Tibor Katriňák

Charakterisierung der verallgemeinerten Stoneschen Halbverbände

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 3, 235--247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126527

Matematický časopis 19 (1969), No. 3

CHARAKTERISIERUNG DER VERALLGEMEINERTEN STONESCHEN HALBVERBÄNDE

TIBOR KATRIŇÁK, Bratislava

G. Grätzer und E. T. Schmidt haben in [2] die Stoneschen Verbände mit Hilfe minimaler Primideale charakterisiert. Dieses Ergebnis wurde bisher in zwei Richtungen verallgemeinert. In [3, Satz 3] für die verallgemeinerten Stoneschen Verbände und in [4, Satz 7] für die Stoneschen Halbverbände. In dieser Note zeigen wir, daß auch die verallgemeinerten Stoneschen Halbverbände ähnliche Charakterisierung zulassen und daß man die erwähnten Sätze als Spezialfälle betrachten kann. Weiter zeigen wir noch, daß man [2, Satz 3] für die relativ Stoneschen $\cup$-Halbverbände verallgemeinern kann.

Wir beginnen mit einigen notwendigen Begriffen und Resultaten, welche meistens aus der Arbeit [4] stammen.

Der Einfachheit halber werden wir weiter den Termin Halbverband für die $\cup$-Halbverbände vorbehalten. Die Halbverbände kann man als teilweise geordnete Mengen betrachten, wenn wir die Ordnungsrelation folgendermaßen einführen: $a \leqslant b$ genau dann, wenn $a \cup b = b$. Wenn es in einem Halbverband S für irgendwelche Elemente $a, b \in S$ die größte untere Schranke gibt, dann bezeichnen wir dieses Element mit $a \cap b$.

Eine Teilmenge J des Halbverbandes S heißt Ideal, wenn es gilt: $a \cup b \in J$ genau dann, wenn $a, b \in J$.

Es bezeichne $I_0(S)$ bzw. $I(S)$ die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion teilweise geordnete Menge der sämtlichen bzw. der sämtlichen nichtleeren Ideale des Halbverbandes S. $I_0(S)$ bildet einen vollständigen Verband (siehe z. B. [4, 1.2]). Die Operation „$\cup$" in $I_0(S)$ werden wir „verbandstheoretische Vereinigung" nennen.

$I(S)$ bildet genau dann einen Teilverband von $I_0(S)$, wie man leicht einsehen kann, wenn S nach unten gerichtet ist.

Ein Halbverband S heißt distributiv, falls es für $c \nleqslant a$, $c \nleqslant b$, $c \leqslant a \cup b$ ($a, b, c \in S$) solche Elemente $a_1, b_1 \in S$ gibt, daß $a_1 \leqslant a$, $b_1 \leqslant b$ und $c = a_1 \cup b_1$ gilt.

Aus [4, 1.6, 1.7] folgt

Hilfssatz 1. *S sei ein Halbverband. $I_0(S)$ bzw. $I(S)$ bildet genau dann einen distributiven Verband, wenn S distributiv ist, bzw. wenn S nach unten gerichtet und distributiv ist.*

Ein Halbverband S mit dem Nullelement heißt pseudokomplementär, falls es für jedes Element $a \in S$ ein Element $a^* \in S$ gibt, so daß folgende Bedingung erfüllt ist:

$a \cap x = O$ genau dann, wenn $x \leqslant a^*$.

Ein pseudokomplementärer Halbverband besitzt immer das größte Element $I = O^*$.

Wenn in einem Null besitzenden Halbverband S jedes Intervall $[O, a]$ $(a \in S)$ pseudokomplementär ist, dann nennen wir den Halbverband S abschnittpseudokomplementär.

Ein distributiver pseudokomplementärer Halbverband S heißt Stonescher Halbverband, wenn für jedes $a \in S$ $a^* \cup a^{**} = I$ gilt. Ein Halbverband S mit dem Nullelement heißt verallgemeinerter Stonescher Halbverband, wenn für jedes $a \in S$ das Intervall $[O, a]$ ein Stonescher Halbverband ist. In [4, 3.6] wurde gezeigt, daß jeder Stonesche Halbverband auch einen verallgemeinerten Stoneschen Halbverband darstellt.

Man kann leicht sehen (siehe z. B. [4, 2.6]), daß für einen distributiven und Null besitzenden Halbverband S der Verband $I(S)$ pseudokomplementär ist.

Für $x \in S$ bezeichne $(x]$ das von dem Element x erzeugte Hauptideal. Offenbar stellt die Abbildung $x \to (x]$ einen $\cup$-Isomorphismus von S in $I_0(S)$ dar. Es bezeichne $L(S)$ den kleinsten Teilverband von $I_0(S)$, der alle Hauptideale des Halbverbandes S enthält. Wenn S nach unten gerichtet ist, bildet $L(S)$ sogar einen Teilverband von $I(S)$.

Mit derselben Methode wie in [4, 1.13] (dort wurde S nach unten gerichtet) kann man folgenden Satz beweisen.

Hilfssatz 2. *Es sei S ein Halbverband. S ist genau dann distributiv, wenn $L(S)$ ein distributiver Verband ist. Falls S distributiv ist, dann kann man jedes Element $a \in L(S)$ in der Form $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$ $(a_1, \ldots, a_n \in L(S))$ schreiben, wobei für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ solche Elemente $x_{i1}, \ldots, x_{il_i} \in S$ existieren, daß $a_i = (x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ ist.*

Hilfssatz 3. ([4, 2.7]). *S sei ein distributiver Halbverband mit Nullelement. S ist genau dann ein pseudokomplementärer Halbverband, falls für jedes $a \in S$ das Ideal $(a]^*$ (1) ein Hauptideal ist und in diesem Falle gilt $(a]^* = (a^*]$.*

---

(1) $(a]^*$ bezeichnet das Pseudokomplement von $(a]$ in $I(S)$.

Hilfssatz 4. ([4, 3.8]). *S sei ein distributiver Halbverband mit Nullelement. S ist genau dann ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband, wenn es für jedes $x \in S$ $(x]^* \cup (x]^{**} = S$ in $I(S)$ gilt.*

Hilfssatz 5. a) *L sei ein relativ pseudokomplementärer Verband. Dann gilt für beliebige $x, y, a \in L$*

$$((x \cap a)_* y) \cap a = (x_* y) \cap a \text{ (2)}.$$

b) *In einem pseudokomplementären Verband L gilt für jede zwei a, $x \in L: (x \cap a)^* \cap a = x^* \cap a$.*

Beweis. a) L sei ein relativ pseudokomplementärer Verband. Aus $c \leqslant d$ $(c, d, y \in L)$ folgt dann $c_* y \geqslant d_* y$. Daraus ergibt sich $((x \cap a)_* y) \cap a \geqslant (x_* y) \cap a$. Sei $t \leqslant ((x \cap a)_* y) \cap a$ $(t \in L)$. Dann $t \leqslant a$, $t \leqslant (x \cap a)_* y$. Daher $x \cap t = (x \cap a) \cap t \leqslant y$. Also $t \leqslant x_* y$. Wegen $t \leqslant a$ ist auch $t \leqslant (x_* y) \cap a$. Damit haben wir bewiesen, daß $((x \cap a)_* y) \cap a \leqslant (x_* y) \cap a$ gilt und daraus folgt unsere Behauptung.

b) Den Beweis kann man analog wie im Falle a) durchführen, wenn wir erwägen, daß $z^* = z_* O$ $(z \in L)$ gilt.

Hilfssatz 6. *Sei L ein pseudokomplementärer Verband und P sein Teilverband mit dem größten Element $a \in L$ und kleinsten Elementen O. Wenn x, $x^* \cap a$, $x^{**} \cap a \in P$, dann ist $x^* \cap a$ bzw. $x^{**} \cap a$ das Pseudokomplement von x bzw. $x^* \cap a$ in P.*

Beweis. Aus $y \in P$, $y \cap x = O$ folgt $y \leqslant a$, $y \leqslant x^*$ und daraus ergibt sich $y \leqslant x^* \cap a$. Offenbar $x \cap (x^* \cap a) = O$. Das bedeutet, daß $x^* \cap a$ das Pseudokomplement von x in P ist. Analog kann man den zweiten Fall behandeln.

Hilfssatz 7. *Wenn L ein distributiver pseudokomplementärer Verband ist und wenn für $x_1, \ldots, x_n \in L$ $x_1^* \cup x_1^{**} = \ldots = x_n^* \cup x_n^{**} = I$ gilt, dann ist $(x_1 \cap \ldots \cap x_n)^* = x_1^* \cup \ldots \cup x_n^*$.*

Beweis. Bezeichne $a = x_1 \cap \ldots \cap x_n$. Infolge [4,2 .5] ist $a^* = (x_1 \cap \ldots \cap x_n)^* = (x_1^* \cup \ldots \cup x_n^*)^{**}$. Nach [4, Satz 4] ist $a^{**} = (x_1 \cap \ldots \cap x_n)^{**} = x_1^{**} \cap \ldots \cap x_n^{**}$. Setzen wir $c = x_1^* \cup \ldots \cup x_n^*$. Offenbar $c \leqslant a^*$. Daraus folgt $a^{**} \cap a^* = a^{**} \cap c = O$. Aus der Distributivität und aus $I = x_i^* \cup x_i^{**}$ für $i = 1, \ldots, n$ bekommen wir $a^{**} \cup c = (x_1^{**} \cap \ldots \cap x_n^{**}) \cup c = (x_1^{**} \cup c) \cap \ldots \cap (x_n{}^* \cup c) = I$. Weil $c \leqslant a^*$ ist, muß auch $a^{**} \cup a^* = I$ gelten. Infolge [1, IX, §1] gilt $c = a^*$.

Hilfssatz 8. *S sei ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband. Dann gilt in $I(S)$ $a^* \cup a^{**} = S$ für jedes $a \in L(S)$.*

---

(2) Ein Verband heßt relativ pseudokomplementär, falls es für beliebige zwei Elemente $a, b \in L$ ein solches Element $a * b \in L$ gibt, daß $a \cap t \leqslant b$ genau dann ist, wenn $t \leqslant a * b$.

Beweis. Der Verband $I(S)$ ist distributiv und pseudokomplementär. Dem Hilfssatz 4 nach ist $(x]^* \cup (x]^{**} = S$ für jedes $x \in S$. Nehmen wir an, daß $b = (x_1] \cap \ldots \cap (x_n]$ für irgendwelche $x_1, \ldots, x_n \in S$. Aus dem Hilfssatz 7 bekommen wir $b^* = (x_1]^* \cup \ldots \cup (x_n]^*$. Nach [4, Satz 4] ist $b^{**} = (x_1]^{**} \cap \cap \ldots \cap (x_n]^{**}$. Aus der Distributivität von $I(S)$ und aus dem Hilfssatz 4 folgt $b^* \cup b^{**} = S$. Sei nun $a \in L(S)$, d. h. $a = a_1 \cup \ldots \cup a_m$, wobei $a_i = (x_{i1}] \cap \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ für irgendwelche $x_{11}, \ldots, x_{ml_m} \in S$ (Hilfssatz 2). Aus [4, 2.4] folgt $a^* = a_1^* \cap \ldots \cap a_m^{**}$ und aus dem Hilfssatz 7 bekommen wir $a^{**} = = a_1^{**} \cup \ldots \cup a_m^{**}$. Wir haben schon $a_i^{**} \cup a_i^{**} = S$ $(i = 1, \ldots, m)$ bewiesen. Daraus folgt unmittelbar $a^* \cup a^{**} = S$.

Sei S ein distributiver Halbverband mit Nullelement. Für $y \in S$ bezeichnen wir mit $L(Sy)$ den kleinsten Teilverband von $I_0([0, y])$, der alle Hauptideale $(x]$ $(x \leqslant y)$ enthält. Wenn $c, d \in L(S)$ und $c \leqslant d$ ist, dann setzen wir $< c, d > = = \{x \in L(S); c \leqslant x \leqslant d\}$. Offenbar $\langle c, d\rangle = [c, d] \cap L(S)$. Selbstverständlich enthält der Verband $L(Sy)$ das kleinste (größte) Element $(0]$ ($(y]$) und ist ein Teilverband von $\langle (0], (y]\rangle$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß $L(Sy)$ ein echter Teilverband von $\langle (0], (y]\rangle$ sein kann. Sei $S = \{0, x, y, I, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $0 < a_1 < a_2 < < \ldots < x, y < I$ und die Elemente x, y seien unvergleichbar. Dann ist S ein Halbverband und $x \cup y = I$. Offenbar $(x] \cap (y] = \{0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \in \in \langle (0], (y]\rangle$ aber $(x] \cap (y] \notin L(Sy)$.

Hilfssatz 9. *Sei S ein distributiver abschnittspseudokomplementärer Halbverband. Dann ist $L(S)$ ein distributiver und abschnittspseudokomplementärer Verband, wobei für $b \in \langle (0], a\rangle$ $(a \in L(S))$ $b^* \cap a$*(3) *das Pseudokomplement von b in $\langle (0], a\rangle$ darstellt.*

Beweis. $L(S)$ ist ein distributiver Verband (Hilfssatz 2). Wir müssen beweisen, daß für jedes $a \in L(S)$ der Teilverband $\langle (0], a\rangle$ pseudokomplementär ist. Zuerst setzen wir voraus, daß $a = (y]$ $(y \in S)$ ist. Sei $b \in \langle (0], (y]\rangle$. Dann $b = b_1 \cup \ldots \cup b_m$, wobei $b_i = (y_{i1}] \cap \ldots \cap (y_{il_i}]$ für $i = 1, \ldots, m$ (Hilfssatz 2). Setzen wir weiter $\bar{y} = y \cup y_{11} \cup \ldots \cup y_{ml_m}$. Offenbar ist $\langle (0], (y]\rangle$ ein Teilverband von $\langle (0], (\bar{y}]\rangle$ und $(y_{ij}] \in \langle (0], (\bar{y}]\rangle$. Es bezeichne t^+ das Pseudokomplement von $t \in [0, \bar{y}]$ in $[0, \bar{y}]$. Ähnlich bezeichne J^+ das Pseudokomplement von $J \in [(0], (\bar{y}]]$ in $[(0], (\bar{y}]]$. $[(0], (\bar{y}]]$ und $I(S)$ sind pseudokomplementäre Verbände. Wenn $J \in [(0], (\bar{y}]]$ und J^* das Pseudokomplement von J in $I(S)$ bezeichnet, dann $J^+ = J^* \cap (\bar{y}]$ (Hilfssatz 6). Für $t \in [0, \bar{y}]$ ist $(t^+] = (t]^+$ (Hilfssatz 3) und daraus folgt $(t^+] = (t]^* \cap (\bar{y}]$. Betrachten wir das Element $c = (t_1] \cap \ldots \cap (t_k]$ für $t_1, \ldots, t_k \in [0, \bar{y}]$. Dann ist nach [4, 2.5] $c^* = \{(t_1]^* \cup \cup \ldots \cup (t_k]^*\}^{**}$. Wenn wir mehrmals die Hilfssätze 3 und 5b verwenden,

(3) b^* bezeichnet das Pseudokomplement von b in $I(S)$.

bekommen wir $c^+ = c^* \cap (\bar{y}] = \{(t_1]^* \cup \ldots \cup (t_k]^*\}^{**} \cap (\bar{y}] = (\{(t_1]^* \cup \ldots \cup$ $\cup (t_k]^*\}^* \cap (\bar{y}])^* \cap (\bar{y}] = [(\{(t_1]^* \cup \ldots \cup (t_k]^*\} \cap (\bar{y}])^* \cap (\bar{y}]]^* \cap (\bar{y}] =$ $= [\{((t_1]^* \cap (\bar{y}]) \cup \ldots \cup ((t_k]^* \cap (\bar{y}])\}^* \cap (\bar{y}]]^* \cap (\bar{y}] = [\{(t_1^+] \cup \ldots \cup (t_k^+]\}^* \cap$ $\cap (\bar{y}]]^* \cap (\bar{y}] = \{(t_1^+ \cup \ldots \cup t_k^+]^* \cap (\bar{y}]\}^* \cap (\bar{y}] = ((t_1^+ \cup \ldots \cup t_k^+)^+]^* \cap (\bar{y}] =$ $= (t_1^+ \cup \ldots \cup t_k^+)^{++}] \in \langle(0], (\bar{y}]\rangle$. Also $b_i^+ = b_i^* \cap (\bar{y}] \in L(S)$ für $i = 1, \ldots, m$. Aus [4, 2.4] folgt $b^* = b_1^* \cap \ldots \cap b_m^*$. Daher bekommen wir $b^* \cap (\bar{y}] =$ $= (b_1^* \cap (\bar{y}]) \cap \ldots \cap (b_m^* \cap (\bar{y}]) = b_1^+ \cap \ldots \cap b_m^+$. Weil $b_1^+, \ldots, b_m^+ \in L(S)$ ist, so auch $b^+ \in L(S)$. Folglich auch $b^+ \cap (y] \in L(S)$ und endlich $b^+ \cap (y] =$ $= (b^* \cap (\bar{y}]) \cap (y] = b^* \cap (y] \in \langle(0], (y]\rangle$. Dem Hilfssatz 6 zufolge ist $b^* \cap (y]$ das Pseudokomplement von b in $\langle(0], (y]\rangle$. Damit haben wir bewiesen, daß $\langle(0], (y]\rangle$ ein pseudokomplementärer Teilverband von $L(S)$ ist.

Sei nun $a \in L(S)$ beliebig. Betrachten wir $\langle(0], a\rangle$, $a = a_1 \cup \ldots \cup a_m$, wobei $a_i = (x_{i1}] \cap \ldots \cap (x_{il_i}]$ für $i = 1, \ldots, m$. Setzen wir $y = x_{11} \cup \ldots \cup x_{ml_m}$. Offenbar ist $\langle(0], a\rangle$ ein Teilverband von $\langle(0], (y]\rangle$. Sei $b \in \langle(0], a\rangle$. Wir haben schon bewiesen, daß $b^* \cap (y]$ das Pseudokomplement von b in $\langle(0], (y]\rangle$ ist. Also $b^* \cap (y] \in L(S)$ und daraus erhalten wir $(b^* \cap (y]) \cap a \in L(S)$. Aber $(b^* \cap (y]) \cap a = b^* \cap a$. So ist $b^* \cap a$ das Pseudokomplement (Hilfssatz 6) von b in $\langle(0], a\rangle$ und damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1. *S sei ein Halbverband mit dem Nullelement. S ist ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband genau dann, wenn $L(S)$ ein verallgemeinerter Stonescher Verband ist.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $L(S)$ ein verallgemeinerter Stonescher Verband ist. Dann ist S ein distributiver Halbverband (Hilfssatz 2). Sei $x \in [0, y]$ für $y \in S$. Es bezeichne $(x]^+$ bzw. $(x]^{++}$ das Pseudokomplement von $(x]$ bzw. von $(x]^+$ in $\langle(0], (y]\rangle$. Der Voraussetzung nach gilt $(x]^+ \cup (x]^{++} = (y]$. Trivialerweise gilt $(x]^+ \cap (x]^{++} = (0]$. Aus beiden letzten Gleichungen ergibt sich nach [4, 1.9], daß beide Ideale $(x]^+$ und $(x]^{++}$ Hauptideale sind. Daraus folgt $(x]^+ = (x^+]$, $(x]^{++} = (x^{++}]$ und offenbar ist x^+ bzw. x^{++} das Pseudokomplement von x bzw. von x^+ in $[0, y]$. Also, S ist ein abschnittspseudokomplementärer Halbverband. Aus $(y] = (x]^+ \cup (x]^{++} = (x^+] \cup (x^{++}] = (x^+ \cup x^{++}]$ kann man einsehen, daß S sogar ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband ist.

Sei S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband. Dann ist $L(S)$ ein distributiver abschnittspseudokomplementärer Verband (Hilfssätze 2 und 9). Dabei haben wir auch bewiesen, daß für $b \in \langle(0], a\rangle$ $(a \in L(S))$ $b^* \cap a$ das Pseudokomplement von b in $\langle(0], a\rangle$ ist. Weiter, $(b^* \cap a)^* \cap a = b^{**} \cap a$ ist das Pseudokomplement von $b^* \cap a$ (Hilfssatz 5b). Schließlich $(b^* \cap a) \cup$ $\cup (b^{**} \cap a) = (b^* \cup b^{**}) \cap a = a$, weil $b^* \cup b^{**} = S$ dem Hilfssatz 8 nach. Also $\langle(0], a\rangle$ ist ein Stonescher Verband. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Für den folgenden Satz brauchen wir noch einen Begriff (siehe [4, Definition 11]). Ein Ideal P des Halbverbandes S heißt schwaches Primideal in S, falls es für Ideale $J_1, \ldots, J_n$ von S aus $J_1 \cap \ldots \cap J_n \subset (t] \subset P$ folgt, daß $J_i \subset P$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist.

Man kann leicht einsehen, daß in einem Verband schwaches Primideal Primideal ist und umgekehrt. Ein minimales schwaches Primideal von S wird das minimale Element in der teilweise geordneten Menge der sämtlichen nichtleeren schwachen Primideale von S bedeuten. In [4, 3.3] wurde bewiesen, daß zu jedem schwachen Primideal P eines Null besitzenden Halbverbandes S ein minimales schwaches Primideal Q von S mit der Eigenschaft $Q \subset P$ existiert.

Satz 2. *Sei S ein distributiver abschnittspseudokomplementärer Halbverband mit Nullelement. S ist genau dann ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.*

(GSs) *Die verbandstheoretische Vereinigung von zwei beliebigen verschiedenen minimalen schwachen Primidealen von S ist gleich S.*

Bemerkung. Wenn wir in (GSs) die Worte „schwache Primideale" mit den Worten „Primideale" ersetzen, bekommen wir die Bedingung (GS) (siehe [3] oder [4]).

Bevor wir den Beweis von Satz 2 erbringen, erwähnen wir zwei Behauptungen

Hilfssatz 10. ([3, Satz 3]). *Ein distributiver abschnittspseudokomplementärer Verband L ist genau dann ein verallgemeinerter Stonescher Verband, wenn er die Bedingung* (GS) *erfüllt.*

Im ersten Teil des Beweises [4, Satz 7] wurde folgende Behauptung für die nach unten gerichteten und distributiven Halbverbände S bewiesen. Mit derselber Methode kann man das auch für die distributiven Halbverbände erzielen.

Hilfssatz 11. *S sei ein distributiver Halbverband. Es bezeichne $\mathscr{M}$ bzw. $\mathscr{N}$ die Menge der sämtlichen nichtleeren schwachen Primideale von S bzw. nichtleeren Primideale von $L(S)$ (beide Mengen sind bezüglich der mengentheoretischen Inklusion teilweise geordnet). Für $P \in \mathscr{M}$ bezeichne $\overline{P} = \{z \in L(S);$ es gibt $x \in P$ so daß $z \subset (x]\}$. Dann stellt die Abbildung $P \to \overline{P}$ einen Isomorphismus von $\mathscr{M}$ auf $\mathscr{N}$ dar.*

Beweis des Satzes 2. Nehmen wir an, daß S ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband ist. Seien P_1, P_2 $(P_1 \neq P_2)$ minimale schwache Primideale von S. Dann $\overline{P}_1 \neq \overline{P}_2$ und $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ stellen minimale Primideale von $L(S)$ dar (Hilfssatz 11). Aus Satz 1 folgt, daß $L(S)$ ein verallgemeinerter Stonescher Verband ist. Solche Verbände erfüllen die Bedingung (GS) (Hilfssatz 10).

Daraus folgt, daß $\bar{P}_1 \cup \bar{P}_2 = L(S)$. Sei $z \in S$. Dann $(z] \in L(S)$ und es existieren $a \in \bar{P}_1$, $b \in \bar{P}_2$ mit der Eigenschaft $a \cup b \supset (z]$. Nach der Konstruktion von $\bar{P}_1$ und $\bar{P}_2$ existieren solche Elemente $x \in P_1$, $y \in P_2$, daß $a \subset (x]$, $b \subset (y]$. Dann $(x] \cup (y] \supset (z]$, d. h. $x \cup y \geqslant z$. Also $z \in P_1 \cup P_2$. Weil das Element z beliebig in S gewählt wurde, ist $S = P_1 \cup P_2$.

Umgekehrt, erfülle S die Bedingung (GSs). Aus dem Isomorphismus zwischen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ (Hilfssatz 11) folgt, daß der Verband $L(S)$ die Bedingung (GS) erfüllt. $L(S)$ ist ein distributiver und abschnittspseudokomplementärer Verband (Hilfssatz 9). Dann ergibt sich aus dem Hilfssatz 10, daß $L(S)$ ein verallgemeinerter Stonescher Verband ist. Aus dem Satz 1 bekommen wir wieder, daß S ein verallgemeinerter Stonescher Verband ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Weil ein Stonescher Halbverband ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband ist [4, 3.6] und ein verallgemeinerter Stonescher Halbverband mit dem größten Element ein Stonescher Halbverband ist, ergibt sich aus dem Satz 2 unmittelbar

Folgerung 1. ([4, Satz 7]). *Ein distributiver pseudokomplementärer Halbverband ist genau dann ein Stonescher Halbverband, wenn er die Bedingung* (GSs) *erfüllt.*

Für Verbände geht die Bedingung (GSs) in die Bedingung (GS) über. Aus dem Satz 2 bekommen wir dann

Folgerung 2. ([3, Satz 3]). *Ein distributiver abschnittspseudokomplementärer Verband ist genau dann ein verallgemeinerter Stonescher Verband, wenn er die Bedingung* (GS) *erfüllt.*

Folgerung 3. (Grätzer—Schmidt [2]). *Ein distributiver pseudokomplementärer Verband ist genau dann ein Stonescher Verband, wenn er die Bedingung* (GS) *erfüllt.*

Hilfssatz 12. *Sei L ein distributiver Verband mit dem kleinsten und größten Element. Es gebe für ein Element $a \in L$ das Pseudokomplement $a^* \in L$ und auch für $a^* \in L$ das Pseudokomplement a^{**} in L. Wenn L die Bedingung* (GS) *erfüllt, dann gilt $a^* \cup a^{**} = I$.*

Zum Beweis siehe den Beweis von [2, Satz 1].

Hilfssatz 13. *Sei L ein distributiver Verband und $a, b \in L$ $(a \leqslant b)$. Sei J ein Primideal von $[a, b]$. Dann gibt es ein Primideal P von L, so daß $J = P \cap [a, b]$ ist* (4).

Beweis. Wenn J ein Primideal von $[a, b]$ ist, dann bildet die Menge $[a, b] -$ $- J$(5) ein duales Primideal von $[a, b]$. Sei $Q = \{z \in L;$ es gibt ein Element

(4) „$\cap$" bezeichnet den mengentheoretischen Durchschnitt.

(5) $[a, b] - J$ bezeichnet die mengentheoretische Differenz.

$x \in J$, so daß $z \leqslant x\}$ und $D = \{z \in L$; es gibt ein Element $x \in [a, b] - J$, so daß $z \geqslant x\}$. Offenbar ist Q ein Ideal und D ein duales Ideal von L und der Durchschnitt beider Ideale ist leer. Aus dem Satz von Stone (siehe z. B. [4, Satz 2]) ist bekannt, daß ein Primideal P von L mit der Eigenschaft $P \supset Q$, $P \cap D = \emptyset$ existiert ([6]). Man kann leicht überprüfen, daß $J = P \cap [a, b]$ ist.

Unser Vorhaben ist es jetzt, [2, Satz 3] auf die Halbverbände zu verallgemeinern.

Sei S ein Halbverband und für $a \leqslant b$ $(a, b \in S)$ sei $[a, b]$ ein pseudokomplementärer Teilhalbverband. Das Pseudokomplement von $x \in [a, b]$ in $[a, b]$ bezeichnen wir mit $x^*(a, b)$. Die relative Pseudokomplemente in einem Verband (siehe [1, IX, §12] oder die Fußnote ([2])) bezeichnen wir, wie gewöhnlich, mit dem $x_* y$.

Wenn S ein distributiver Halbverband ist, dann ist leicht nachzuweisen, daß der Idealenverband $I_0(S)$ relativ pseudokomplementär ist (siehe [4, 1.2, 1.6, 1.8] und [1, IX, Satz 15]).

Definition. *Es sei S ein distributiver Halbverband. S heißt relativ Stonescher Halbverband, wenn für je zwei $a \leqslant b$ $(a, b \in S)$ das Intervall $[a, b]$ einen Stoneschen Halbverband darstellt.*

Weiter werden wir in einem distributiven Halbverband, in dem jedes Intervall $[a, b]$ einen pseudokomplementären Teilhalbverband bildet, den Zusammenhang der folgenden Bedingungen untersuchen:

(a) *S ist ein relativ Stonescher Halbverband;*

(b) *Für je zwei $x, y \in S$ und ein beliebiges $z \geqslant x \cup y$ $(z \in S)$ gilt*
$$z = (x \cup y)^*(y, z) \cup [(x \cup y)^*(y, z) \cup x]^*(x, z);$$

(c) *Für je zwei schwache Primideale P, Q von S, für welche $P \not\supset Q$, $Q \not\supset P$ ist, gilt $P \cup Q = S$ in $I_0(S)$.*

Hilfssatz 14. *S sei ein distributiver Halbverband in dem jedes Intervall $[y, z]$ $(y, z \in S, y \leqslant z)$ einen pseudokomplementären Teilhalbverband bildet. Dann folgt aus der Bedingung* (b) *die Bedingung* (a).

Beweis. Sei $[y, z]$ $(y, z \in S, y \leqslant z)$ ein beliebiges Intervall des Halbverbandes S. Es gelte die Bedingung (b). Es ist zu zeigen, daß für beliebiges $x \in [y, z]$ $x^*(y, z) \cup (x^*(y, z))^*(y, z) = z$ gilt. Zuerst beweisen wir, daß $(x^*(y, z))^*(y, z) = (x^*(y, z) \cup x)^*(x, z)$. Offenbar folgt aus der Pseudokomplementarität des $[y, z]$ $(x^*(y, z))^*(y, z) \geqslant x$. Daraus und aus der Distributivität des Verbandes $I_0(S)$ (Hilfssatz 1) folgt $((x^*(y, z))^*(y, z)] \cap (x^*(y, z) \cup x] = ((x^*(y, z))^*(y, z)] \cap \{(x^*(y, z)] \cup (x]\} = \{((x^*(y, z))^*(y, z)] \cap (x^*(y, z)]\} \cup$

([6]) $\emptyset$ bezeichnet die leere Menge.

$\cup \{((x^*(y,z))^*(y,z)] \cap (x]\} = (y] \cup (x] = (x]$, weil aus der Pseudokomplementarität des $[y,z]$ die Existenz des Elementes $(x^*(y,z))^*(y,z) \cap x^*(y,z)$ folgt, das dem Element y gleich ist. Also $(x^*(y,z))^*(y,z) \cap (x^*(y,z) \cup x) = x$ und daher gilt $(x^*(y,z))^*(y,z) \leqslant (x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)$, weil auch das Intervall $[x,z]$ pseudokomplementär ist. Betrachten wir weiter das Ideal $(x] = ((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z) \cup x] = ((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap \{((x^*(y,z)] \cup (x]\}$. Aus der Distributivität des $I_0(S)$ (Hilfssatz 1) folgt $(x] = \{((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z)]\} \cup \{((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x]\} = \{((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z)]\} \cup (x]$, weil $(x^*(y,z) \cup x)^*(x,z) \geqslant x$ ist. Also $((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z)] \subset (x] \subset ((x^*(y,z))^*(y,z)]$. Daher gilt $((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z)] = \{((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (x^*(y,z)]\} \cap \cap ((x^*(y,z))^*(y,z)] = ((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap \{(x^*(y,z)] \cap ((x^*(y,z))^*(y,z)]\} = ((x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)] \cap (y] = (y]$, weil $[y,z]$ pseudokomplementär ist und noch $(x^*(y,z) \cup x)^*(x,z) \geqslant x \geqslant y$ gilt. Wir haben gezeigt, daß das Element $(x^*(y,z) \cup x)^*(x,z) \cap x^*(y,z)$ in S erklärt und mit dem Element y identisch ist. Aus der Pseudokomplementärität des Intervalls $[y,z]$ folgt $(x^*(y,z) \cup \cup x)^*(x,z) \leqslant (x^*(y,z))^*(y,z)$. Aus der oben abgeleiteten entgegengesetzten Ungleichung bekommen wir endlich $(x^*(y,z) \cup x)^*(x,z) = (x^*(y,z))^*(y,z)$. Jetzt wenden wir die Bedingung (b) an. Weil der Annahme nach $z \geqslant x \geqslant y$ ist, bekommen wir $z = x^*(y,z) \cup (x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)$. Aus $(x^*(y,z))^*(y,z) = (x^*(y,z) \cup x)^*(x,z)$ folgt $z = x^*(y,z) \cup (x^*(y,z))^*(y,z)$, was mit der Bedingung (a) äquivalent ist.

Bemerkung. Wir zeigen jetzt, daß im allgemeinen die Bedingung (a) die Bedingung (b) nicht nach sich ziehen muß. Sei $S = \{0, 1, \ldots, n, \ldots, x, y, z, t\}$, wobei $0 < 1 < 2 < \ldots < n < \ldots < x, y < t < z$ und x mit y unvergleichbar ist. S ist ein Halbverband, dessen Diagram in Fig. 1 veranschaulicht ist. Man kann leicht sehen, daß S einen distributiven Halbverband, in dem jedes Intervall ein pseudokomplementärer Halbverband ist, darstellt. Offenbar $x \cup y = t$. Ebenso kann man sehen, daß S sogar einen relativ Stoneschen Halbverband darstellt. Also erfüllt S die Bedingung (a). Die Bedingung (b) gilt aber für den Halbverband S nicht, weil $(x \cup y)^*(y,z) = y$, $((x \cup y)^*(y,z) \cup x)^*(x,z) = (y \cup x)^*(x,z) = x$. Also $(x \cup y)^*(y,z) \cup [(x \cup y)^*(y,z) \cup x]^*(x,z) = t \neq z$.

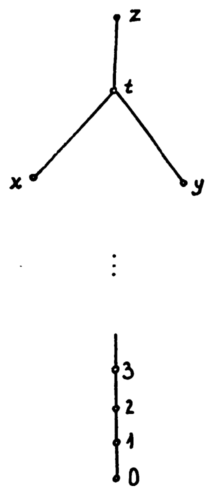

Fig. 1.

Hilfssatz 15. *L sei ein distributiver Verband in dem jedes Intervall* $[a, b]$ $(a, b \in L,\ a \leqslant b)$ *einen pseudokomplementären Teilverband bildet. Dann ist die Bedingung* (a) *mit der Bedingung* (b) *äquivalent.*

Beweis. Aus dem Hilfssatz 14 folgt (b) $\Rightarrow$ (a). Wir weisen noch (a) $\Rightarrow$ (b) nach. Zuerst zeigen wir, daß für beliebige $a, b, c \in L$ $(a \cup b \leqslant c)$ $(a \cup b)^*(b, c) = a^*(a \cap b, c)$ gilt. Bezeichnen wir $t = (a \cup b)^*(b, c)$. Dann $(a \cup b) \cap t = (a \cap t) \cup (b \cap t) = b$. Daher gilt $a \cap t \leqslant a \cap b$ und aus $a, t \geqslant a \cap b$ bekommen wir $a \cap t = a \cap b$, d. h. $t \leqslant a^*(a \cap b, c) = p$. Weiter $(a \cup b) \cap p = (a \cap p) \cup (b \cap p) = (a \cap b) \cup (b \cap p) = b \cap (a \cup p) = b$, weil $b \leqslant t \leqslant p$ gilt. Daraus folgt $p \leqslant t$ und damit haben wir $t = p$ bewiesen. Sei $x \cup y \leqslant z$ $(x, y, z \in S)$. Aus der abgeleiteten Gleichheit folgt $(x \cup y)^*(y, z) = x^*(x \cap y, z)$, $[((x \cup y)^*(y, z)) \cup x]^*(x, z) = ((x \cup y)^*(y, z))^*[((x \cup y)^*(y, z)) \cap x, z] \geqslant ((x \cup y)^*(y, z))^*(x \cap y, z)$, weil $(x \cup y)^*(y, z) \geqslant y$(7). Dann gilt $z \geqslant (x \cup y)^*(y, z) \cup [((x \cup y)^*(y, z) \cup x]^*(x, z) = x^*(x \cap y, z) \cup ((x \cup y)^*(y, z))^*[((x \cup y)^*(y, z)) \cap x, z] \geqslant x^*(x \cap y, z) \cup [((x \cup y)^*(y, z))^*(x \cap y, z)] = x^*(x \cap y, z) \cup (x^*(x \cap y, z))^*(x \cap y, z) = z$ (Bedingung (a)), wenn wir mehrmals die oben abgeleitete Gleichheit verwenden. Dies ist jedoch die Bedingung (b).

Satz 3. *S sei ein distributiver Halbverband in dem jedes Intervall* $[a, b]$ $(a, b \in S,\ a \leqslant b)$ *einen pseudokomplementären Teilhalbverband bildet. Dann ist die Bedingung* (b) *mit der Bedingung* (c) *äquivalent.*

Vor dem Beweis erwähnen wir noch zwei bekannte Behauptungen:

Hilfssatz 16. *Im relativ pseudokomplementären Verband L gilt* $(x_1 \cup \ldots \cup x_n)_* y = x^*{}_1 y \cap \ldots \cap x_{n*} y$, $y_*(x_1 \cap \ldots \cap x_n) = y_* x_1 \cap \ldots \cap y_* x_n$ *für beliebige Elemente* $x_1, \ldots, x_n, y \in L$.

Beweis. L sei ein relativ pseudokomplementärer Verband. Für $a, b, d \in L$ und $a \leqslant b$ gilt offenbar $a_* d \geqslant b_* d$. Daraus folgt $(x_1 \cup \ldots \cup x_n)_* y \leqslant x_{1*} y \cap \ldots \cap x_{n*} y$. Bezeichne $t = x_{1*} y \cap \ldots \cap x_{n*} y$. L ist distributiv (siehe [1, IX, §12]). Daraus folgt $(x_1 \cup \ldots \cup x_n) \cap t = (x_1 \cap t) \cup \ldots \cup (x_n \cap t) \leqslant y$, weil $x_i \cap t \leqslant x_i \cap x_{i*} y \leqslant y$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist. Daher gilt $t \leqslant (x_1 \cup \ldots \cup x_n)_* y$. Also $(x_1 \cup \ldots \cup x_n)_* y = x_{1*} y \cap \ldots \cap x_{n*} y$.

Offenbar $y_*(x_1 \cap \ldots \cap x_n) \leqslant y_* x_1 \cap \ldots \cap y_* x_n$. Weiter $y \cap (y_* x_1 \cap \ldots \cap y_* x_n) = (y \cap y_* x_1) \cap \ldots \cap (y \cap y_* x_n) \leqslant x_1 \cap \ldots \cap x_n$, weil $y \cap y_* x_i \leqslant x_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Also $y_*(x_1 \cap \ldots \cap x_n) = y_* x_1 \cap \ldots \cap y_* x_n$.

Hilfssatz 17. a) *Im relativ pseudokomplementären Verband L bildet für je zwei Elemente $a, b \in L$, $a \leqslant b$, das Intervall $[a, b]$ einen pseudokomplementären Teilverband und $c^*(a, b) = (c_* a) \cap b$ für $c \in [a, b]$.*

(7) Für $c \leqslant b \leqslant a \leqslant d$ ist im distributiven Verband $a \cap [a^*(c, d) \cup b] = b$. Also $a^*(c, d) \leqslant a^*(c, d) \cup b \leqslant a^*(b, d)$.

b) *Wenn S ein distributiver Halbverband und $[a, b]$ $(a, b \in S,\ a \leqslant b)$ ein pseudokomplementärer Teilhalbverband von S ist, dann gilt für $c \in [a, b]$ $(c^*(a, b)] = ((c]_*(a]) \cap (b]$.*

Beweis. a) Sei L ein relativ pseudokomplementärer Verband, $a, b \in L$, $a \leqslant b$, $c \in [a, b]$. Offenbar $c \cap (c_* a) \cap b = a$, weil $c_* a \geqslant a$ ist. Für $t \in [a, b]$ aus $c \cap t = a$ folgt $t \leqslant (c_* a) \cap b$ und daraus $(c_* a) \cap b = c^*(a, b)$.

b) Sei S ein distributiver Halbverband und $[a, b]$ ein pseudokomplementärer Teilhalbverband von S $(a, b \in S,\ a \leqslant b)$. Bekanntlich ist $I_0(S)$ ein relativ pseudokomplementärer Verband. Für $c \in [a, b]$ aus $c \cap c^*(a, b) = a$ folgt $(c] \cap (c^*(a, b)] = (a]$ und daraus $(c^*(a, b)] \subset ((c]_*(a]) \cap (b]$. Sei $t \in ((c]_*(a]) \cap (b]$. Dann auch $a \cup t \in ((c]_*(a]) \cap (b]$ und das zieht $(c] \cap (a \cup t)] = (a]$ nach sich. Daraus folgt $c \cap (a \cup t) = a$, d. h. $a \cup t \leqslant c^*(a, b)$. Also $(c^*(a, b)] \supset ((c]_*(a]) \cap (b]$ und damit ist $(c^*(a, b)] = ((c]_*(a]) \cap (b]$ bewiesen.

Beweis des Satzes 3. Nehmen wir zuerst an, daß S ein distributiver Halbverband ist, in dem jedes Intervall $[a, b]$ $(a, b \in S,\ a \leqslant b)$ einen pseudokomplementären Teilhalbverband bildet. Betrachten wir das Interval $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ in $L(S)$, wobei $z \geqslant x \cup y$ $(x, y, z \in S)$. Offenbar $(x] \in \langle (x] \cap (y], (z] \rangle$. Zuerst zeigen wir, daß $(x]$ in $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ ein Pseudokomplement besitzt. Der Idealenverband $I_0(S)$ ist nach [4, 1.2, 1.6, 1.8] und [1, IX, Satz 15] relativ pseudokomplementär. Aus dem Hilfssatz 17a ergibt sich, daß $(x]^+ = ((x]_*((x] \cap (y])) \cap (z]$ das Pseudokomplement von $(x]$ in $[(x] \cap (y], (z]]$ ist. Wir zeigen noch, daß $(x]^+ \in L(S)$. Aus dem Hilfssatz 16 folgt $(x]_*((x] \cap (y]) = (x]_*(y] = (x \cup y]_*(y]$. Dann $(x]^+ = ((x \cup y]_*(y]) \cap (z] = ((x \cup y)^*(y, z)] \in L(S)$ (Hilfssatz 17b). Daraus folgt sogar $(x]^+ \in \langle (x] \cap (y], (z] \rangle$. Weil das Intervall $[(x] \cap (y], (z]]$ pseudokomplementär ist (Hilfssatz 17a), muß $(x]^+$ dem Hilfssatz 6 nach das Pseudokomplement von $(x]$ in $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ sein. Analog überzeugen wir uns, daß auch $(x]^+$ in $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ das Pseudokomplement besitzt. Das Pseudokomplement von $(x]^+$ in $[(x] \cap (y], (z]]$ kann folgendermaßen ausgedrückt werden: $(x]^{++} = ((x]^+{}_*((x] \cap (y])) \cap (z]$ (Hilfssatz 17a) $= (\{((x]_*((x] \cap (y])) \cap (z]\}_*((x] \cap (y])) \cap (z] = \{((x]_*((x] \cap (y]))_*((x] \cap (y])\} \cap (z]$ (Hilfssatz 5a). Es ist zu zeigen, daß dieses Ideal zu $L(S)$ gehört. Dem Hilfssatz 16 zufolge ist $((x]_*((x] \cap (y]))_*((x] \cap (y]) = ((x \cup y]_*(y])_*((x] \cap (y]) = ((x \cup y]_*(y])_*(x] \cap ((x \cup y]_*(y])_*(y]$. Also $(x]^{++} = \{((x \cup y]_*(y])_*((x] \cap (y])\} \cap (z] = \{((x \cup y]_*(y])_*(x]\} \cap (z] \cap \{((x \cup y]_*(y])_*(y]\} \cap (z]$. Wenn wir mehrmals die Hilfsätze 5a und 17b verwenden, bekommen wir $(x]^{++} = (\{((x \cup y]_*(y]) \cap (z]\}_*(x]) \cap (z] \cap (\{((x \cup y]_*(y]) \cap (z]\}_*(y]) \cap (z] = \{((x \cup y)^*(y, z)]_*(x]\} \cap (z] \cap \{((x \cup y)^*(y, z)]_*(y]\} \cap (z] = \{((x \cup y)^*(y, z) \cup x]_*(x]\} \cap (z] \cap \{((x \cup y)^*(y, z)]_*(y]\} \cap (z] = ((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)] \cap (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)] \in L(S)$. Ähnlich wie oben, mit Hilfe des Hilfssatzes 6, ist $(x]^{++}$ das Pseudokomplement von $(x]^+$ in $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$.

Es gelte jetzt die Bedingung (b). Setzen wir das Gegenteil von (c) voraus.

Dann gibt es solche schwache Primideale P, Q von S, daß $P \not\subset Q$, $Q \not\subset P$ und $P \cup Q \neq S$ ist, d. h. es existieren Elemente $x, y, t \in S$, daß $t \in S - P \cup Q$, $x \in P - Q$, $y \in Q - P$ gilt. Gehen wir zum Verband $L(S)$ über. Dann folgt aus dem Hilfssatz 11, daß $(t] \in L(S) - \bar{P} \cup \bar{Q}$, $(x] \in \bar{P} - \bar{Q}$, $(y] \in \bar{Q} - \bar{P}$ und $\bar{P}$, $\bar{Q}$ Primideale von $L(S)$ sind. Betrachten wir das Intervall $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$, wobei $z = t \cup x \cup y$. Bezeichne $(x]^+$ bzw. $(x]^{++}$ das Pseudokomplement von $(x]$ bzw. $(x]^+$ in $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$. Weil $(x] \cap (x]^+ = (x] \cap (y] \in \bar{P} \cap \bar{Q} \subset \bar{Q}$ und $(x] \notin \bar{Q}$, dann muß $(x]^+ \in \bar{Q}$. Aus $(y] \subset (x]^+$ folgt $(x]^+ \in \bar{Q} - \bar{P}$. Ähnlich bekommen wir $(x]^{++} \in \bar{P} - \bar{Q}$. Aus der Distributivität des $L(S)$ ergibt sich $(x]^+ \cup (x]^{++} = ((x \cup y)^*(y, z)] \cup \{(((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)] \cap (((x \cup y)^* *(y, z))^*(y, z)]\} = \{((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)]\} \cap \{((x \cup y)^* (y, z)] \cup (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)]\}$. Unser Halbverband erfüllt die Bedingung (a) (Hilfssatz 14). Aus der Bedingung (a) folgt $(z] = ((x \cup y)^* (y, z)] \cup (((x \cup y)^* *(y,z))^*(y, z)]$ und aus der Bedingung (b) folgt $(z] = ((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^* *(y, z) \cup x)^*(x, z)]$. Also $(x]^+ \cup (x]^{++} = (z]$. Offenbar $(z] \in \bar{P} \cup \bar{Q}$ und das führt zum Widerspruch, weil $(t] \subset (z]$ ist und $(t] \notin \bar{P} \cup \bar{Q}$.

Umgekehrt, setzen wir die Bedingung (c) voraus, d. h. daß für je zwei Primideale P, Q von S, für welche $P \not\subseteq Q$ und $Q \not\subseteq P$, $P \cup Q = S$ gilt. Aus dem Hilfssatz 11 sehen wir, daß auch der Verband $L(S)$ diese Eigenschaft für die Primideale besitzt. Es sei $x, y, z \in S$ und $x \in [y, z]$. Wir zeigen, daß $[y, z]$ einen Stoneschen Halbverband bildet, d. h. daß S die Bedingung (a) erfüllt. Der Voraussetzung nach ist $[y, z]$ ein pseudokomplementärer Halbverband. Betrachten wir das Intervall $\langle (y], (z] \rangle$ in $L(S)$. Selbstverständlich $(x] \in \in \langle (y], (z] \rangle$ und $(x] \cap (x^*(y, z)] = (y]$. Sei $J \in \langle (y], (z] \rangle$ und $(x] \cap J = (y]$. Aus $p \in J$ folgt auch $p \cup y \in J$ und $(x] \cap (p \cup y] = (y]$. Also $p \cup y \leqslant x^*(y, z)$ und $(x^*(y, z)]$ stellt das Pseudokomplement von $(x]$ in $\langle (y], (z] \rangle$ dar. Analogerweise kann man zeigen, daß $((x^*(y, z))^*(y, z)]$ das Pseudokomplement von $(x^*(y, z)]$ in $\langle (y], (z] \rangle$ ist. Es seien M und N zwei verschiedene minimale Primideale von $\langle (y], (z] \rangle$. Man kann zwei solche Primideale P, Q von $L(S)$ finden, daß $P \bigcap \langle (y], (z] \rangle = M, Q \bigcap \langle (y], (z] \rangle = N$ ist (Hilfssatz 13). Offenbar $P \not\subseteq Q$, $Q \not\subseteq P$. Dann folgt aus der Bedingung (c) $P \cup Q = L(S)$. Hieraus folgt $M \cup N = \langle (y], (z] \rangle$. Aus dem Hilfssatz 12 bekommen wir dann, daß $(x^*(y, z))] \cup ((x^*(y, z))^*(y, z)] = (z]$ gilt und daraus folgt $x^*(y, z) \cup (x^*(y, z))^* *(y, z) = z$. Die Bedingung (a) ist bewiesen. Jetzt können wir mit Hilfe der Bedingung (a) die Bedingung (b) beweisen. Nehmen wir die Elemente $x, y, z \in S$, wobei $z \geqslant x \cup y$ ist. Betrachten wir das Intervall $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ im $L(S)$. Im ersten Teil des Beweises haben wir gezeigt, daß $(x]^+ = ((x \cup y)^*(y, z)] \in L(S)$ das Pseudokomplement von $(x]$ und $(x]^{++} = (((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)] \cap \cap (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)] \in L(S)$ das Pseudokomplement von $(x]^+$ im $\langle (x] \cap \cap (y], (z] \rangle$ darstellt. Analogerweise wie oben kann man zeigen, daß für je zwei verschiedene minimale Primideale M, N von $\langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ $M \cup N =$

$= \langle (x] \cap (y], (z] \rangle$ gilt. Daraus folgt $(x]^{+} \cup (x]^{++} = (z]$ (Hilfssatz 12), d. h. $(z] = ((x \cup y)^*(y, z)] \cup \{(((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)] \cap (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)]\}$. Aus der Distributivität des $L(S)$ folgt $(z] = \{((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^* *(y, z) \cup x)^*(x, z)]\} \cap \{((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)]\}$. Aus der Bedingung (a) ergibt sich $((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^*(y, z))^*(y, z)] = (z]$. Daher gilt $((x \cup y)^*(y, z)] \cup (((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z)] = (z]$, weil $(x \cup y)^*(y, z)$, $((x \cup y)^*(y, z) \cup x)^*(x, z) \leqslant z$ ist. Das letzte Ergebnis ist aber mit der Bedingung (b) äquivalent.

Folgerung. ([2, Satz 3]). *Sei L ein distributiver Verband, in welchem jedes Intervall $[a, b]$ ($a, b \in L$, $a \leqslant b$) einen pseudokomplementären Teilverband bildet. L ist ein relativ Stonescher Verband genau dann, wenn für je zwei Primideale P. Q von L, für welche $P \not\subseteq Q$, $Q \not\subseteq P$ gilt, $P \cup Q = L$ ist.*

Beweis. Wir haben schon früher bemerkt, daß in Verbänden die Klassen von schwachen Primidealen und von Primidealen identisch sind. Aus dem Hilfssatz 15 und aus dem Satz 3 bekommen wir unsere Behauptung.

LITERATUR

[1] Birkhoff G., *Lattice Theory*, New York 1948 (Теория структур, Москва 1952).
[2] Grätzer G., Schmidt E. T., *On a problem of M. H. Stone*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *8* (1957), 455—460.
[3] Катриняк Т., *Примечание к структурам Стоуна* II. Mat. časop. *17* (1967), 20—37.
[4] Katriňák T., *Pseudokomplementäre Halbverbände*, Mat. časop. *18* (1968), 121—143.

Eingegangen am 1. 12. 1967.

Katedra algebry a teórie čísel
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského,
Bratislava

ERRATUM

A. Kotzig, ***Correction de mon article „Sur le nombre des 4-cycles dans un tournoi"***, Mat. časop. *18* (1968), 247—254.

(1) à la ligne 2 et 3 il faut enlever le nombre $\frac{1}{6}$ (2) dans le théorème 9 au lieu du mot „tournoi" doit être „ρ-tournoi"; (3) il faut compléter l'article (page 254) par la remarque 3 comme suit: „Des résultats analogiques en ce qui concerne la limite supérieure ont été déjà publiés par Colombo (1963), Beineke et Harary (1965). Je dois remercier M. Moon qui a bien voulu attirer mon attention sur ces faits pendant l'impression de l'article".