymbol{R}^m$ majících jemné okolí V takové, že $f < f(x)$ na $V \setminus \{x\}$. V [45] je dokázáno, že pro borelovskou funkci f má množina $M(f)$ nulovou Newtonovu kapacitu.

V [40] dokázal J. Král následující větu Radóova typu pro harmonické funkce (a tím potvrdil Greenfieldovu domněnku): Je-li h spojitě diferencovatelná funkce na otevřené množině $G \subset \boldsymbol{R}^m$ a h je harmonická na množině $G_h = \{x \in G; h(x) \neq 0\}$, pak je h již harmonická na celé množině G. V tomto případě pro množinu G_h, na níž je h harmonická, platí $h(G \setminus G_h) \subset \{0\}$. J. Král v [40] charakterizuje v termínech vhodných Hausdorffových měr pro různé prostory funkcí množiny $E \subset \boldsymbol{R}$, pro něž podmínka $h(G \setminus G_h) \subset E$ zaručuje, že h je již harmonická na celé množině G.

Analogie Radóovy věty pro diferenciální formy a pro řešení eliptických diferenciálních rovnic je dokázána v [51].

Práce [82], [36] přímo do teorie potenciálu nezapadají, souvisí s ní jen volně. Jsou věnovány odhadu analytické kapacity pomocí lineární míry. Pro kompaktní množinu $Q \subset \boldsymbol{C}$ a pro $z \in \boldsymbol{C}$ označme $v^Q(z)$ průměrný počet průsečíků polopřímek vycházejících z bodu z s Q a položme $V(Q) = \sup\{v^Q(z); z \in Q\}$. Uveďme hlavní výsledek práce [36]: Je-li $Q \subset \boldsymbol{C}$ kontinuum a $K \subset Q$ je kompaktní, potom pro analytickou kapacitu $\gamma(K)$ a lineární míru $m(K)$ platí nerovnost

$$\gamma(K) \geqq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2V(Q) + 1} m(K) .$$

Snad se nám podařilo naznačit, v jakém smyslu se Královy matematické výsledky vyznačují hloubkou a elegancí. Mnohé z nich mají definitivní charakter a podávají konečné řešení závažných problémů. Způsob prezentace výsledků ukazuje Královo chápání matematické přesnosti, dokonalosti i krásy.

Dosažené výsledky a jejich mezinárodní ohlas spolu s mimořádně úspěšným učitelským působením řadí Josefa Krále mezi přední poválečné československé matematiky. Jeho skromnost, obětavost i pokora před nesmírným poznáním matematiky z něj činí výjimečného člověka.

Osobní vlastnosti kombinované s talentem, ale hlavně velkou pracovitostí, houževnatostí a oddaností matematice, stojí v pozadí Králova úspěchu. Neboť ani pro Josefa Krále neexistovala královská cesta k matematice.

PUBLIKACE PŘINÁŠEJÍCÍ NOVÉ VÝSLEDKY S ÚPLNÝMI DŮKAZY

[1] *Der Greensche Satz*. Czechoslovak Math. J. *7* (1957), 235—247, společně s *J. Maříkem*.

[2] *O krivolinějnych integralach na ploskosti*. Czechoslovak Math. J. *7* (1957), 584—598.

[3] *Preobrazovanie integrala Stieltjesa-Lebega*. Czechoslovak Math. J. *8* (1958), 83—93, společně s *J. Markem*.

[4] *On Lipschitzian mappings from the plane into Euclidean spaces*. Czechoslovak Math. J. *8* (1958), 257—266.

[5] *Poznámka ke Gauss-Ostrogradského formuli*. Časopis Pěst. Mat. *84* (1959), 283—292.

[6] *Note on strong generalized jacobians*. Czechoslovak Math. J. *9* (1959), 429—439.

[7] *Zamknutyje sistěmy otobraženij i poverchnostnyj intěgral*. Czechoslovak Math. J. *10* (1960), 27—67.

[8] *K úloze č. 2 položené J. Maříkem*. Časopis Pěst. Mat. *85* (1960), 205.

[9] *Poznámka o množinách, jejichž charakteristická funkce má za parciální derivaci zobecněnou míru*. Časopis Pěst. Mat. *86* (1961), 178—194.

[10] *Poznámka o povrchu kartézského součinu dvou množin*. Časopis Pěst. Mat. *86* (1961), 261—268.

[11] *K jednomu problému o povrchu konvexní plochy*. Časopis Pěst. Mat. *86* (1961), 277—287.

[12] *O lebegovoj ploščadi prostych poverchnostěj*. Czechoslovak Math. J. *12* (1962), 44—68.

[13] *Note on the Stokes formula for 2-dimensional integrals in n-space*. Mat. fyz. časopis Slov. Akad. Vied. *12* (1962), 280—292, společně s *B. Riečanem*.

[14] *Note on sequences of integrable functions*. Czechoslovak Math. J. *13* (1963), 114—126, společně s *J. Jelínkem*.

[15] *A note on perimeter and measure*. Czechoslovak Math. J. *13* (1963), 139—147.

[16] *Poznámka o lineární míře a délce cesty v metrickém prostoru*. Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. *1* (1963), 1—10.

[17] *Some inequalities concerning the cyclic and radial variations of a plane path-curve*. Czechoslovak Math. J. *14* (1964), 271—280.

[18] *On the logarithmic potential of the double distribution*. Czechoslovak Math. J. *14* (1964), 306—321.

[19] *Non-tangential limits of the logarithmic potential*. Czechoslovak Math. J. *14* (1964), 455 až 482.

[20] *The Fredholm radius of an operator in potential theory I*. Czechoslovak Math. J. *15* (1965), 454—473.

[21] *The Fredholm radius of an operator in potential theory II*. Czechoslovak Math. J. *15* (1965), 565—588.

[22] *The Fredholm method in potential theory*. Trans. Amer. Math. Soc. *125* (1966), 511—547.

[23] *Hladké funkce s nekonečnou cyklickou variací*. Časopis Pěst. Mat. *93* (1968), 178—185.

[24] *Flows of heat and the Fourier problem*. Czechoslovak Math. J. *20* (1970), 556—598.

[25] *On the modified logarithmic potential*. Czechoslovak Math. J. *21* (1971), 76—98, společně s *J. Lukešem*.

[26] *Elliptic points in one-dimensional harmonic spaces*. Comment. Math. Univ. Carolin. *12* (1971), 453—483, společně s *J. Lukešem* a *I. Netukou*.

[27] *Functions satisfying an integral Lipschitz conditions*. Acta Univ. Carolin.-Math. Phys. *12* (1971), 51—54.

[28] *Integrals of the Cauchy type*. Czechoslovak Math. J. *22* (1972), 663—682, společně s *J. Lukešem*.

[29] *Indefinite harmonic continuation*. Časopis Pěst. Mat. *98* (1973), 87—94, společně s *J. Lukešem*.

[30] *Removable singularities of solutions of semielliptic equations.* Rend. Mat. (6) *6* (1973), 763—783.
[31] *Brelotovy prostory na jednodimensionálních varietách.* Časopis Pěst. Mat. *99* (1974), 179 až 185, společně s *J. Lukešem.*
[32] *Jeden příklad harmonického svazku.* Časopis Pěst. Mat. *101* (1976), 98—99.
[33] *K jedné matematické úloze o vlasech.* Časopis Pěst. Mat. *101* (1976), 305—307.
[34] *O graničnom poveděniji potěncialov dvojnogo sloja. Trudy Seminara S. L. Soboleva,* vol. 2, Akad. Nauk Novosibirsk, Novosibirsk, 1976, 19—34.
[35] *Contractivity of C. Neumann's operator in potential theory.* J. Math. Anal. App. *61* (1977), 607—619, společně s *I. Netukou.*
[36] *Analytic capacity and linear measure.* Czechoslovak Math. J. *28* (1978), 445—461, společně s *J. Fukou.*
[37] *Heat sources and heat potentials.* Časopis Pěst. Mat. *105* (1980), 184—191, společně s *S. Mrzenou.*
[38] *Integral Operators in Potential Theory. Lecture Notes in Mathematics,* vol. 823, Springer--Verlag, 1980, 170 s.
[39] *Ob osobennostjach rešenij uravněnij v častnych proizvodnych; Trudy Seminara S. L. Soboleva,* vol. 1, Akad. Nauk Novosibirsk, Novosibirsk, 1983, 78—89.
[40] *Some extension results concerning harmonic functions.* J. London Math. Soc. (*2*) *28* (1983), 62—70.
[41] *A note on continuity principle in potential theory.* Comment Math. Univ. Carolin. *25* (1984), 149—157.
[42] *Semielliptic singularities.* Časopis Pěst. Mat. *109* (1984), 304—332.
[43] *Note on generalized multiple Perron integral.* Časopis Pěst. Mat. *110* (1985), 371—374.
[44] *Some examples concerning applicability of the Fredholm-Radon method in potential theory.* Aplikace matematiky *31* (1986), 293—308, společně s *W. Wendlandem.*
[45] *Fine topology in potential theory and strict maxima of functions.* Exposition. Math. *5* (1987), 185—191, společně s *I. Netukou.*
[46] *Boundary regularity and normal derivatives of logarithmic potentials.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. *A 106* (1987), 241—258.
[47] *On the applicability of the Fredholm-Radon method in potential theory and the panel method. Proceedings of the Third GAMM-Seminar Kiel 1987,* Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1987, s. 120—136, společně s *W. Wendlandem.*
[48] *Layer potentials on boundaries with corners and edges.* Časopis Pěst. Mat. *13* (1988), 169—178, společně s *T. Angellem, R. E. Kleinmanem.*
[49] *Problème de Neumann faible avec condition frontière dans* L^1. *Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris No 9; Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1393, Springer-Verlag, 1988, s. 145—160.
[50] *Removable singularities of the functional wave equation.* Z. Anal. A. *8*(*6*) (1989), 495 až 500, společně s *M. Chlebíkem.*
[51] *Extension results of the Radó type. Proceedings of the Internat. Colloquium in Complex Analysis,* Bucharest 1989, v tisku.
[52] *Poisson integrals of Riemann integrable functions*; společně s *W. F. Pfefferem*; v tisku.
[53] *Removability of the wave singularities in the plane*; společně s *M. Chlebíkem*; v tisku.

OSTATNÍ PUBLIKACE

[54] *Greenova věta.* Časopis Pěst. Mat. *81* (1956), 476—479, společně s *M. Neubauerem.*
[55] *Transformace vícerozměrných integrálů.* Časopis Pěst. Mat. *83* (1958), 365—368.
[56] *O lebegovoj ploščadi zamknutych poverchnostěj.* Czechoslovak Math. J. *9* (1959), 470—471.
[57] *On r-dimensional integrals in* ($r + 1$)*-space.* Czechoslovak Math. J. *11* (1961), 626—628.

[58] *On the logarithmic potential.* Comment. Math. Univ. Carolin. *3* (1962), 3—10.
[59] *On cyclic and radial variations of a plane path.* Comment. Math. Univ. Carolin. *4* (1963), 3—9.
[60] *Ob uglovych predělnych značenijach integralov tipa Koši.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *155* (1964), 32—34.
[61] *Integrace podle Hausdorffovy míry na hladké ploše.* Časopis Pěst. Mat. *89* (1964), 433—448, společně s *J. Maříkem.*
[62] *O potenciale dvojnogo sloja v mnogomerom prostranstve.* Dokl. Akad. Nauk SSSR *159* (1964), 1218—1220.
[63] *Teorie potenciálu I (skriptum).* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 159 s.
[64] *On the Neumann problem in potential theory.* Comment. Math. Univ. Carolin. *7* (1966), 485—493.
[65] *Flows of heat.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl.Sci. Fis. Mat. Natur (*8*) *46* (1969), 61—63.
[66] *Limits of double layer potentials.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl.Sci. Fis. Mat. Natur.; (*8*) *48* (1970), 39—42.
[67] *Hölder-continuous heat potentials.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl.Sci. Fis. Mat. Natur. (*8*) *51* (1971), 17—19.
[68] *K úloze č. 4, kterou položil I. Babuška.* Časopis Pěst. Mat. *97* (1972), 207—208.
[69] *Úloha č. 1 (o semiregulárních množinách).* Časopis Pěst. Mat. *97* (1972), 334.
[70] *Ob ustranimych osobennostjach rešenij uravněnija těploprovodnosti. Primeněnije funkcionalnych metodov k krajevym zadačam matematičeskoj fiziki.* Akad. Nauk Novosibirsk, Novosibirsk, 1972, s. 103—106.
[71] *Teorie potenciálu II (skriptum).* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972, společně s *I. Netukou* a *J. Veselým,* 348 s.
[72] *Regularity of potentials and removability of singularities of partial differential equations. Proceedings of the Conference „Equadiff 3"*, J. E. Purkyně University, Brno, 1972, s. 179—185.
[73] *A note on the Robin problem in potential theory.* Comment. Math. Univ. Carolin. *14* (1973), 767—771.
[74] *Nonlinear evolution equations and potential theory. Proceedings of a Summer School (editor),* Academia, Praha, 1975.
[75] *Potentials and removability of singularities. Nonlinear evolution equations and potential theory.* Academia, Praha, 1975, s. 95—106.
[76] *Potentials and boundary value problems. Proceedings of the Conference "5. Tagung über Probleme der Mathematischen Physik".* Karl-Marx-Stadt, 1975, s. 484—500; viz též Correction of misprints, Comment. Math. Univ. Carolin. *17* (1976), 205—206.
[77] *Singularités non essentielles des solutions des équations aux dérivées partielles. Séminaire de Théorie du Potentiel Paris (1972—74); Lecture Notes in Mathematics,* vol. 518, Springer-Verlag, 1974, s. 95—106.
[78] *Příklad k jednomu obrácení Greenovy věty.* Časopis Pěst. Mat. *101* (1976), 205—206.
[79] *Teorie potenciálu III (skriptum).* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1976, společně s *I. Netukou* a *J. Veselým*; 216 s.
[80] *Potential theory and Neumann's method.* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR *3—4* (1976), 71—79.
[81] *Teorie potenciálu IV (skriptum).* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1977, společně s *I. Netukou* a *J. Veselým*; 304 s.
[82] *Analytic capacity. Proceedings of the Conference „Elliptische Differentialgleichungen, Rostock 1977"*, s. 133—142.
[83] *Ob ustranimosti osobennostěj pri rešeniji differencial'nych uravněnij i o principe Nějmana, Matěrialy soveščanija po primeneněniju metodov těorii funkcij i funkcional'nogo analiza*

k zadačam matěmatičeskoj fiziki (*Alma-Ata 1976*). Akad. Nauk Novosibirsk, Novosibirsk, 1978, s. 132—140.

[84] *Estimates of analytic capacity.* Zapiski naučnych seminarov LOMI *81* (1978), 212—217.

[85] *Boundory behavior of potentials. Proceedings of the Conference „Equadiff 4". Lecture Notes in Mathematics,* vol. *703*, Springer-Verlag, 1979, s. 205—212.

[86] *Potential flows. Proceedings of the Conference „Equadiff 5". Teubner-Texte zur Mathematik,* vol. *47*, Teubner-Verlag, 1981, s. 198—204.

[87] *Prenĕbrežimyje značenija garmoničeskich funkcij. Proceedings „Primeněnije metodov těorii funkcij i funkcional'nogo analiza k zadačam matěmatičeskoj fiziki"*, Jerevan 1982, s. 168 až 173.

[88] *Some extension problems. Linear and Complex Analysis Problem Book. Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1043, *Springer-Verlag,* 1984, s. 639—640.

[89] *Jedna domněnka o subharmonických funkcích.* Časopis Pěst. Mat. *110* (1985), 415.

[90] *Double layer potentials on boundaries with corners and edges.* Comment. Math. Univ. Carolin. *27* (1986), 419, společně s *T. Angellem* a *R. E. Kleinmanem.*

[91] *Vzpomínka na profesora Marcela Brelota.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. *33* (1988), 170—173, společně s *J. Lukešem, I. Netukou, J. Veselým.*

[92] *O slaboj normal'noj proizvodnoj potenciala prostogo sloja s summirujemoj plotnostju. Proceedings „Funkcional'nyje i čislennyje metody matematičeskoj fiziki"*, Kijev 1988, s. 107—110.

[93] *Potential theory-Surveys and Problems. Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1344, Springer-Verlag, 1988, editor spolu s *J. Lukešem, I. Netukou, J. Veselým.*

[94] *Proceedings of the Conference on Potential Theory.* Plenum Publishing Company, New York, 1988, editor společně s *J. Lukešem, I. Netukou, J. Veselým.*

[95] *Contractivity of the operator of the arithmetical mean. Proceedings „Potential Theory-Surveys and Problems". Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1344, Springer-Verlag, 1988, s. 223—225, společně s *D. Medkovou.*

[96] *Boundary regularity and potential-theoretic operators. Proceedings „Potential Theory—Surveys and Problems". Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1344, Springer-Verlag, 1988, s. 220—222.

[97] *Fine maxima. Proceedings „Potential Theory—Surveys and Problems". Lecture Notes in Mathematics,* vol. 1344, 1988, s. 226—228, společně s *I. Netukou.*

[98] *Mezinárodní konference o teorii potenciálu.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. *33* (1988), 108—110, společně s *J. Lukešem, I. Netukou, J. Veselým.*

[99] *Hausdorffovy míry a odstranitelné singularity řešení parciálních diferenciálních rovnic.* Pokroky Mat. Fyz. Astronom. *35* (1990), 319—330.

[100] *Ustranimyje osobennosti i mery Chausdorffa. Proceedings „Primeněnije metodov teorii funkcij i funkcional'nogo analiza k zadačam matematičeskoj fiziki"*, v tisku.

[101] *K šedesátinám RNDr. Jaroslava Fuky, CSc.*. Časopis Pěst. Mat. *114* (1989), 315—317.

[102] *K sedmdesátinám profesora Jana Mařika.* Časopis Pěst. Mat. *115* (1990), 433—437, společně s *K. Kartákem, J. Matyskou.*