Anton Legéň; Tibor Šalát

О некоторых применениях метода категорый в теории пространств последовательностей

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 14 (1964), No. 3, 217--233

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126644

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 14, 3, 1964

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ МЕТОДА КАТЕГОРИЙ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

АНТОН ЛЕГЕНЬ (ANTON LEGÉŇ), Братислава
и ТИБОР ШАЛАТ (TIBOR ŠALÁT), Братислава

Существует несколько работ (смотри [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]), которые посвящены изучению свойств бесконечных рядов при помощи метрических пространств, причем часто употребляется метод категорий. Эта статья, вызваная работой [1], является вкладом в упомянутую проблематику.

1.

Пространство всех последовательностей точек линейного метрического пространства

Пусть (X, ϱ) обозначает линейное метрическое пространство, т. е. X является линейным векторным пространством над полем T всех комплексных (вещественных) чисел, причем метрика $\varrho(\xi, \eta)$ обладает следующими свойствами:

(а) для каждых трех точек $\zeta, \eta, \xi \in X$ выполняется $\varrho(\xi + \eta, \zeta + \eta) = \varrho(\xi, \zeta)$,

(б) если $t_n, t \in T$; $\xi_n, \xi \in X, n = 1, 2, \ldots,$ причем $t_n \to t$ и $\xi_n \to \xi$ (т. е. $\varrho(\xi_n, \xi) \to 0$), то $t_n\xi_n \to t\xi$ (т. е. $\varrho(t_n\xi_n, t\xi) \to 0$) (смотри [8], стр. 41).

Теперь к пространству (X, ϱ) присоединим пространство $s(X)$ всех последовательностей точек из X. Если $x = \{\xi_i\}_1^\infty, y = \{\eta_i\}_1^\infty$, $x, y \in s(X)$ являются точками $s(X)$, определим метрику на $s(X)$ аналогично метрике Фреше следующим образом:

$$\varrho'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho(\xi_i, \eta_i)}{1 + \varrho(\xi_i, \eta_i)}.$$

Сходимость в $(s(X), \varrho')$ означает сходимость „по всем координатам". Если определим сложение двух последовательностей $x, y \in s(X)$ и умножение числом $\lambda \in T$ следующим образом: $x + y = \{\xi_i + \eta_i\}_1^\infty$ и $\lambda x = \{\lambda\xi_i\}_1^\infty$, тогда простым способом можно проверить, что при этом определении $(s(X), \varrho')$ — линейное метрическое пространство.

В этой части работы мы будем изучать два вопроса:

(А) Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ является последовательностью чисел из поля T, содержащей бесконечно $\alpha_i \neq 0$. Встает естественный вопрос обследования свойств множества всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ сходится в пространстве (X, ϱ). Требование, чтобы $\alpha_i \neq 0$, для бесконечно много i, является необходимым для исключения тривиального случая.

(Б) Пусть X — пространство Банаха, A — бесконечная нижняя треугольная матрица. Становится вопрос, какие свойства должны быть у матрицы A чтобы множество всех тех $x \in s(X)$, которые суммируемые матрицей A было множеством первой категории в пространстве $(s(X), \varrho')$.

Следующая теорема отвечает на вопрос (А).

Теорема 1.1. *Пусть (X, ϱ) — линейное метрическое пространство, пусть $(s(X), \varrho')$ имеет прежнее значение. Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ — последовательность чисел из поля T, содержащая бесконечно $\alpha_i \neq 0$. Если обозначим через $s'(X)$ множество всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ сходится в (X, ϱ), то $s'(X)$ является множеством первой категории в $(s(X), \varrho')$.*

Замечание. Если взять во внимание, что полное метрическое пространство является пространством второй категории на самом себе, то получаем следующее следствие:

Следствие. *Пусть (X, ϱ) — полное линейное метрическое пространство, пусть $s(X)$ имеет прежнее значение. Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ — последовательность чисел из поля T, содержащая бесконечно $\alpha_i \neq 0$.*

Утверждение: Множество $s''(X)$ всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ расходится в (X, ϱ), является множеством второй категории в $(s(X), \varrho')$.

Доказательство теоремы 1,1. Для каждого натурального n определим на множестве $s'(X)$ ($s'(X)$ считаем метрическим пространством с метрикой ϱ') функцию $\sigma_n(X)$ следующим образом:

если $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$, тогда $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$. σ_n является отображением $s'(X)$ в X. Покажем, что при фиксированном n σ_n — непрерывное отображение на $s'(X)$. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s'(X)$ и пусть $x^{(l)} \to x^0$ в $s'(X)$ ($x^{(l)} = \{\xi_i^{(l)}\}_1^\infty$, $x^{(l)} \in s'(X)$; $l = 1, 2, 3, \dots$). Потом для всех $k = 1, 2, \dots n$ справедливо: $\xi_k^{(l)} \to \xi_k^0$ и $\alpha_k \xi_k^{(l)} \to \alpha_k \xi_k^0$ (в X), т. е. $\varrho(\alpha_k \xi_k^{(l)}, \alpha_k \xi_k^0) \to 0$, если $l \to \infty$.
Тогда

$$\varrho(\sigma_n(x^{(l)}), \sigma_n(x^0)) = \varrho\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^{(l)}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^0\Big) \leqq \sum_{i=1}^{n} \varrho(\alpha_i \xi_i^{(l)}, \alpha_i \xi_i^0) \to 0.$$

Определим теперь на $s'(X)$ функцию $\sigma(x)$ следующим образом: если $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s'(X)$, то $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$; σ является отображением $s'(X)$ в X и $\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ для всех $x \in s'(X)$. Покажем, что σ является разрывным в каждой точке $x \in s'(X)$. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s'(X)$ и возьмем $\zeta^0 \in X$, $\zeta^0 \neq 0$. Положим $\varepsilon_0 = \varrho(\zeta^0, 0)$. Достаточно показать, что во всякой сферической окресности $\mathscr{S}(x^0, \delta)$ точки x^0 существует $y = \{\eta_i\}_1^\infty \in s'(X)$ такое, что $\varrho(\sigma(x^0), \sigma(y)) = \varepsilon_0$. Ввиду условий теоремы к числу $\delta > 0$ можно найти такое число N, что $\alpha_N \neq 0$ и $2^{-N} < \delta$. Определим теперь последовательность $y = \{\eta_i\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\eta_i = \xi_i^0 \qquad \text{для} \qquad i \neq N \qquad \text{и} \qquad \eta_N = \xi_N + \frac{1}{\alpha_N} \zeta^0 .$$

Для $n > N$ есть $\sigma_n(y) = \sigma_n(x^0) + \zeta^0$ и

$$\varrho(\sigma_n(y), \sigma(x^0) + \zeta^0) = \varrho(\sigma_n(x^0) + \zeta^0, \sigma(x^0) + \zeta^0) \to 0,$$

т. е. $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i$ сходится в X к сумме $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^0 + \zeta^0$. Дальше

$$\varrho'(x^0, y) = \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\varrho(\xi_N^0, \eta_N)}{1 + \varrho(\zeta_N^0, \eta_N)} < \delta, \qquad \text{т. е.} \qquad y \in \mathscr{S}(x^0, \delta).$$

Известно (смотри [9], стр. 185), что если f — отображение метрического пространства P в метрическое пространство Q и если для каждого $x \in P$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, причем $\{f_n\}_1^\infty$ — последовательность непрерывных отображений пространства P в Q, то множество точек разрыва отображения f в P является множеством первой категории в P. Из этого вытекает, что множество всех точек разрыва отображения σ в $s'(X)$ является множеством первой категории в $s'(X)$, следовательно, $s'(X)$ является множеством первой категории в $s'(X)$ и даже первой категории в $(s(X), \varrho')$.

Таким образом доказательство теоремы закончено.

Далее мы докажем теорему, которая отвечает на вопрос (Б).

Теорема 1,2. *Пусть X — пространство Банаха (норма $\|x\| = \varrho(x, o)$) над полем T, пусть $(s(X), \varrho')$ имеет прежнее значение. Далее пусть $A = (a_{nm})$ является бесконечной нижней треугольной матрицей комплексных (вещественных) чисел, удовлетворяющей следующим условиям:*

(а) $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$, $m = 1, 2, \ldots$;

(б) $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_{nm} = \beta$, $\beta \neq 0$.

Обозначим через $s_1(X)$ множество всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$, которые суммируемые матрицей A.

Утверждение: $s_1(X)$ — множество первой категории в $(s(X), \varrho')$.

Доказательство. Определим для каждого $x \in s_1(X)$ и для каждого натурального n отображение σ_n пространства $s_1(X)$ в X следующим образом:

$$\sigma_n(x) = \sum_{m=1}^{n} a_{nm}\xi_m .$$

Покажем, что σ_n является (при фиксировании n) на $s_1(X)$ непрерывным. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s_1(X)$, $x^m = \{\xi_i^m\}_1^\infty \in s_1(X)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x^m = x^0$ в пространстве $(s_1(X), \varrho')$. Пусть $\varepsilon > 0$. Потому что $\xi_i^m \to \xi_i^0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, то существует к числу $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1 + \sum\limits_{m=1}^{n} |a_{nm}|}$ такое число m_0, что для всех $m > m_0$ есть $\| \xi_i^m - \xi_i^0 \| <$ $< \varepsilon'(k = 1, 2, \ldots n)$. Тогда для $m > m_0$ справедливо:

$$\| \sigma_n(x^m) - \sigma_n(x^0) \| = \| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\xi_i^m - \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\xi_i^0 \| = \| \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(\xi_i^m - \xi_i^0) \| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}| \, \| \xi_i^m - \xi_i^0 \| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}| \, . \, \varepsilon' < \varepsilon.$$

Определим $\sigma(x)$ для $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s_1(X)$ следующим образом: $\sigma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$. σ является отображением пространства $s_1(X)$ в X. Покажем, что σ разрывное в каждой точке $x \in s_1(X)$. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s_1(X)$ и пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\delta > 0$. Пусть N такое, что $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \delta$. Определим $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ следующим образом: $\eta_i = \xi_i^0$ для $i \leqq N$ и $\eta_i = \xi_i^0 + \xi_0$ для $i > N$, причем $\xi_0 \in X$ есть такой элемент, что $\| \xi_0 \| = \dfrac{1}{|\beta|}$. Тогда

$$\varrho(x^\circ, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| \xi_n^\circ - \eta_n \|}{1 + \| \xi_n^\circ - \eta_n \|} \leqq \sum_{n=1+N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \delta,$$

следовательно, $y \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$ и

$$\sigma(y) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{m=1}^{n} a_{nm}\eta_m) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\sum_{m=1}^{n} a_{nm}\xi_m^0 + \sum_{m=1}^{n} a_{nm}\xi_0 - \sum_{m=1}^{N} a_{nm}\xi_0] = \sigma(x^\circ) + \beta\xi_0 .$$

Значит, $\| \sigma(y) - \sigma(x^0) \| = \| \beta\xi_0 \| = 1 > \varepsilon$.

Далее будем продолжать аналогично, как и в доказательстве теоремы 1,1.

Следствие. *Пусть X — пространство Банаха над полем T. Пусть $s(X)$ и A имеют прежнее значение.*

Утверждение: Множество $s_2(X)$ всех тех $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s(X)$, которые не суммируемые матрицей A, является множеством второй категории в $(s(X), \varrho')$.

Замечание: Матрицу A называем регулярной тогда, когда из $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} a_{nm}\xi_m = \xi$.

По известной теореме Теплица для регулярности матрицы A необходимо и достаточно одновременное выполнение этих условий:

(а) существует такое L, что $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_{nm}| < L$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} a_{nm} = 1$,

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0$ для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$

Каждая регулярная нижняя треугольная матрица удовлетворяет условиям теоремы 1, 2, и, значит, множество всех последовательностей $x \in s(X)$, суммируемых регулярной матрицей, является множеством первой категории в $(s(X), \varrho')$.

Уже в 1911 году Штейнгауз показал [13], что к каждой регулярной бесконечной матрице существует последовательность чисел 0, 1, которая не суммируема этой матрицей. Теорема 1, 2 и ее следствие, сформулированное в замечании, представляет собой доказательство существования последовательности вещественных чисел, которая не суммируема данной регулярной матрицей и, кроме того, определенный более точный взгляд на систему всех этих последовательностей.

2.

О структуре пространства s

Если в предыдущей части работы за пространство (X, ϱ) возьмем множество всех вещественных чисел с метрикой Эвклида, тогда $s(X)$ тождественно с пространством всех последовательностей вещественных чисел (в этом случае пишем $s(X) = s$) с метрикой Фреше. Сразу же получаем результат, который является непосредственным следствием теоремы 1,1:

Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^{\infty}$ является последовательностью вещественных чисел, причем $\alpha_i \neq 0$ для бесконечно многих i. Потом для всех $x = \{\xi_i\}_1^{\infty} \in s(X)$, за исключением точек множества первой категории (в s), справедливо: ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i\xi_i$ расходится.

В этой части докажем более сильный результат. Докажем, что справедлива теорема:

Теорема 2.1. *Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ — последовательность вещественных чисел, причем $\alpha_i \neq 0$ для бесконечно многих i. Тогда для всех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s$, за исключением точек множества первой категории (в s), справедливо:*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i = -\infty; \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i = +\infty \tag{1}$$

Следствие. *Если возьмем во внимание, что s является полным метрическим пространством, сразу получаем: Множество s'' всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s$, для которых справедливо* (1), *есть множеством второй категории в s.*

Прежде чем приступим к доказательству теоремы 2.1, приведем две леммы, нужные для доказательства.

Лемма 2.1. *Пусть для $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s$ и для натурального n $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i$. Пусть далее:*

$$A = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty],$$

$$A' = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) = -\infty].$$

Утверждение: Множества A, A' являются множествами типа G_δ в s.

Доказательство. При натуральном K обозначим знаком $A(K)$ множество всех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s$ с свойством: К последовательности x существует такое натуральное число $n = n(x)$, что $\sigma_n(x) > K$. Покажем, что $A(K)$ является открытым множеством в s. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in A(K)$. Следовательно, существует $n = n(x^0)$ такое что $\sigma_n(x^0) > K$. Выберем $\varepsilon > 0$ так чтобы $\sigma_n(x^0) - \varepsilon > K$. При $n = n(x^0)$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \frac{1}{2^n}; \qquad \frac{2^n\delta}{1 - 2^n\delta} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < \varepsilon \tag{2}$$

Это вполне возможно. Теперь будем образовать $\mathscr{S}(x^0, \delta)$ (сферическую окрестность точки x^0). Покажем, что $\mathscr{S}(x^0, \delta) \subset A(K)$. Пусть $x \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$. Тогда

$$\varrho(x, x^0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} < \delta,$$

и, таким образом, для каждого $i = 1, 2, \dots n(x^0)$

$$\frac{1}{2^n} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} \leqq \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} < \delta,$$

откуда $|\xi_i - \xi_i^0| < \dfrac{2^n\delta}{1 - 2^n\delta}$ для $i = 1, 2, \ldots n$. Потом согласно (2) мы имеем:

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\xi_i - \xi_i^0) > \sigma_n(x^0) - \frac{2^n\delta}{1 - 2^n\delta} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > \sigma_n(x^0) - \varepsilon > K,$$

т. е. $x \in A(K)$.

Для окончания доказательства достаточно заметить, что $A = \bigcap_{K=1}^{\infty} A(K)$. Итак, A является множеством типа G_δ в s.

Вполне аналогично можно доказать утверждение, что множество A' является множеством типа G_δ в s.

Лемма 2,2. *Множество $A \cap A'$ плотное в s.*

Доказательство. Пусть $x_i^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s$ и пусть $\delta > 0$. Пусть натуральное N такое, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \delta$. Определим $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ следующим образом: $\xi_i = \xi_i^0$ для $i \leqq N$ и $\xi_i = \eta_i$ для $i > N$, где $y = \{\eta_i\}_1^\infty$ — такая последовательность вещественных чисел, для которой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\eta_i$ является колеблющимся между $-\infty$ и $+\infty$. Существование такой последовательности вытекает из условия теоремы 2,1. Легко показать, что $x \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$ и $x \in A \cap A'$.

Доказательство теоремы 2,1. Обозначим

$$s' = \mathcal{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty, \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) = -\infty]$$

и положим $s' = s - s''$. Таким способом получаем $s'' = A \cap A'$, следовательно, s'' является множеством G_δ в s, а s' является множеством типа F_σ в s, значит, $s' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — замкнутые множества в s для всех $i = 1, 2, \ldots$. Потом согласно лемме 2,2 множество $s'' = s - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (s - F_i)$ является плотным в s, значит, и подавно является плотным в s всякое из множеств $s - F_i = s - \overline{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, так что F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ является нигде не плотным в s, следовательно, s является множеством первой категории в s.

Этим доказательство теоремы закончено.

Будем говорить, что бесконечная матрица $A = (a_{nm})$ имеет свойство (B), когда к каждому $n = 1, 2, \ldots$ существует m_n такое, что $a_{nm_n} \neq 0$ и $a_{nm} = 0$ для всех $m > m_n$.

Обозначим при $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ $\tau_n(x) = \sum_{m=1}^{m_n} a_{nm}\xi_m$.

Следующая теорема исходить из теоремы 1,2.

Теорема 2,2. *Пусть A является бесконечной матрицей, обладающей свойством* (B), *причем* $\limsup_{n\to\infty} m_n = +\infty$. *Обозначим знаком*

$$s_2' = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \limsup_{n\to\infty} \tau_n(x) = +\infty,\ \liminf_{n\to\infty} \tau_n(x) = -\infty].$$

Утверждение: Множество s_2' *является множеством второй категории в пространстве* s.

Доказательство. Обозначим

$$A_1 = \mathscr{E}[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \limsup_{n\to\infty} \tau_n(x) = +\infty]$$

$$A_2 = \mathscr{E}[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \liminf_{n\to\infty} \tau_n(x) = -\infty]$$

Покажем, что множества A_1, A_2 являются множествами типа G_δ в s. Для натурального K обозначим

$$A_1(K) = \mathscr{E}[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s;\ \text{существует } n(x) \text{ так, что } \tau_n(x) > K]$$

Видно, что $A_1 = \bigcap_{K=1}^\infty A_1(K)$. Достаточно заметить, что $A_1(K)$ есть в s открыто для каждого $K = 1, 2, \ldots$. Пусть K фиксированное и пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in A_1(K)$. Из условия $x^0 \in A_1(K)$ вытекает существование $n = n(x^0)$ такого, что $\tau_n(x^0) > K$. Выберем $\varepsilon > 0$ так что $\tau_n(x^0) - \varepsilon > K$. Обозначим $M = \max_{i=1,2,\ldots,m_n} |a_{ni}| > 0$. Выберем $\delta' > 0$ так, что $M\delta' m_n < \varepsilon$. Если положим $\delta = \dfrac{\delta'}{2^{m_n}(1+\delta')}$, то при $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$ есть $|\xi_i - \xi_i^0| < \delta'$ $(i = 1, 2, \ldots m_n)$.

Оценим $\tau_n(x)$ снизу:

$$\tau_n(x) = \tau_n(x^0) - (\tau_n(x^0) - \tau_n(x)) \geqq \tau_n(x^0) - |\tau_n(x^0) - \tau_n(x)| \geqq \tau_n(x^0) - Mm_n\delta' > K,$$

значит, $x \in A(K)$, так что $A(K)$ является открытым для всех $K = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, A_1 является множеством типа G_δ в s (подобным способом можно показать, что и A_2 есть типа G_δ в s).

Покажем, что $A_1 \cap A_2$ является плотным в s. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in s$, $\delta > 0$. Выберем N так, чтобы $\sum_{i=N+1}^\infty 2^{-i} < \delta$. Потому что $\limsup_{n\to\infty} m_n = +\infty$, то существует последовательность $N < n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$ такая, что $\lim m_{n_i} = +\infty$. Определим теперь $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ следующим образом: $\xi_i = \xi_i^0$ для $i \neq m_{n_l}$ $(l = 1, 2, \ldots$ и $\xi_{m_{n_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ определим по индукции так: $\xi_{m_{n_1}} = 0$. Для i четного определим $\xi_{m_{n_i}}$ так, чтобы было справедливо следующее $a_{n_i m_{n_i}} \xi_{m_{n_i}} > i - \tau_{n_{i-1}}(x)$, а для i нечетного, $i > 1$, таким образом, чтобы $a_{n_i m_{n_i}} \xi_{m_{n_i}} < -i - \tau_{n_{i-1}}(x)$. Это вполне возможно, и на первый взгляд видно, что $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$ и

$$\liminf_{n\to\infty} \tau_n(x) = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \tau_n(x) = +\infty,$$

следовательно, $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in A_1 \cap A_2$. Дальше доказательство аналогично доказательству теоремы 2,1.

3.

О структуре пространства $l^{(p)}$ $(p > 1)$

$l^{(p)}$ $(p > 1)$ обозначает, как всегда, множество всех последовательностей вещественных чисел $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < +\infty$. Метрика в $l^{(p)}$ определена, как обыкновенно: если $x, y \in l^{(p)}$, $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, $y = \{\eta_i\}_1^\infty$, то $\varrho(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p)^{1/p}$.

В этой метрике $l^{(p)}$ является полным линейным метрическим пространством.

Обозначим дальше знаком p' вещественное число, для которого $1/p + 1/p' = 1$, следовательно, $p' > 1$. Если $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \in l^{(p')}$, то для всех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ сходится. Известно (теорема Ландауа [10], стр. 9), что если $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \notin l^{(p')}$, то существует $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ такое, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ расходится. В связи с этой теоремой и предварительными результатами возникает вопрос исследования структуры (ввиду пространства $l^{(p)}$) множества всех тех $x \in l^{(p)}$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ расходится, причем $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \notin l^{(p')}$. Ответ на этот вопрос дает теорема:

Теорема 3,1. *Пусть $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ является последовательностью вещественных чисел, пусть $a \notin l^{(p')}$.*

Утверждение: Для всех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$, за исключением точек множества первой категории, справедливо:

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = +\infty. \tag{3}$$

Следствие. *Множество всех тех $x \in l^{(p)}$, для которых выполнено* (3), *является множеством второй категории в $l^{(p)}$.*

Следствие. *Если положим $\alpha_i = 1$, $(i = 1, 2, \ldots)$, то получаем такой результат:*

Множество всех тех $x \in l^{(p)}$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$ колеблется между $-\infty$ и $+\infty$, *является множеством второй категории в $l^{(p)}$.* (Аналогичный результат вытекает из теоремы 2,1.)

Доказательство теоремы 3,1. Поскольку доказательство этой теоремы является подобным доказательству теоремы 2,1, проведем его в сокращенном виде. Положим подобно, как и прежде, $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$, если $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$. Обозначим

$$C = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}; \quad \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty],$$

$$C' = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}; \quad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) = -\infty].$$

Легко можем показать, что множества C, C' являются множествами типа G_δ в $l^{(p)}$. Покажем это для C. При K натуральном обозначим знаком $C(K)$ множество всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$, которые имеют свойство: Существует натуральное число $n = n(x)$ такое, что $\sigma_n(x) > K$. Видно, что $C = \bigcap_{K=1}^{\infty} C(K)$. Таким образом, достаточно показать, что $C(K)$ является открытым в $l^{(p)}$. Пусть $x^0 \in C(K)$, $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty$. Существует $n = n(x^0)$ такое, что $\sigma_n(x^0) > K$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\sigma_n(x^0) - \varepsilon > K$. К числу $\varepsilon > 0$ при фиксированном $n = n(x^0)$ найдем положительное δ так, чтобы $\delta \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < \varepsilon$. Пусть теперь $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$. Потом из условия $\varrho(x^0, x) < \delta$ вытекает для всех $i = 1, 2, \ldots n(x^0)$ неравенство $|\xi_i - \xi_i^0| < \delta$. Тогда

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x^0) - (\sigma_n(x^0) - \sigma_n(x)) > \sigma_n(x^0) - \delta \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| > \sigma_n(x^0) - \varepsilon > K,$$

значит, $\mathscr{S}(x^0, \delta) \subset C(K)$ так что $C(K)$ открытое в $l^{(p)}$.

Подобным способом можно показать, что C' является множеством типа G_δ в $l^{(p)}$.

По предположению $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \notin l^{(p')}$, из теоремы Ландау вытекает, что (при подходящем выборе знаков) существует $x' = \{\xi_i'\}_1^\infty \in l^{(p)}$ такое, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i'$ является колеблющимся между $-\infty$ и $+\infty$. Положим $l_2^{(p)} = C \cap C'$. По прежнему $l_2^{(p)}$ есть множеством G_δ в $l^{(p)}$. Покажем, что $l_2^{(p)}$ является плотным в $l^{(p)}$. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in l^{(p)}$, пусть $\delta > 0$. Выберем $x' = \{\xi_i'\}_1^\infty \in l^{(p)}$ так, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i'$ является колеблющимся между $-\infty$ и $+\infty$. Выберем натуральное N так, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i'|^p < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p, \qquad \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^0|^p < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p.$$

Определим теперь $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ следующим образом: $\xi_i = \xi_i'$ для $i > N$ и $\xi_i = \xi_i^0$ для $i = 1, 2, \ldots N$. Очевидно, что $x \in l^{(p)}$, и на основе неравенства Гёльдера получаем:

$$\varrho(x^0, x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^0|^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1+N}^{\infty} |\xi_i^0|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1+N}^{\infty} |\xi_i'|^p\right)^{1/p} < \delta.$$

Итак, $x \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, очевидно, является колеблющимся между $-\infty$ и $+\infty$.

В следующем поступаем так, как в доказательстве теоремы 2,1.

Потому что для каждого $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ справедливо $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, то является естественным вопрос о быстроте сходимости к нулю последовательностей из $l^{(p)}$. На этот вопрос отвечает следующая теорема, в которой показываем, что „большинство" последовательностей $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ сходится к нулю очень медленно.

Теорема 3,2. *Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ является последовательностью положительных вещественных чисел, пусть $\limsup_{n\to\infty} p_n = +\infty$. Тогда для всех $x \in l^{(p)}$, за исключением точек множества первой категории, справедливо:*

$$\liminf_{n\to\infty} p_n \xi_n = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} p_n \xi_n = +\infty. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$A_1 = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}; \quad \limsup_{n\to\infty} p_n \xi_n = +\infty],$$

$$A_2 = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}; \quad \liminf_{n\to\infty} p_n = -\infty].$$

Подобным способом, как и в предшествующей теореме докажем, что A_1 и A_2 являются множествами типа G_δ в $l^{(p)}$. Это утверждение докажем для A_1 (для A_2 доказательство аналогично). Для натурального K положим

$$A_1(K) = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}; \text{ существует } n = n(x) \text{ такое, что } p_n \xi_n > K].$$

Очевидно, что $A_1 = \bigcap_{K=1}^{\infty} A_1(K)$. Поэтому достаточно заметить, что $A_1(K)$ ($K = 1, 2, \ldots$) является открытым множеством.

Пусть K является фиксированным и $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty \in A_1(K)$. Таким образом, существует $n = n(x^0)$ такое, что $p_n \xi_n^0 > K$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\xi_n^0 - \dfrac{\varepsilon}{p_n} > \dfrac{K}{p_n}$. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{p_n}$. Покажем, что $\mathscr{S}(x^0, \delta) \subset A_1(K)$. Пусть $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$, тогда $|\xi_n - \xi_n^0| \leqq \varrho(x, x^0) < \dfrac{\varepsilon}{p_n}$, значит, $\xi_n = \xi_n^0 - (\xi_n^0 - \xi_n) > \dfrac{K}{p_n}$. Отсюда $p_n \xi_n > K$, значит, $x \in A_1(K)$.

Дальше покажем, что $A_1 \cap A_2$ является плотным в $l^{(p)}$. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty$, $x \in l^{(p)}$, $\delta_1 > 0$. Выберем натуральное N так, чтобы $\sum_{n=1+N}^{\infty} |\xi_n^0|^p < \delta_1^p$. Определим $y^0 = \{\eta_i^0\}_1^\infty$ следующим образом: $\eta_i^0 = \xi_i^0$ для $i \leqq N$ и $\eta_i = 0$ для $i > N$. Тогда

$\varrho(x^0, y^0) < \delta_1$. Положим $\delta_2 = \delta_1 - \varrho(x^0, y^0)$, так что $\mathscr{S}(x^0, \delta_1) \supset \mathscr{S}(x^0, \delta_2)$. По предположению теоремы существует возрастающая последовательность натуральных чисел $N < n_1 < n_2 < \ldots < n_l < \ldots$ такая, что $\lim_{l \to \infty} p_{n_l} = +\infty$. Выберем натуральное r так, чтобы $2^{-\frac{r}{p}} < \delta_2$. Выберем $l_1 \geqq 1$ так, чтобы $p_{n_{l_1}} > 2^{\frac{r+1}{p}}$, и если уже были выбраны $l_1 < l_2 < \ldots < l_{j-1}$ так, что $p_{n_{l_i}} < i \cdot 2^{\frac{r+i}{p}}$ $(i = 1, 2, \ldots j-1)$, то выберем $l_j > l_{j-1}$ так, чтобы $p_{n_{l_j}} > j 2^{\frac{r+j}{p}}$. Ввиду того, что $\lim_{l \to \infty} p_{n_l} = +\infty$, является предыдущая конструкция вполне возможной.

Из предыдущих неравенств получаем

$$\left(\frac{j}{p_{n_{l_j}}}\right)^p < \frac{1}{2^{r+j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

Определим теперь $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ следующим образом: $\xi_i = \eta_i^0$ для $i \leqq N$ и $\xi_i = 0$ для $i > N$, $i \neq n_{l_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и, наконец, $\xi_{n_{l_j}} = (-1)^j \frac{j}{p_{n_{l_j}}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Из неравенств (5) вытекает, что $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$. Дальше есть $p_{n_{l_j}} \cdot \xi_{n_{l_j}} = (-1)^j j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, значит, $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in A_1 \cap A_2$ и $\varrho(x, y^0) = (\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{n_{l_j}}|^p)^{1/p} < \delta_2$. Следовательно, $\mathscr{S}(x^0, \delta_1) \cap (A_1 \cap A_2) \neq 0$, а из этого тем же самым способом, как в доказательстве теоремы 2,1, покажем, что $l^{(p)}$-$A_1 \cap A_2$ является множеством первой категории в $l^{(p)}$. $A_1 \cap A_2$ является, однако, множеством всех тех $x = x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$, для которых справедливо (4).

4.

О структуре пространства l

l, как обычно, обозначает множество всех последовательностей вещественных чисел $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$ сходится. Определим в l метрику ϱ, как обычно: если $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$, $y = \{\eta_i\}_1^\infty \in l$, тогда

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|.$$

Если теперь $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ является ограниченной последовательностью вещественных чисел, то, очевидно, для всех $x \in \{\xi_i\}_1^\infty \in l$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ (даже абсолютно) сходится. В случае неограниченной последовательности $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ можно доказать теорему, которая приносит результат, аналогичный предшествующим результатам этой работы.

Теорема 4,1. *Пусть* $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ *является последовательностью вещественных чисел, пусть* $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

Утверждение: Для всех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$, *за исключением точек множества первой категории, справедливо:*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = +\infty \tag{6}$$

Раньше, чем приступим к доказательству теоремы, приведем эту вспомогательную теорему:

Лемма 4,1. *Пусть* $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots p_n \to \infty$, *тогда существует последовательность* $a' = \{\alpha_i'\}_1^\infty \in l, \alpha_i' > 0, i = 1, 2, \ldots,$ *такая, что* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n' p_n = +\infty$.

Доказательство. Положим $\alpha_n' = \dfrac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Потом $\{\alpha_n'\}_1^\infty \in l$ (мы можем сразу убедиться) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n' p_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}}$. Если n является натуральным числом и $k \geqq 1$, то ввиду предположения леммы получаем

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+2}} + \ldots + \frac{p_{n+k} - p_{n+k-1}}{p_{n+k}} \geqq$$

$$\geqq \frac{(p_{n+1} - p_n) + (p_{n+2} - p_{n+1}) + \ldots + (p_{n+k} - p_{n+k-1})}{p_{n+k}} = 1 - \frac{p_n}{p_{n+k}}.$$

Из этого видно, что к каждому натуральному n существует $k \geqq 1$ такое, что

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+2}} + \ldots + \frac{p_{n+k} - p_{n+k-1}}{p_{n+k}} > \frac{1}{2},$$

значит, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n' p_n$ не выполнено условие Коши—Больцано, поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n' p_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} = +\infty$.

Доказательство теоремы 4,1. Обозначим $\sigma_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ для $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$ и положим

$$C = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l;\ \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = +\infty]$$

$$C' = \mathscr{E}\,[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l;\ \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) = -\infty].$$

Для K натурального обозначим знаком $C(K)$ множество всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$, которые имеют свойство: К x существует $n = n(x)$ такое, что $\sigma_n(x) > K$. Покажем, что $C(K)$ является открытым в l. Пусть $x^0 = \{\xi_i^0\}_1^\infty$, $x^0 \in C(K)$. Существует $n = n(x^0)$ такое, что $\sigma_n(x^0) > K$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\sigma_n(x^0) - \varepsilon > K$. К числу $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ такое, чтобы $\delta \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | < \varepsilon$.

Пусть теперь $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in \mathscr{S}(x^0, \delta)$, тогда для всякого $i = 1, 2, \ldots n(x^0)$ получаем $| \xi_i - \xi_i^0 | < \delta$ и, поскольку $\sigma_n(x) = \sigma_n(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\xi_i - \xi_i^0)$, то отсюда в силу выбора чисел ε, δ получим

$$\sigma_n(x) > \sigma_n(x^0) - \delta \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i | > \sigma_n(x^0) - \varepsilon > K,$$

значит, $x \in C(K)$. Очевидно, что $C = \bigcap_{K=1}^{\infty} C(K)$, следовательно, C — множество типа G_δ в l. $C \cap C'$ является множеством всех тех $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$, для которых одновременно справедливы оба равенства в (6).

Теперь покажем, что $C \cap C'$ является плотным в l. Пусть $x' = \{\xi_i'\}_1^\infty \in l$ и пусть $\delta > 0$. По предположению теоремы существует последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots k_n < \ldots$ такая, что $\lim_{n \to \infty} | \alpha_{k_n} | = +\infty$, $| \alpha_{k_n} | > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Если теперь в лемме 4,1 положим $p_n = | \alpha_{k_n} |$ $n = 1, 2, \ldots$, то сразу получим существование такой последовательности $\{\alpha_i'\}_1^\infty$, что $\alpha_{k_n}' > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k_n}' < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k_n}' | \alpha_{k_n} | = +\infty$. Если теперь положим $\beta_m = 0$ для $m \neq k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\beta_m = \alpha_{k_n}'$, если $m = k_n$ для какого-нибудь $n = 1, 2, \ldots$, то очевидно, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta_m | \alpha_m | = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k_n}' | \alpha_{k_n} | = +\infty,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} | \beta_m | < +\infty, \qquad b = \{\beta_m\}_1^\infty \in l.$$

Подходящей переменой знаков у чисел β_m можем построить такую последовательность $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$ ($\xi_m = \beta_m$ или $\xi_m = -\beta_m$ $m = 1, 2, \ldots$), что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \xi_m$ будет колеблющимся между $-\infty$ и $+\infty$. Пусть теперь N является таким натуральным числом, что одновременно справедливо

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} | \xi_m | < \frac{\delta}{2}, \qquad \sum_{m=N+1}^{\infty} | \xi_m' | < \frac{\delta}{2}. \tag{7}$$

Определим теперь последовательность $y = \{\eta_i\}_1^\infty$ следующим образом: $\eta_m = \xi_m$ для $m > N$ и $\eta_m = \xi'_m$ для $m \leqq N$. В силу (7) получаем

$$\varrho(x', y) = \sum_{m=N+1}^{\infty} | \xi'_m - \xi_m | \leqq \sum_{m=N+1}^{\infty} | \xi'_m | + \sum_{m=N+1}^{\infty} | \xi_m | < \delta$$

и, очевидно, $y \in C \cap C'$, значит, $C \cap C'$ является плотным в l.

Дальше поступаем как, как и в доказательстве теоремы 2,1.

Многие из теорем, доказываемых в этой работе, имеют следующие наглядное значение, которое покажем на примере теоремы 3,1: Если $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ является какой-нибудь последователностью вещественных чисел, то или для всех $x \in l^{(p)}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ сходится (этот случай получим тогда, когда $a \in l^{(p')}$), или для „почти всех" этот ряд расходится, причем выражение „почти все" $x \in l^{(p)}$ обозначает, что множество A всех тех $x \in l^{(p)}$, для которых ряд расходится, является множеством второй категории, а $l^{(p)} - A$ множеством первой категории (в $l^{(p)}$). В этом случае доказанная теорема нам в многом напоминает известный закон 0,1 из теории вероятностей и показывает, что здесь не может быть какой-то средний случай, основанный на том, что оба рассматриваемые множества $l_1^{(p)}$, $l_2^{(p)}$ являлись бы множествами второй категории в $l^{(p)}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Agnew R. P., *On rearrangements of series*, Bul. Amer. Soc. *46* (1940), 797—799.

[2] Sengupta H. M., *Rearrangements of series*, Proc. Amer. Mat. Soc. *7* (1956), 347—350.

[3] Sengupta H. M., *On rearrangements series*, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1950), 71—75.

[4] Hill J. D., *Some theorems on subseries*, Bul. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 103—108.

[5] Šalát T., *O istých priestoroch radov s bairovskou metrikou*, Mat.-fyz. čas SAV *7* (1957), 193—206.

[6] Šalát T., *O jednej aplikácii reťazových zlomkov v teórii nekonečných radov*, Čas. pěst. mat. *84* (1959), 317—326.

[7] Šalát T., *Poznámky k Riemanovej vete o divergentných radoch*, Mat.-fyz. čas. SAV *5* (1955), 94—100.

[8] Katětov M., *Přednášky z funkcionální analysy* (skriptum), Praha 1947.

[9] Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958.

[10] Качмаж С., Штейнгауз Г., *Теория ортогональных рядов*, Москва 1958.

[11] Knopp K., *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 1931.

[12] Кук Р., *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей*, Москва 1960.

[13] Steinhaus H., *Kilka slów o uogólnenia pojęcia granicy*, Prace matematiczno-fizyczne *22* (1911), 121—134.

Поступило 26. 1. 1963.

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty
Univerzity Komenského
v Bratislave

ÜBER EINIGE ANWENDUNGEN DER KATEGORIEMETHODE IN DER THEORIE DER RÄUME VON FOLGEN

Anton Legéň und Tibor Šalát

Zusammenfassung

In der Arbeit untersucht man die Struktur einiger bekannter Räume von Folgen ($s, l^{(p)}, l$) mit Anwendung der Kategoriemethode. Die Hauptergebnisse der Arbeit sind die folgenden Sätze.

Satz 1. *Es sei* (X, ϱ) *ein linearer metrischer Raum,* $(s(X), \varrho')$ *bedeute den Raum aller Folgen von Elementen des Raumes* X*, wenn* $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, $y = \{\eta_i\}_1^\infty$, $x, y \in s(X)$*, dann setzen wir*

$$\varrho'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho(\xi_i, \eta_i)}{1 + \varrho(\xi_i, \eta_i)}.$$

$a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ *sei eine Folge von reellen Zahlen, wobei* $\alpha_i \neq 0$ *für unendlich viele* i*. Dann ist die Menge* $s'(X)$ *aller derjenigen* $x = \{\xi_i\}_1^\infty$, $x \in s(X)$*, für die die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *konvergiert (in* X*), eine Menge von erster Kategorie in* $s(X)$*.*

Der folgende Satz knüpft an das klassische Ergebnis von H. Steinhaus [13] über die Limitierbarkeit von Folgen an und vertieft dieses Ergebnis im gewissen Sinne in einen speziellen Fall.

Satz 2. *Es sei* (X, ϱ) *ein Banachscher Raum* [*mit der Norm* $\| x \| = \varrho(x, 0)$], *es habe* $(s(X), \varrho')$ *dieselbe Bedeutung wie im Satz 1. Es sei* $A = (a_{n,m})$ *eine reguläre Matrix,* $a_{n,m} = 0$ *für* $m > n$ $(n = 1, 2, \ldots)$*. Es bedeute* $s_0(X)$ *die Menge aller derjenigen* $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s(X)$*, die mit der Matrix* A *nicht limitierbar sind und wir setzen* $s_1(X) = s(X) - s_0(X)$*. Dann ist* $s_0(X)$ *eine Menge von zweiter Kategorie* [*in* $s(X)$] *und* $s_1(X)$ *ist eine Menge von erster Kategorie* [*in* $s(X)$].

Wenn X die Menge aller reellen Zahlen ist und $\varrho(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$, dann ist $s(X)$ identisch mit dem Raum s aller Folgen von reellen Zahlen mit Fréchetscher Metrik. Das Ergebnis des Satzes 2 kann man in diesem Fall folgendermaßen vertiefen.

Satz 3. $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$ *sei eine Folge von reellen Zahlen, es sei* $\alpha_i \neq 0$ *für unendlich viele* i*. Dann gilt für alle* $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in s$ *bis auf eine Menge von erster Kategorie,*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = +\infty.$$

Im Zusammenhang mit dem bekannten Satz von Landau (siehe [10], S. 9), nach dem zu jedem $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \notin l^{(p')}$, $(1/p + 1/p' = 1)$ wenigstens eine solche Folge $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ existiert, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ divergiert, beweist man das folgende (zum Satz 3) analogische Ergebnis.

Satz 4. *Wenn* $a = \{\alpha_i\}_1^\infty \notin l^{(p')}$ $(1/p + 1/p' = 1)$ *dann ist für alle* $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$*, bis auf eine Menge von erster Kategorie,*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i = +\infty.$$

Für jede Folge $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ $(p > 1)$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0.$$

Der folgende Satz zeigt, daß bei der Mehrheit (im Sinne der Kategorie der Mengen) der Folgen $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$ die Schnelligkeit der Konvergenz von (1) klein ist.

Satz 5. *$\{p_n\}_1^{\infty}$ sei eine Folge von positiven reellen Zahlen, es sei* $\limsup\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$. *Dann gilt für alle $x = \{\xi_i\}_1^{\infty} \in l^{(p)}$ bis auf eine Menge von erster Kategorie,*

$$\liminf_{n\to\infty} p_n\xi_n = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} p_n\xi_n = +\infty.$$

An die Struktur des Raumes l (l ist der Raum aller derjenigen Folgen von reellen Zahlen $x = \{\xi_i\}_1^{\infty}$, für die $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$ ist, die Metrik in l ist durch die Beziehung $\varrho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|$ definiert) knüpft der folgende Satz an.

Satz 6. *a = $\{\alpha_i\}_1^{\infty}$ sei eine Folge von reellen Zahlen, es sei* $\limsup\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$. *Dann gilt für alle $x = \{\xi_i\}_1^{\infty} \in l$, bis auf eine Menge von erster Kategorie,*

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\xi_i = +\infty.$$