POZNÁMKA K JEDNOMU ČLÁNKU P. TURÁNA

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1. P. Turán v článku [1] dokazuje kombinatorickou identitu

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2, \tag{1}$$

kterou v roce 1867 bez důkazu uveřejnil čínsky matematik Le-Jen Shoo.

Jeho důkaz spočívá v tom, že dvojím zůsobem počítá hodnotu výrazu

$$A = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} (z^k(z+x)^{-k-1}) \right\}_{z=-1}.$$

Jedním způsobem získává vztah

$$A = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{2k} x^\nu \right\} \times \left\{ \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} (x-1)^{k-\nu} \right\}, \tag{2}$$

druhým způsobem dostává rovnici

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k}^2 x^n. \tag{3}$$

2. K úpravě výrazu (2) užívá vztahu

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} (x-1)^{k-\nu}, \tag{4}$$

který dokazuje na základě některých vlastností Legendreových polynomů.

Je-li

$$P_k(x) = \frac{1}{k!2^k} \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} (x^2-1)^k$$

k-tý Legendreův polynom, pak Hurwitzova formule dává

$$(1-x)^k P_k \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu. \tag{5}$$

Z diferenciální rovnice

$$(1 - x^2) P_k''(x) - 2x P_k'(x) + k(k+1) P_k(x) = 0$$

a z podmínek

$$P_k(1) = 1, \qquad P_k(-1) = (-1)^k$$

se dále dostane vztah

$$P_k(t) =$$

$$= \sum_{v=0}^{k} (-1)^{k-v} \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} \left(\frac{1+t}{2}\right)^v,$$

odkud pomocí substituce

$$t = \frac{1+x}{1-x}$$

vychází

$$(1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right) =$$

$$= \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} \binom{k+v}{k} (x-1)^{k-v}. \tag{6}$$

Porovnáním výsledků (5) a (6) vychází vztah (4).

Pomocí (4) nabývá výraz (2) tvaru

$$A = \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \binom{2k+v}{2k} x^v \right\} . \left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^j \right\}$$

a porovnáním koeficientů u x^n v rozvoji tohoto výrazu a výrazu (3) vychází identita (1).

3. Nyní ukáži, jak lze vztah (4) odvodit elementárním způsobem přímo.

Položíme-li v součtu na levé straně této rovnice $(x - 1) + 1$ za x a užijeme-li binomické věty, máme předně

$$\sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}^2 x^v = \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}^2 [(x-1)+1]^v =$$

$$= \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}^2 \sum_{l=0}^{v} \binom{v}{l} (x-1)^l.$$

Vyměníme-li pořadí sumací ve dvojnásobném součtu na pravé straně podle pravidla

$$\sum_{v=0}^{k} \sum_{l=0}^{v} \dots = \sum_{l=0}^{k} \sum_{v=l}^{k} \dots,$$

máme dále

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$

(7) $$= \sum_{l=0}^{k} (x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{\nu}{l}\binom{k}{\nu}.$$

Jde tedy jen o úpravu vnitřního součtu.

Avšak podle vzorce

$$\binom{m+p}{m}\binom{n}{m+p} =$$
$$= \frac{(m+p)!}{m!p!} \cdot \frac{n!}{(m+p)!(n-m-p)!} =$$
$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{p!(n-m-p)!} =$$
$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{p}$$

je

$$\binom{\nu}{l}\binom{k}{\nu} = \binom{k}{l}\binom{k-l}{\nu-l} =$$
$$= \binom{k}{l}\binom{k-l}{k-\nu},$$

takže pro vnitřní součet na pravé straně rovnice (7) vychází

$$\binom{k}{l} \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{k-l}{k-\nu}.$$

Je tedy

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$
$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{k-l}{k-\nu}$$

a položíme-li ještě $(k-l)$ za l na pravé straně, máme

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$

(8) $$= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(x-1)^{k-l} \sum_{\nu=k-l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu}.$$

K dokončení důkazu vypočítáme hodnotu vnitřního součtu na pravé straně. Předně je

$$\binom{l}{k-v} = 0$$

pro

$$v < k - l,$$

takže

$$\sum_{v=k-l}^{k} \binom{k}{v}\binom{l}{k-v} = \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}\binom{l}{k-v}.$$

Podle Cauchyova vzorce

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$$

máme konečně

$$\sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}\binom{l}{k-v} = \binom{k+l}{k}$$

a po dosazení tohoto výsledku do rovnice (8) vychází žádaný vztah

$$\sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}^2 x^v = \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v}\binom{k+v}{k}(x-1)^{k-v}.$$

LITERATÚRA

[1] Turán P., *A kínai matematika történetének egy problémájáról,* Matematikai Lapok V (1954), 1 6.

Došlo 17 1. 1962.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

REMARQUES À UN TRAVAIL DE M. P. TURÁN

Josef Kaucký

Résumé

L'article précédent contient une démonstration élémentaire de la rélation

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} (x-1)^{k-\nu}.$$

En effet, en substituant $(x - 1) + 1$ au lieu de x dans la somme à gauche et en tenant compte du théorème des binômes, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 [(x-1)+1]^\nu = \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} (x-1)^l = \\
&= \sum_{l=0}^{k} (x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{\nu}{l} \binom{k}{\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k-l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (x-1)^{k-l} \sum_{\nu=k-l}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (x-1)^{k-l} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \binom{k+l}{k} (x-1)^{k-l}.
\end{aligned}$$

P. Turán a démontré cette rélation a l'aide des quelques propriétés des polynômes de Legendre dans son travail [1].