

Ján Fischer

Comptonov jav v M -hladine vodíkového atómu

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 6 (1956), No. 3, 176--192

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/126363>

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

COMPTONOV JAV V *M*-HLADINE VODÍKOVÉHO ATÓMU

JÁN FISCHER, JÁN WEISS

Katedra fyziky Prírodovedeckej fakulty UK v Bratislave

Podrobné teórie tzv. neperiodických atomárných dejov, ku ktorým okrem Comptonovho javu patrí napr. fotoefekt a zrazy, vznikli až po objavení kvantovej mechaniky. Prvé hrubé výsledky v teórii Comptonovho javu na voľnom elektróne dosiahli sa, pravda, už metódami klasickej fyziky na podklade foto-
novej teórie žiarenia.

Kvantovo-mechanická teória Comptonovho javu na *viazanom* elektróne (vo vodíkovom atóme), najmä odvodenie rozdeľovacej funkcie pre smerové rozdelenie Comptonových (odrazových) elektrónov, pochádza od G. Wentzla [1] a opiera sa o Diracovu kvantovo-mechanickú teóriu žiarenia.

V ďalšom nadviažeme na práce G. Wentzla, resp. jedného z autorov [2].

§ 1. Podľa Diraca [3] uzatvárame elektromagnetické pole našej rôntgenovej vlny do veľkej kocky objemu $V = l^3$. Potom budú zložky vlnového vektora stojatých vln $\vec{k}_s \left(|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$ „kvantované“, t. j. budú tvoriť postupnosť diskretných hodnôt:

$$k_{sx} = \frac{2\pi}{l} s_1; \quad k_{sy} = \frac{2\pi}{l} s_2; \quad k_{sz} = \frac{2\pi}{l} s_3 \quad (s_1, s_2, s_3 = 1, 2, 3, \dots)$$

Trojica hodnôt s_1, s_2, s_3 však ešte neurčuje polarizáciu vlny. Preto patria ku každej trojici čísel s_1, s_2, s_3 dve na seba kolmé, ale ináč nezávislé zložky elektromagnetických kmitov.

Na základe formálnej analógie výrazov pre energiu žiarivého pola a systému harmonických oscilátorov možno podľa Diraca elektromagnetické pole nahradiť sústavou harmonických (nesprialnutých) oscilátorov, vymieňajúcich si energiu s korpuskulárnou sústavou atómu. Počet oscilátorov je daný počtom stojatých vln dutinového žiarenia. Ich (kruhovú) frekvencia je $\omega_s = c|\vec{k}_s|$ a energia $\varepsilon_s = N_s \cdot \hbar\omega_s$. $N_s = 0, 1, 2, \dots$ sú kvantové čísla pola. Úhrnná energia pola je $\sum_s N_s \cdot \hbar\omega_s$. Pre oscilátory platí známe výberové pravidlo: $\Delta N_s = 0$ alebo ± 1 a $\Delta N_s = 0$ pre všetky $s \neq r$.

§ 2. V práci použijeme tieto symboly (sú usporiadané v abecednom poriadku):

- a_{nl}, a_{zl} v čase pomaly premenné pravdepodobnostné amplitúdy diskrétného stavu, resp. stavu so spojitou (kladnou) energiou elektrónu
- $\chi = \frac{mc^2}{\hbar^2}$ prevrátená hodnota Bohrovho prvého vodíkového polomeru
- c rýchlosť svetla
- e náboj elektrónu
- $\vec{e}_{r_1}, \vec{e}_{r_2}$ jednotkový vektor vo smere elektrického vektora primárnej, resp. rozptýlenej vlny
- $\varepsilon_{nl_1 z l_2}$ element poruchovej matice [bez konšt. faktora, definovaný rov. (5. 4)]
- $\psi(N_1, N_2, \dots)$ vlnová funkcia systému „oscilátorov“ reprezentujúcich elektromagnetické pole
- $g = \frac{N_1 \hbar \omega_1}{V}$ hustota energie primárnej vlny
- $\Gamma(1 + \frac{1}{2} \mu_0 + 2in)$ gama funkcia komplexnej premennej
- \hat{H}^i operátor interakčnej energie poľa a elektrónu
- $\vec{k}_{r_1}, \vec{k}_{r_2}$ vlnový vektor primárnej a rozptýlenej vlny $\vec{Ak} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$
- z spojitý parameter energie $W_z = \frac{\hbar^2 z^2}{2m}$
- $z_0 = \frac{Zx}{2n_0}$ (z práce [2])
- m hmota elektrónu
- m spojitý kvantový parameter v parabolických súradniciach
- μ_0 magnetické kvantové číslo elektrónu
- $n = \frac{Zx}{2z}$ (z práce [2])
- $n_n = n_1 + n_2 + \mu_0 + 1$ hlavné kvantové číslo
- n_1, n_2 parabolické kvantové čísla
- N_s kvantové číslo elektromagnetického poľa
- $N_{n_1 n_2 n_0}$ normovacia konštanta vlnovej funkcie diskrétného stavu vodíkového atómu v parabolických súradniciach

$$N_{n_1 n_2 \mu_0} = \left(\frac{2(Z\alpha)^{2|\mu_0|+3}}{\pi n_0^{2|\mu_0|+4}} \cdot \frac{n_1! n_2!}{[(|\mu_1| + n_1)! (|\mu_0| + n_2)!]^3} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pre } \mu_0 \neq 0$$

$$N_{n_1 n_2 0} = \frac{(Z\alpha)^3}{\pi^{\frac{1}{2}} n_0^2 n_1! n_2!} \text{ pre } \mu_0 = 0$$

N úhrnná pravdepodobnosť Comptonovho javu (5,1),
(5,2)

$\omega_{r_1}, \omega_{r_2}$ kruhová frekvencia primárnej a rozptýlenej röntgenovej vlny

$$\Delta\omega = \frac{1}{\hbar} (W_z - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$$

$$p = \frac{|\vec{\Delta k}|}{4\pi z_0} \text{ (z práce [2]; tam označené } \omega)$$

$\Psi_{nl} = u_{nl} e^{\frac{i}{\hbar} W_n t}$ charakteristická funkcia vodíkového atómu v diskretnom stacionárnom stave

$\Psi_{z'l} = u_{z'l} e^{\frac{i}{\hbar} W_{z'} t}$ charakteristická funkcia vodíkového atómu v stave so spojitou (kladnou) energiou elektrónu

$\Psi_{n_1 n_2 \mu_0}$ vlnová funkcia Comptonovho elektrónu v parabolických súradniciach

\vec{r} polohový vektor elektrónu

r, ϑ, φ sférické súradnice s polárnou osou vo smere vektora

$$\vec{\Delta k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$$

q pomocná veličina bez fyzikálneho významu; jej hodnota je $q = \frac{1}{2}$

s, t pomocné veličiny pre definíciu Laguerrových polynómov:

$$L_{\mu_0+n_1}^{\mu_0}(\xi) = (-1)^{\mu_0} \cdot \left[\frac{\partial^{\mu_0+n_1}}{\partial t^{\mu_0+n_1}} \left(\frac{t^{\mu_0} e^{-\frac{\xi t}{1-t}}}{(1-t)^{\mu_0+1}} \right) \right]_{t=0}$$

a analogický výraz so „s“ pre $L_{\mu_0+n_2}^{\mu_0}(\eta)$

t čas (sec)

$U_{n_1 l_1, \lambda l_2}$ element poruchovej matice (4,5)

\vec{v} rýchlosť Comptonovho elektrónu

$V = V^3$ objem ohraničeného elektromagnetického poľa röntgenovej vlny

$$W_{n_1} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{Z\alpha}{3} \right)^2 \text{ energia elektrónu v } M\text{-hladine}$$

$W_z = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$ energia elektrónu v spojitom spektre

$$\kappa_1 = -\frac{2\kappa_0}{\kappa} \left[p + i \left(q + \frac{t}{1-t} \right) \right] \quad (\text{z práce [2]})$$

$$\kappa_2 = -\frac{2\kappa_0}{\kappa} \left[-p + i \left(q + \frac{s}{1-s} \right) \right] \quad (\text{z práce [2]})$$

ξ, η, φ parabolické súradnice

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta); \quad y = |\bar{\xi}\eta| \cos \varphi; \quad z = |\bar{\xi}\eta| \sin \varphi.$$

§ 3. Budeme skúmať sústavu pozostávajúcu z popísaného elektromagnetického poľa a jedného atómu s jedným elektrónom v rôznych stavoch M -hladiny. Budeme ďalej predpokladať:

a) že energia na atóm dopadajúceho fotónu $\hbar\omega$ je malá oproti relativistickej energii elektrónu:

$$\hbar\omega \ll mc^2, \quad (mc^2 = 0,51 \text{ MeV}).$$

t. j. vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia je veľká oproti Comptonovej vlnovej dĺžke $\lambda = \frac{h}{mc} = 0,024 \text{ \AA}$:

b) kinetická energia Comptonových (odrazových) elektrónov je veľká oproti ich väzbovej energii v atóme

$$\left(W = \frac{Rhc}{9} = 1,5 \text{ eV, resp. } \frac{Rhc}{9} Z^2 = 1,5 Z^2 \text{ eV} \right).$$

Energia našej zloženej sústavy skladá sa z energie atomárneho elektrónu nerušeného elektromagnetickým poľom H^a , z energie elektromagnetického poľa H^p a z interakčnej energie poľa s atómom H^i :

$$H = H^a + H^p + H^i.$$

Interakčnú energiu H^i považujeme za poruchu.

Charakteristickú funkciu nerušenej zloženej sústavy píšeme ako súčin charakteristickej funkcie sústavy oscilátorov reprezentujúcich elektromagnetické pole a charakteristickej funkcie vodíkového atómu

$$\Psi_{nl} = u_{nl} e^{\frac{i}{\hbar} W_n t} \quad \text{pre diskkrétne stavy elektrónu,} \quad (3,1)$$

$$\Psi_{\kappa l} = u_{\kappa l} e^{\frac{i}{\hbar} W_{\kappa} t} \quad \text{pre spojité spektrum.}$$

Pritom spojitý parameter energie κ súvisí s energiou elektrónu podľa vzťahu

$$\kappa^2 = \frac{2mW_{\kappa}}{\hbar^2}. \quad (3,2)$$

Charakteristické funkcie vodíkového atómu Ψ_{nl} , $\Psi_{z'l}$ splňujú Schrödingerovu rovnicu v tomto tvare:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}^a \Psi. \quad (3.3)$$

Charakteristickú funkciu systému oscilátorov označíme $\Phi(N_1, N_2, \dots)$.

Vlnovú funkciu atomárneho elektrónu v elektromagnetickom poli röntgenovej vlny (rušená sústava) Ψ hľadáme podľa Diraca v podobe rozvoja podľa charakteristických funkcií sústavy nerušenej

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_k \sum_l \sum_{N_1, N_2, \dots} a_{nl}(N_1, N_2, \dots) u_{nl} \Phi(N_1, N_2, \dots) e^{i \left(\frac{W_n}{\hbar} + \sum_s N_s \omega_s \right) t} \\ & + \int dz \sum_l \sum_{N_1, N_2, \dots} a_{z'l}(N_1, N_2, \dots) u_{z'l} \Phi(N_1, N_2, \dots) e^{i \left(\frac{W_z}{\hbar} + \sum_s N_s \omega_s \right) t}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podľa Diracovej poruchovej teórie dostaneme pre rozvojové koeficienty a_{nl} , resp. $a_{z'l}$ (v čase pomaly sa meniace pravdepodobnostné amplitúdy) známym spôsobom diferenciálne rovnice

$$\begin{aligned} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{n(z)l}(N_1, N_2, \dots) \\ & = \sum_{n'} \sum_{l'} \sum_{N'_1, N'_2, \dots} a_{n'l'}(N'_1, N'_2, \dots) U_{n'l', n(z)l}(N_1, N_2, \dots; N'_1, N'_2, \dots) \\ & \quad e^{i \left[\frac{W_{n'} - W_{n(z)}}{\hbar} + \sum_s (N'_s - N_s) \omega_s \right] t} \\ & + \int dz' \sum_{l'} \sum_{N'_1, N'_2, \dots} a_{z'l'}(N'_1, N'_2, \dots) U_{z'l', n(z)l}(N_1, N_2, \dots; N'_1, N'_2, \dots) \\ & \quad e^{i \left[\frac{W_{z'} - W_{n(z)}}{\hbar} + \sum_s (N'_s - N_s) \omega_s \right] t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$U_{n(z)l', n(z)l}$ je element poruchovej matice.

Príslušný operátor energie vzájomného pôsobenia elektromagnetického poľa a atomárneho elektrónu \hat{H}^a („porucha“) má tvar [4] (§ 27)

$$\hat{H}^a = -\frac{e}{mc} (\hat{A} \hat{p}) + \frac{i\hbar e}{2mc} \hat{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}. \quad (3.6)$$

kde \vec{A} je vektorpotenciál elektromagnetického poľa vlny,

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}.$$

(\vec{E} , \vec{H} je vektor intenzity elektrického, resp. magnetického poľa).

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

(\vec{p} je kinetický impulz a \vec{r} je tu polohový vektor elektrónu).

Pretože pre každé \vec{A} platí

$$\text{rot } \vec{A} = \text{rot } (\vec{A} + \text{grad } F),$$

možno voliť funkciu F , resp. \vec{A} tak, aby $\text{div } \vec{A} = 0$. Potom sa \hat{H}^i redukuje na dva členy

$$\hat{H}^i = -\frac{e}{mc} (\vec{A} \hat{p}) + \frac{e^2}{m^2 c^2} \hat{A}^2. \quad (3.7)$$

§ 4. Podľa výberového pravidla pre harmonický oscilátor ide pri elementárnom Comptonovom jave o nasledujúcu zmenu celkovej sústavy:

Jeden fotón r_1 -ho oscilátora zanikne: $N'_{r_1} = N_{r_1} - 1$;

jeden fotón r_2 -ho oscilátora vznikne: $N'_{r_2} = N_{r_2} + 1$

a všetky ostatné $N_s \neq N_{r_1}, N_{r_2}$ sa nemenia: $N'_s = N_s$ (pre $s \neq r_1, r_2$), pričom $\omega_{r_1} > \omega_{r_2}$. Súčasne atomárny elektrón prejde z diskrétného atomárneho stavu s energiou W_n do stavu so spojitým spektrom energie W_z , čo je spojené s emisiou elektrónov z atómu.

Počítateľný stav sústavy je daný týmito hodnotami amplitúd a :

$$a_{n_1}(0, 0, \dots, 0, N_{r_1}, 0) = 1. \quad (4.1)$$

Všetky ostatné pravdepodobnostné amplitúdy $a = 0$.

Pravdepodobnosť, že po uplynutí t sekúnd od okamžiku „zapojenia“ poruchy \hat{H}^i sústava sa bude nachádzať v opísanom stave, t. j., že nastane elementárny Comptonov jav, je daná štvorcem absolútnej hodnoty amplitúdy

$$a_{z/2}(0, 0, \dots, 1, \dots, N_{r_1} - 1, 0, \dots). \quad (4.2)$$

Túto pravdepodobnosť vypočítame v prvom priblížení podľa Diraca z rovnice (3.5), keď v nej na pravej strane podľa (4.1) za $a_{n_1}(0, 0, \dots, N_{r_1}, \dots)$ budeme písať 1 a za všetky ostatné amplitúdy $a = 0$, t. j. hodnoty *nultého priblíženia*. Analogicky treba pokračovať pri vypočítavaní vyšších aproximácií.

Dostaneme tak

$$a_{z/2} = U_{n_1/1, z/2} \frac{e^{i A \omega t} - 1}{W_z - W_{n_1} - \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})}, \quad (4.3)$$

kde

$$A \omega = \frac{1}{\hbar} (W_z - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}). \quad (4.4)$$

Maticový element poruchovej energie $U_{n_1/1, z/2}(N_1, N_2, \dots; N'_1, N'_2, \dots)$ má podľa Diraca [3]¹ tento tvar:

¹ [3] Rovnice (17.8), resp. (17.12). – Opačné znamienko v exponente e -funkcie vy-

$$U_{n_1 l_1, z l_2}(N_1, N_2, \dots; N'_1, N'_2, \dots) = \\ = \frac{2\pi e^2}{m} (\vec{e}_1 \vec{e}_2) \left(\frac{\hbar N_{r_1}}{V \omega_{r_1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\hbar(N_{r_2} + 1)}{V \omega_{r_2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int u_{z l_2}^* e^{i(\vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}) \cdot \vec{r}} u_{n_1 l_1} d\tau. \quad (4.5)$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 sú jednotkové vektory vo smere elektrického vektora pôvodnej a rozptýlenej röntgenovej vlny; $N_{r_s} = 1$. Maticový element $U_{n_1 l_1, z l_2}$ pochádza od druhej časti poruchovej energie (3,7), od člena $\frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2$. Prvý člen interakčnej energie $-\frac{e}{mc} \hat{A} \cdot \hat{p}$ nedáva, ako vieme, pri výpočte maticového elementu $U_{n_1 l_1, z l_2}$ v prvom priblížení príspevok. Menovateľ $W_z - W_{n_1} = \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$ v „rezonancii“ vyjadruje zachovanie energie pri Comptonovom jave. V tomto prípade preberá odrazový elektrón celý rozdiel energií fotónov $W_z - W_{n_1} = \hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$.

§ 5. Úhrnná pravdepodobnosť Comptonovho javu, t. j. počet za čas t z vodíkového atómu v stave W_{n_1} emitovaných odrazových elektrónov, je daná výrazom

$$N = \sum_{l_2} \int d^3x |a_{z l_2}|^2. \quad (5.1)$$

Keď sa zaujímate aj o smerové rozdelenie týchto elektrónov, vyjadríme tento počet s Wentzлом [1]² v tvare

$$N = \int d\tau \left| \sum_{l_2} \int d^3x a_{z l_2} u_{z l_2} \right|^2, \quad (5.2)$$

kde za $a_{z l_2}$ dosadíme podľa rov. (4,3), (4,4) a (4,5) a $u_{z l_2}$ je charakteristická funkcia spojitého spektra atómu vodíka. V prvom rade pôjde o výpočet výrazu

$$\sum_{l_2} \varepsilon_{n_1 l_1, z l_2}(\vec{A} \vec{k}) u_{z l_2}, \quad (5.3)$$

kde $\vec{A} \vec{k} = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$ a

$$\varepsilon_{n_1 l_1, z l_2} = \int d\tau e^{i(\vec{r} \cdot \vec{A} \vec{k})} u_{n_1 l_1} u_{z l_2}^*. \quad (5.4)$$

Keď problém napíšeme v polárnych súradniciach a polárnu os položíme do smeru vektora $\vec{A} \vec{k}$, potom integrand v (5,4) bude závisieť od súradnice θ aj exponenciálne, práve prostredníctvom retardačného faktora $e^{i(\vec{r} \cdot \vec{A} \vec{k})}$. Preto pre kvantové číslo l_2 nedostaneme výberové pravidlo a súčet podľa l_2 bude nekonečný a spravidla ťažko spočítateľný. Túto ťažkosť možno podľa Wentzla [1]³

plyvať z toho, že kvôli zhode s inou prácou jedného z autorov použili sme Schrödingerovu rovnicu v tvare $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$, t. j. v tvare $-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$, namiesto $+i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$.

² [1], § 7, str. 352.

³ [1], § 11.

obísť tak, že sa problém rieši v parabolických súradniciach ξ, η, φ , ktoré definujeme:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi, \quad z = (\xi\eta)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

$$r = \frac{1}{2}(\xi + \eta); \quad d\tau = \frac{1}{4}(\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi.$$

Použitie parabolických súradníc má tú výhodu, že stavy elektrónu v spojitom spektre nie sú určené spojitým parametrom energie z a diskretným kvantovým číslom l_2 , ale dvoma spojilými parametrami z, m .⁴ (Magnetické kvantové číslo μ_0 je v oboch prípadoch totožné.) Následkom toho nekonečný súčet podľa kvantového čísla l_2 (5,3) prejde v nekonečný integrál podľa spojitého parametra m , ktorý možno jednoduchšie vyčísliť.

§ 6. Obrátme sa teraz k vlastnému výpočtu vlnových funkcií z rôznych elektrónových stavov M -hladiny emitovaných Comptonových elektrónov a z týchto funkcií odvodíme rozdeľovaciu funkciu odrazových elektrónov podľa rôznych smerov emisie z atómu.

Pre náš výpočet použijeme všeobecné vzorce, odvodené jedným z autorov v inej práci. Vlnová funkcia Ψ Comptonovho elektrónu, emitovaného zo stavu n_1, n_2, μ_0 vo veľkej vzdialenosti od atómu, má tvar [2]⁵ (n_1, n_2 , parabolické kvantové čísla diskretného stavu; μ_0 magnetické kvantové číslo; $n_1 + n_2 + \mu_0 + 1 = n_0$ hlavné kvantové číslo)

$$\Psi = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-|\mu_0|)} \cdot N_{n_1 n_2 \mu_0} \cdot \Gamma(1 + |\mu_0| + 2in) e^{\pi n} e^{-izr} (|\mu_0| + n_1)! (|\mu_0| + n_2)! \sin |\mu_0| \vartheta \frac{\cos \mu_0 \varphi}{\sin \mu_0 \varphi}}{8\pi z_0 r^{1+2in}}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho} \sum_{\gamma=0}^{n_1} \sum_{\delta=0}^{n_2} \frac{1}{\gamma! \delta!} \binom{|\mu_0| + n_1 - \gamma}{|\mu_0|} \binom{|\mu_0| + n_2 - \delta}{|\mu_0|} \right\}$$

$$\frac{\left| \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right|^{2in}}{\left| \left(z(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 - \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + z(1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right|^{1+\mu_0+2in}} \right|_{\varrho=\frac{1}{2}}^{\varrho=1}}$$

(6,1)

Pritom píšeme $\cos \mu_0 \varphi$ pre $\mu_0 \geq 0$ a $\sin \mu_0 \varphi$ pre $\mu_0 < 0$. $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ sú normovacie konštanty počiatočného stavu, $\Gamma(1 + |\mu_0| + 2in)$ je gama funkcia komplexného argumentu.

⁴ Parameter „ m “ v ďalších výrazoch nevystupuje spoločne s hmotou elektrónu, ktorú sme označili rovnakým písmenom.

⁵ [2], str. 503, rov. (21).

V zmysle zjednodušujúcich predpokladov, vyslovených v § 3, vzorec (6.1) čiastočne zjednodušíme. Číslo n vo vzorci znamená podiel $n = \frac{Z\alpha}{2z}$, kde $\frac{\hbar^2}{2m}(Z\alpha)^2$ je väzbová energia elektrónu v K -hladine a $\frac{\hbar^2}{2m}z^2$ je kinetická energia Comptonových elektrónov. Podľa predpokladu je $\frac{Z\alpha}{2z} = n \ll 1$. Zanedbáme $2in$ popri 1. Ako na analogickom výraze ukázal Wentzel [1]⁶ možno výrazy $\left[\left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) \right]^{2in}$ v (6.1) pred vykonaním naznačených diferenciácií pre $n \ll 1$ položiť rovné 1. Zlomok vo veľkej zátvorke výrazu (6.1) sa potom zjednoduší na

$$\frac{1}{\left[z(1 + \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 + \frac{1}{2} \right) + z(1 - \cos \vartheta) \left(z_1 + \frac{1}{2} \right) \left(z_2 - \frac{1}{2} \right) \right]^{1+\mu_0}}.$$

Pretože neberieme zreteľ na spin elektrónu, máme v M -hladine vodíkového atómu deväť počiatočných stavov. Budeme mať nasledujúce kombinácie parabolických kvantových čísel n_1, n_2, μ_0 počiatočného stavu, pričom pre M -hladinu bude $n_1 + n_2 + \mu_0 = 1 - n_0 = 3$: 200, 020, 110, 101⁺, 101⁻, 011⁺, 011⁻, 002⁺, 002⁻.

V súlade s tým dostaneme pre Comptonov elektrón deväť vlnových funkcií, ktoré označíme $\Psi_{200}, \Psi_{020}, \Psi_{110}, \Psi_{101}, \Psi'_{101}, \Psi_{011}, \Psi'_{011}, \Psi_{002}, \Psi'_{002}$. Vo vzorci (6.1) vykonáme naznačené diferenciácie podľa q, t a s , pričom podľa § 2 platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\frac{2iz_0}{z} \cdot (1-t)^2 \frac{\partial}{\partial z_1}; & \frac{\partial}{\partial s} &= -\frac{2iz_0}{z} \cdot (1-s)^2 \frac{\partial}{\partial z_2}; \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} &= -\frac{2iz_0}{z} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Keď potom za čísla z_1 a z_2 a $N_{n_1 n_2 \mu_0}$ dosadíme podľa § 2 príslušné hodnoty, dostaneme pre funkcie $\Psi_{n_1 n_2 \mu_0}$:

$$\begin{aligned} \Psi_{200} &= \frac{2i(Z\alpha)^2 z^5}{9\pi^3 \left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{9} + 2z|\vec{A}k| \cos \vartheta \right)^4} \cdot e^{i\vec{z}r} \cdot \\ &\cdot \left\{ z^4 + |\vec{A}k|^4 + 2z^2 |\vec{A}k|^2 - \frac{2Z^2 \alpha^2}{9} \left(z^2 + 3|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2 \alpha^2}{18} \right) + 4z|\vec{A}k| \left(z^2 + \right. \right. \\ &+ |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2 \alpha^2}{3} \left. \right) \cos \vartheta + 4z^2 \left(|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2 \alpha^2}{9} \right) \cos^2 \vartheta - 4i \frac{Z\alpha}{3} \left[|\vec{A}k| \left(z^2 + \right. \right. \\ &+ |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2 \alpha^2}{9} \left. \right) + z \left(z^2 + 3|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2 \alpha^2}{9} \right) \cos \vartheta + 2z^2 |\vec{A}k| \cos^2 \vartheta \left. \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

⁶ [1] — Pozri poznámku pod čiarou na str. 362 citovanej práce.

$$\Psi_{020} = \frac{2i(Zx)^{\frac{5}{2}}x}{9\pi^{\frac{3}{2}}\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^4 + |\vec{A}k|^4 + 2x^2|\vec{A}k|^2 - 2\frac{Z^2x^2}{9}\left(x^2 - 3|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{18}\right) + \right.$$

$$\left. + 4x|\vec{A}k|\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{3}\right)\cos\vartheta + 4x^2\left(|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9}\right)\cos^2\vartheta + \right.$$

$$\left. + 4i\frac{Zx}{3}\left[|\vec{A}k|\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9}\right) + x\left(x^2 + 3|\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9}\right)\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + 2x^2|\vec{A}k|\cos^2\vartheta \right\};$$

$$\Psi_{110} = \frac{2i(Zx)^{\frac{5}{2}}x}{9\pi^{\frac{3}{2}}\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^4 + |\vec{A}k|^4 + 2x^2|\vec{A}k|^2 + 2\frac{Z^2x^2}{9}\left(-3x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{18}\right) + 4x|\vec{A}k|\left(x^2 + \right.$$

$$\left. + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9}\right)\cos\vartheta + 4x^2\left(|\vec{A}k|^2 + 2\frac{Z^2x^2}{9}\right)\cos^2\vartheta \right\};$$

$$\Psi_{101} = \frac{8(Zx)^{\frac{7}{2}}x^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta - 2i\frac{Zx}{3}\left(|\vec{A}k| + x\cos\vartheta\right) \right\};$$

$$\Psi'_{101} = \frac{8(Zx)^{\frac{7}{2}}x^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta - 2i\frac{Zx}{3}\left(|\vec{A}k| + x\cos\vartheta\right) \right\};$$

$$\Psi_{011} = \frac{8(Zx)^{\frac{7}{2}}x^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta + 2i\frac{Zx}{3}\left(|\vec{A}k| + x\cos\vartheta\right) \right\};$$

$$\Psi'_{011} = \frac{8(Zx)^{\frac{7}{2}}x^2}{27\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{\left(x^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta\right)^4} \frac{e^{-ixr}}{r} \cdot$$

$$\cdot \left\{ x^2 + |\vec{A}k|^2 - \frac{Z^2x^2}{9} + 2x|\vec{A}k|\cos\vartheta + 2i\frac{Zx}{3}\left(|\vec{A}k| + x\cos\vartheta\right) \right\};$$

$$\Psi_{002} = \frac{8i \sqrt{2} (Z\alpha)^{\frac{9}{2}} \kappa^3}{81\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin^2 \vartheta \cos 2\varphi}{\left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2z|\vec{A}k| \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-izr}}{r},$$

$$\Psi'_{002} = \frac{8i \sqrt{2} (Z\alpha)^{\frac{9}{2}} \kappa^3}{81\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin^2 \vartheta \sin 2\varphi}{\left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2z|\vec{A}k| \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{-izr}}{r}. \quad (6,3)$$

§ 7. Aby sme vypočítali funkciu smerového rozdelenia Comptonových elektrónov z M -hladiny vodíka podobného atómu, vytvoríme súčet súčinov všetkých vlnových funkcií $\Psi_{n_1 n_2 n_0}$ so svojimi komplexne združenými hodnotami

$$J(\vartheta, \varphi) = \Psi_{200} \Psi_{200}^* + \Psi_{020} \Psi_{020} + \Psi_{110} \Psi_{110}^* + \Psi_{101} \Psi_{101}^* + \dots$$

$$+ \Psi'_{101} \Psi_{101}^* + \Psi_{011} \Psi_{011}^* + \Psi'_{011} + \Psi'_{011}^* + \Psi_{002} \Psi_{002}^* + \Psi'_{002} \Psi_{002}^*. \quad (7,1)$$

$$J(\vartheta, \varphi) = \frac{4z^2 (Z\alpha)^5}{27\pi^3} \frac{1}{\left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2\alpha^2}{9} + 2z|\vec{A}k| \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{r^2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (z^2 + |\vec{A}k|^2)^4 + \frac{4}{9} Z^2 \alpha^2 (z^2 + |\vec{A}k|^2)^3 + \frac{2}{27} Z^4 \alpha^4 (z^2 + |\vec{A}k|^2)^2 + \dots \right.$$

$$+ \frac{4}{729} Z^6 \alpha^6 \left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{36} \right) + 8z |\vec{A}k| \left[(z^2 + |\vec{A}k|^2)^3 + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{Z^2 \alpha^2}{3} (z^2 + |\vec{A}k|^2)^2 + \frac{Z^4 \alpha^4}{243} \left(z^2 + 9|\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{3} \right) \right] \cos \vartheta + \dots$$

$$+ 24z^2 |\vec{A}k|^2 \left[(z^2 + |\vec{A}k|^2)^2 + \frac{2}{9} Z^2 \alpha^2 \left(z^2 + |\vec{A}k|^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{18} \right) \right] \cos^2 \vartheta + \dots$$

$$+ 32z^3 |\vec{A}k| \left[|\vec{A}k|^2 (z^2 + |\vec{A}k|^2) + \frac{Z^2 \alpha^2}{27} \left(3|\vec{A}k|^2 + \frac{2}{9} Z^2 \alpha^2 \right) \right] \cos^3 \vartheta + \dots$$

$$\left. + 16z^4 |\vec{A}k|^4 \cos^4 \vartheta \right\}. \quad (7,2)$$

§ 8. Zjednodušenia, ktoré vyplývajú z predpokladu, vysloveného v § 3:

$$\frac{Z^2 \alpha^2}{9} \ll z^2 \text{ a } \hbar \omega \ll mc^2$$

sme ešte dôsledne nevykonali. Vo výsledku (7,2) vystupujú veličiny z^2 a $\left(\frac{Z\alpha}{3}\right)^2$,

resp. ich mocniny vedľa seba. Okrem toho v pomere veličín $|\vec{A}k|^2$ a z^2 a ich mocnín skrývajú sa ešte relativistické členy. Vykonáme preto nasledujúcu úpravu:

Podľa definície je $\hbar z$ hybnosťou odrazového elektrónu a $\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$ je jeho energiou W_z [pričom sme kládli väzbovú energiu $\left(\frac{Z\alpha}{3}\right)^2 \ll z^2$].

$$\hbar\kappa = mv \quad (8,1)$$

$$\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8,2)$$

$$\frac{|\vec{A}k|}{\kappa} = \frac{\frac{\omega_{r_1} - \omega_{r_2}}{c}}{\kappa} = \frac{\frac{1}{2} \frac{mv^2}{c}}{mv} = \frac{1}{2} \frac{v}{c}. \quad (8,3)$$

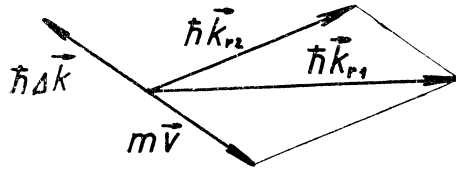
Ďalej

$$\frac{|\vec{A}k|^2}{\kappa^2} = \frac{\frac{(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})^2}{c^2}}{\frac{2mW_\kappa}{\hbar^2}} = \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})^2}{2m\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})} = \frac{\hbar(\omega_{r_1} - \omega_{r_2})}{2mc^2} \ll 1. \quad (8,4)$$

Pretože sme nepočítali relativisticky, musíme druhú a vyššie mocniny podielu $\frac{|\vec{A}k|}{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{v}{c}$ popri prvej mocnине, resp. 1 zanedbať. Tým sa zložitý výraz (7.2) veľmi podstatne zjednoduší a hľadaná funkcia smerového rozdelenia Comptonových elektrónov $J(\vartheta, \varphi)$ bude

$$J(\vartheta, \varphi) = \frac{4(Z\kappa)^5}{27\pi^3\kappa^6} \cdot \frac{1 + 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^8} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (8,5)$$

Vo vzoreci (8,5) ϑ je uhol medzi vektorom $\vec{A}k = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$ a polohovým vektorom odrazového elektrónu (v súradnej sústave s počiatkom v strede



Obr. 1.

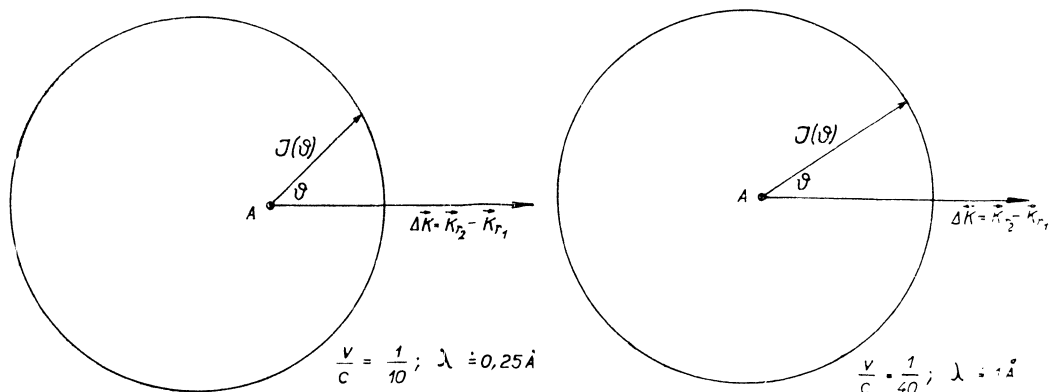
atómu). t. j. uhol, ktorý zvierá smer letu odrazového elektrónu so smerom vektora $\vec{A}k$. Ako zo vzorca (8,5) vidieť, maximálna emisia Comptonových elektrónov je vo smere $\vartheta = \pi$ a rozdeľovacia funkcia $J(\vartheta, \varphi)$ je osovo symetrická podľa smeru vektora $\vec{A}k = \vec{k}_{r_2} - \vec{k}_{r_1}$. Obr. 1 znázorňuje vektorový diagram hybností primárneho \vec{k}_{r_1} a rozptýleného \vec{k}_{r_2} fotónu a hybnosti odrazového elektrónu $m\vec{v}$. Z neho vidíme, že maximálna emisia pripadá do smeru, v ktorom vyletí podľa klasickej teórie voľný elektrón pri Comptonovom jave.

Smerové rozdelenie z M -hladiny emitovaných Comptonových elektrónov sa len málo líši od smerového rozdelenia elektrónov z K - a L -hladiny, čo

obzvlášť jasne vynikne, keď vo vzorci (8.5) $\frac{1 + 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^8}$ rozvineme podľa

mocnín $\frac{v}{c}$ a relativistické členy, t. j. členy kvadratické a vyššie v rozvoji zanedbáme:

$$J(\vartheta, \varphi)_M \sim \left(1 + 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta\right) \left(1 - 8 \frac{v}{c} \cos \vartheta + \dots\right) = 1 - 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta + \dots$$



Obr. 2a, b.

Keď si v rovnakom priblížení napíšeme podobné rozdeľovacie funkcie pre Comptonove elektróny emitované z K - a L -hladiny podľa prác G. Wentzla [1] a jedného z autorov [2] a rozvineme podľa mocnín $\frac{v}{c}$ a relativistické členy zanedbáme, dostaneme tak:

$$J(\vartheta, \varphi)_K \sim \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^4} = 1 - 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta + \dots$$

$$J(\vartheta, \varphi)_L \sim \frac{1 + 2 \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^6} = 1 - 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta + \dots$$

Maximálna emisia vo smere $\vartheta = \pi$ bude tým výraznejšia, čím bude pomer $\frac{v}{c}$ väčší. Obr. 2 znázorňuje polárny diagram závislosti J od ϑ pre dve hodnoty pomeru $\frac{v}{c}$ a ľubovoľnú hladinu.

Integráciu podľa r a z' vykonáme podľa Fourierovej teóremy

$$\int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dz' \frac{e^{-it\Delta\omega'} - 1}{\hbar\Delta\omega'} A_{z'}^*(\vartheta, \varphi) e^{ir(z'-z)} = \pi \frac{e^{-it\Delta\omega} - 1}{\hbar\Delta\omega} A_z^*(\vartheta, \varphi). \quad (9.6)$$

Tento výsledok dosadíme do (9.5) a vykonáme integráciu podľa z

$$N = \frac{C\pi}{\hbar^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{t}{2} \left[\frac{1}{\hbar} (W_z - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) \right]}{4 \left[\frac{1}{\hbar} (W_z - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) \right]^2} |A_z(\vartheta, \varphi)|^2 dz. \quad (9.7)$$

Zavedieme substitúciu

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\hbar} (W_z - W_{n_1}) - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) \right] = \xi; \quad dW_z = 2\hbar \, d\xi \quad (9.8)$$

a (9.7) upravíme

$$N = \frac{2C\pi^2 t}{\hbar} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \int_{\xi_0}^{\infty} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^{-1} |A_z(\vartheta, \varphi)|^2 \frac{\sin^2 \xi t}{\pi \xi^2 t} d\xi. \quad (9.9)$$

Výraz $\frac{\sin^2 \xi t}{\pi \xi^2 t}$ má vlastnosť delta funkcie $\delta(\xi)$ pre $t \rightarrow \infty$. Integračná hranica $\xi_0 = -\frac{W_{n_1}}{\hbar} - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2})$. Integrál podľa ξ bude preto

$$\left(\frac{dW_z}{dz} \right)^{-1} |A_z(\vartheta, \varphi)|^2 \quad (9.10)$$

s hodnotou z , vyhovujúcou podmienke

$$\frac{W_z}{\hbar} - \frac{W_{n_1}}{\hbar} - (\omega_{r_1} - \omega_{r_2}) = 0.$$

Funkcia $\frac{|A_z(\vartheta, \varphi)|^2}{r^2}$ je totožná s výrazom (7.2), ktorý vzhľadom na podmienky uvedené v § 3. totiž $\hbar\omega \ll mc^2$ a $\left(\frac{Zv}{3}\right)^2 \ll z^2$ sa zjednodušil na (8.5).

Keď teda za $|A_z(\vartheta, \varphi)|^2$ dosadíme podľa (8.5), bude pravdepodobnosť elementárneho Comptonovho javu podľa (9.9), (9.10), resp. (9.4) a (3.2)

$$N = \frac{64}{27} \frac{\pi e^4 (Zv)^5 t}{m\hbar z^7} \frac{N_{r_1} \rightarrow r_2}{V^2 \omega_{r_1} \omega_{r_2}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + 4 \frac{v}{c} \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^8} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (9.11)$$

Integrál podľa ϑ a φ sa rovná 4π .

Výraz N udáva pravdepodobnosť, že za t sekúnd od počiatku pôsobenia žiariaceho poľa na atóm nastane Comptonov jav, pri ktorom fotón rozptýleného

žiarenia má frekvenciu ω_{r_2} . Pripustíme teraz pre rozptýlené žiarenie všetky frekvencie ω a zavedieme zmenu v označení: $\omega_{r_2} \rightarrow \omega$ pre rozptýlenú vlnu a $\omega_{r_1} \rightarrow \omega_1$ pre primárnu vlnu. Potom bude pravdepodobnosť Comptonovho javu, ktorý primárny fotón o frekvencii ω_1 prevádza do frekvenčného intervalu $\omega, \omega + d\omega$ úmerná počtu stojatých vln vo frekvenčnom intervale $d\omega$ rozptýleného žiarenia v našom ohraňovanom elektromagnetickom poli v objeme V . Tento počet je

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3} d\omega$$

a z neho do priestorového uhla $d\Omega$ pevného smeru pripadá

$$\frac{V\omega^2}{2\pi^2c^3} d\omega \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{V\omega^2}{8\pi^3c^3} d\omega d\Omega.$$

Pre energiu vyžiarenú za 1 sekundu z atómu do pevného priestorového uhla $d\Omega$ a frekvenčného intervalu $d\omega$ máme

$$J_\omega d\omega d\Omega = \frac{N}{t} \cdot \frac{V\omega^2}{8\pi^3c^3} \hbar\omega d\omega d\Omega$$

$$J_\omega d\omega d\Omega = \frac{32}{27\pi} \cdot \frac{c^4(Z\alpha)^5}{c^3m\hbar^2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 g \cdot \cos^2 \Phi d\omega d\Omega, \quad (9.12)$$

kde $g = \frac{N_1 \cdot \hbar\omega_1}{V}$ je hustota energie primárnej vlny. Faktor $\cos^2 \Phi$, kde Φ je rozptyľový uhol, pochádza od súčinnu $(\vec{e}_{r_1} \cdot \vec{e}_{r_2})^2$, ako plynie z úvahy: Myslime si polarizovanú rozptýlenú vlnu zloženú zo zložky, ktorej elektrický vektor kmitá v rovine elektrického vektora primárnej vlny a vlnovej normály rozptýlenej vlny, a zo zložky kolmej. Druhá (kolmá) zložka dáva v súčine $(\vec{e}_{r_1} \cdot \vec{e}_{r_2})^2$ nulový príspevok.

Od výrazu $J_\omega d\omega \cdot d\Omega$ jednoducho závisí absorpčný koeficient absorpcie röntgenového žiarenia, spôsobenej Comptonovým efektom, ako aj intenzita rozptýleného žiarenia, t. j. intenzita Comptonovej spektrálnej čiary. S týmito otázkami hodljajú sa autori zaoberať v inej práci.

Nakoniec prirovnáme ešte úhrnný tok energie $J_\omega d\omega d\Omega$ z M -hladiny s analogickými výrazmi pre K - a L -hladinu. Použili sme výsledky G. Wentzla [1] (§ 15) pre K -hladinu a jedného z autorov [2] (§ 7) pre L -hladinu. Výrazy $(J_\omega)_K$, $(J_\omega)_L$, $(J_\omega)_M$ sú okrem číselných faktorov totožné. Na základe týchto výsledkov našli sme pre pomer hodnôt J_ω v hladinách K , L , a M :

$$(J_\omega)_K : (J_\omega)_L : (J_\omega)_M = 32 : \frac{32}{8} : \frac{32}{27}.$$

LITERATÚRA

1. Wentzel G., Über den Rückstoß beim Comptoneffekt am Wasserstoffatom (Zeitschrift für Physik, 58, 1929).
2. Fischer J., Über die retardierten Matrixelemente in der Theorie der Streuung und Absorption von Röntgenstrahlen (Annalen der Physik, 5. Folge, Bd. 11, 1931).
3. Handbuch der Physik XXIV/1 (1933), str. 740.
4. Blochincev D. I., Základy kvantové mechaniky (Nakl. ČSAV, Praha 1956).

Došlo 14. III. 1956.