Matematický časopis

Èduard Tigranovič Avanesov

Замечания к проблеме В. Мниха

Matematický časopis, Vol. 17 (1967), No. 2, 85--91

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126706`

Matematický časopis 17 (1967), No. 2

ЗАМЕЧАНИЯ К ПРОБЛЕМЕ В. МНИХА

ЭДУАРД ТИГРАНОВИЧ АВАНЕСОВ, Иваново (СССР)

В работах [1] и [2] дан отрицательный ответ на проблему Мниха (см. историю этой проблемы в [3]): существуют ли три рациональных числа α, β, γ таких, что

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \tag{1}$$
$$\alpha\beta\gamma = 1\,? \tag{2}$$

Как установлено в [4] и [5], система уравнений (1)—(2) допускает решения в некоторых квадратичных полях, а система сравнений

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 1(\operatorname{mod} p),$$
$$\alpha\beta\gamma \equiv 1(\operatorname{mod} p),$$

где p — нечетное простое число, разрешима в целых числах при любом $p \neq 3$ (см. и [6]).

И наконец, в статье [7] указаны частные случаи системы

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_s = 1, \tag{3}$$
$$u_1u_2 \ldots u_s = 1, \tag{4}$$

разрешимые в высших алгебраических числовых полях, а также проведено конструктивное исследование соответствующей системы сравнений по простому модулю.(1)

В этой работе мы приведем вначале (§ 1) решение проблемы, сформулированной в [7] в качестве гипотезы (см. [7], теорема 2).

Далее (§ 2) будет предложен новый вариант доказательства неразрешимости системы уравнений (1)—(2) в поле рациональных чисел R. Идея, примененная при этом, аналогична методу, использованному в [1], и опирается на глубокие результаты из арифметики кривых 1 рода. В заключение (§ 3) мы исследуем вопрос о разрешимости системы (1)—(2) в чисто кубических полях.

(1) Заметим, что для всякого $s > 3$ система (3),—(4) имеет бесконечно много решений даже в поле всех рациональных чисел (см. [3]).

§ 1

Как указано в [7], система уравнений (3)—(4) при $s = 3$ допускает следующее решение:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 + \sqrt[3]{26}), \quad u_2 = \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{26}\right],$$

$$u_3 = \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{26}\right],$$

а для $s = 4$ решение системы (3)—(4) получается по формулам:

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)\sqrt[4]{255}\right], \quad u_{3,4} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)\sqrt[4]{255}\right] \text{ и т. д.}$$

Справедлива и общая теорема.

Теорема 1. *Система уравнений* (3)—(4) *разрешима по формулам:*

$$u_k = \frac{1}{s}(1 + \varepsilon_k\sqrt[s]{s^s - 1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, s, \tag{5}$$

где ε_k — различные корни степени s из -1 при четном s и из числа $+1$ при нечетном s.

Доказательство. Очевидно, при любом s сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s = 0$, но тогда непосредственная подстановка (5) в (3) дает:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_s = 1 + \frac{1}{s}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s)\sqrt[s]{s^s - 1} = 1.$$

Для того чтобы доказать, что формулы (5) удовлетворяют и уравнению (4), введем обозначение:

$$\delta_k = 1 + \varepsilon_k\sqrt[s]{s^s - 1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, s;$$

или

$$\delta_k - 1 = \varepsilon_k\sqrt[s]{s^s - 1}. \tag{6}$$

Пусть s — нечетно. Возведя обе части (6) в степень s, найдем:

$$(\delta_k - 1)^s = s^s - 1, \quad \text{или} \quad \delta_k^s + \ldots + s\delta_k - s^s = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Таким образом, δ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ являются корнями уравнения

$$\delta^s + \ldots + s\delta - s^s = 0,$$

а значит,

$$\delta_1\delta_2 \ldots \delta_s = (-1)^s \cdot (-s^s) = s^s.$$

И наконец, подставив (5) в (4), получим:

$$u_1u_2 \ldots u_s = \frac{1}{s^s} \prod_{j=1}^{s} \delta_j = 1,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично рассматривается случай четного s, и теорема 1 доказана.

§ 2

Изложим решение проблемы Мниха в поле R, отличное от доказательств, приведенных в [1] и [2].

Теорема 2. *Система уравнений* (1)—(2) *неразрешима в поле рациональных чисел* R.

Доказательство. Из уравнения (1) имеем: $\gamma = 1 - \alpha - \beta$. Подставив в (2), получим: $\alpha\beta(1 - \alpha - \beta) = 1$, или

$$\beta\alpha^2 + \beta(\beta - 1)\alpha + 1 = 0. \tag{7}$$

Очевидно, для того чтобы при рациональном β уравнение (7) имело рациональное решение относительно α, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант (7) равнялся полному квадрату рационального числа, т. е. $\beta^4 - 2\beta^3 + \beta^2 - 4\beta = T^2$.

Заменив β через $-t$, придем к уравнению

$$t^4 + 2t^3 + t^2 + 4t = T^2. \tag{8}$$

Умножив обе части (8) на $\frac{64}{t^4}$ и обозначив $\frac{8T}{t^2} = \eta'$, $\frac{4}{t} + \frac{1}{3} = \xi'$, а затем $\eta' = \frac{1}{27}\eta$, $\xi' = \frac{1}{9}\xi$, получим нормальную форму Вейерштрасса для кривой 1 рода:

$$\eta^2 = 4\xi^3 + 2484\xi + 39\,096.$$

И наконец, последняя замена $\eta = 2y$, $\xi = x$ приведет к уравнению:

$$y^2 = x^3 + 621x + 9774. \tag{9}$$

Очевидно, положительный ответ на проблему Мниха эквивалентен существованию рациональных решений уравнения (9), не нарушающих промежуточных преобразований от (8) к (9).

Совокупность точек кривой (9) с рациональными координатами образует известную группу Пуанкаре—Морделла—Вейля, в которой роль нулевого элемента группы играет бесконечно удаленная точка кривой. В этой группе обыкновенные точки являются элементами бесконечного порядка, а исключительные точки — элементами конечного порядка.

Пусть λ — действительный корень уравнения

$$\lambda^3 - \lambda - 2 = 0, \tag{10}$$

а φ_1 — действительный корень уравнения

$$\varphi_1^3 + 621\varphi_1 + 9774 = 0. \tag{11}$$

Кубические числа λ и φ_1 порождают одно и то же алгебраическое поле $K(\lambda)$. В самом деле, дискриминант поля $K(\lambda)$ равен $D(\lambda) = -104$, а элемент $\varphi_1 = 9\lambda^2 - 18\lambda - 6$ поля $K(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (11), дискриминант которого составляет $D(\varphi_1) = (2^3 \cdot 3^6)^2 D(\lambda)$. Отсюда ([8], стр. 78—80) и вытекает тождественность полей, порождаемых кубическими числами λ и φ_1.

Поле $K(\lambda)$ имеет (см. [8], стр. 112 и 230) следующие арифметические характеристики:

1. Базис поля составляют числа $1, \lambda, \lambda^2$, т. е. целые числа поля $K(\lambda)$ имеют вид $a + b\lambda + c\lambda^2$, где a, b, c — целые рациональные числа.

2. Число классов идеалов $h = 1$, поэтому в поле $K(\lambda)$ разложение однозначно.

3. Дискриминант поля $D(\lambda) = -104 < 0$, а потому, по известной теореме Дирихле, в поле $K(\lambda)$ имеется одна основная единица, а именно: $\varepsilon = 1 + \lambda + \lambda^2$, норма которой равна $N(\varepsilon) = +1$.

Координаты всякой рациональной точки на кривой (9) могут быть представлены в виде: $x = \dfrac{X}{Z^2}$, $y = \dfrac{Y}{Z^3}$, где X, Y и Z — целые и $(X, Z) = (Y, Z) = 1$. Следуя [1], можно показать, что главный идеал $(X - \varphi_1 Z^2)$ является квадратом идеала, причем представлению $X - \varphi_1 Z^2 = \alpha^2$, где $\alpha \in K(\lambda)$, отвечает удвоенная точка в смысле группы Пуанкаре—Морделла—Вейля.

Отсюда вытекает, что если кривая (9) имеет обыкновенные рациональные точки, то должны существовать целые рациональные X и Z такие, что $(X, Z) = 1$ и $X - \varphi_1 Z^2 = \varepsilon\alpha^2$, где X и Z^2 — числитель и знаменатель абсциссы обыкновенных базисных точек, α — целое число из $K(\lambda)$, ε — указанная выше основная единица, $\varepsilon = 1 + \lambda + \lambda^2$. Тогда

$$(1 + \lambda + \lambda^2)(X + 6Z^2 + 18Z^2\lambda - 9Z^2\lambda^2) = (\varepsilon\alpha)^2 = (a + b\lambda + c\lambda^2)^2,$$

где a, b, c — целые рациональные числа, откуда получим следующую систему 3 уравнений относительно неизвестных a, b, c, X, Z:

$$X + 6Z^2 = b^2 + c^2 + 2ac, \tag{12}$$
$$X + 15Z^2 = 2(c^2 + ab + bc), \tag{13}$$
$$X + 24Z^2 = a^2 + 4bc. \tag{14}$$

Очевидно, если X четно, то в силу взаимной простоты Z нечетно, но тогда уравнение (13) невозможно. Значит, X нечетно, откуда из (13) Z тоже нечетно. В силу (14) a нечетно, из уравнения (12) b и c разной четности, следовательно, из (14)

$$X = a^2 + 4bc - 24Z^2 \equiv a^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8).$$

Пусть теперь b четно, тогда c нечетно. Так как $X + 15Z^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8)$, то из (13) следует: $c^2 + ab + bc = c^2 + b(a + c) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$; но $b(a + c)$ — четно, значит, и c^2 четно, что противоречит допущению.

Остается принять b нечетным, c четным. Тогда ввиду $X + 6Z^2 \equiv 7 (\mathrm{mod}\,8)$ из (12) вытекает, что $b^2 + c^2 + 2ac \equiv 7 (\mathrm{mod}\,8)$, но $b^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\,8)$, значит, $c^2 + 2ac = c(c + 2a) \equiv 6 (\mathrm{mod}\,8)$, что заведомо неверно, так как c и $c + 2a$ одновременно четны.

Таким образом, система (12)—(14) решений в целых числах при условии $(X, Z) = 1$ не имеет, откуда вытекает, что кривая (9) не содержит обыкновенных базисных точек, а следовательно, ее ранг, без учета исключительных точек, равен нулю, и если на этой кривой есть рациональные точки, то они должны быть исключительными. По известной теореме ([9]), если (x_0, y_0) — исключительная точка на кривой (9), то x_0 и y_0 — целые числа и если $y_0 \neq 0$, то y_0^2 — делитель дискриминанта $D(\varphi_1)$.

Непосредственно находим пару $(3, \pm 108)$ единственных исключительных точек кривой (9). Возвращаясь к (8), найдем, что $\dfrac{4}{t} = 0$, и система (1)—(2) не имеет решений в R, что и требовалось доказать.

§ 3

Известно, что проблема Мниха эквивалентна следующей проблеме: существует ли рациональное число r такое, что уравнение

$$u^3 - u^2 + ru - 1 = 0 \tag{15}$$

имеет рациональные корни?

В работе [4] показано, что существует бесконечное число действительных квадратичных полей, в которых при рациональном r уравнение (15) разрешимо. Докажем теорему:

Теорема 3. *Не существует чисто кубических полей, в которых при рациональном r уравнение* (15) *разрешимо.*

Доказательство. С помощью замены $u = \frac{1}{3}(z + 1)$ приведем (15) к неполному виду:

$$z^3 = 3(1 - 3r)z + (29 - 9r). \tag{16}$$

Как известно ([8]), стр. 110), для того чтобы кубическое число z было чисто кубическим, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения (16) равнялся $D(z) = -3d^2$ при рациональном d. Прямое вычисление дает

$$D(z) = -27^2(4r^3 - r^2 - 18r + 31),$$

откуда

$$3(4r^3 - r^2 - 18r + 31) = t^2. \tag{17}$$

Рассматривая различные классы вычетов по mod 3, можно непосредственно убедиться в том, что уравнение (17) не имеет целых решений. Замена $r = \frac{x + 1}{12}$, $12t = y$ преобразует (17) к виду:

$$y^2 = x^3 - 651x + 12742. \tag{18}$$

Таким образом, задача определения чисто кубических полей, в которых при рациональном r уравнение (15) разрешимо, свелась к задаче определения рациональных точек на кривой (18).

Пусть φ_2 — действительный корень уравнения

$$\varphi_2^3 - 651\varphi_2 + 12742 = 0. \tag{19}$$

Так как $\varphi_2 = -3\lambda^2 - 18\lambda + 2$ и дискриминанты (10) и (19) отличаются квадратным множителем $(2^4 \cdot 3^3 \cdot 13)^2$, то кубические поля $K(\lambda)$ и $K(\varphi_2)$ тождественны.

Ради удобства в качестве основной единицы поля $K(\lambda)$ возьмем $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon} = 1 + \lambda - \lambda^2$. Для определения координат обыкновенных базисных точек составим, следуя § 2, систему уравнений относительно a, b, c, X, Z:

$$\begin{cases} -X + 20Z^2 = b^2 + c^2 + 2ac, \\ X - 5Z^2 = 2(c^2 + ab + bc), \\ X - 32Z^2 = a^2 + 4bc. \end{cases} \tag{20}$$

Аналогично показывается, что система (20) не имеет целых решений при условии $(X, Z) = 1$. Следовательно, кривая (18) нулевого ранга, а легко обнаруживаемые на ней точки $(3, \pm 104)$ являются единственными исключительными точками. Возвращаясь к (17) и (16), получим:

$$r = \frac{1}{3}, \quad z = \sqrt[3]{26},$$

откуда числа

$$u_1 = \frac{1}{3}(1 + \sqrt[3]{26}), \quad u_2 = \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{26}\right],$$

$$u_3 = \frac{1}{3}\left[1 + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{26}\right]$$

являются решениями (15), или системы (1)—(2).

Это решение (см. [7]) принадлежит композиту чисто кубического поля $K(\sqrt[3]{26})$ и классического поля Эйзенштейна, образованного кубическим корнем из единицы. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cassels J. W. S., *On a diophantine equation*, Acta arithm. *6* (1960), 47—52.

[2] Cassels J. W. S., Sansone G., *Sur le probleme de M. Werner Mnich*, Acta arithm. *7* (1962), 187—190.

[3] Sierpiński W., *Remarques sur le travail de M. J. W. Cassels „On a diophantine equation"*, Acta arithm. *6* (1961), 469—471.

[4] Sedláček J., *Několik poznámek k problému W. Mnicha*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 97—102.

[5] Malinin V. V., *O jedné úloze z teorie čísel*, Mat. škole *14* (1964), 361—366.

[6] Schwarz Š., *O jednej sústave kongruencií*, Mat.-fyz. časop. *13* (1963), 103—104.

[7] Аванесов Э. Т., *О проблеме В. Мниха*, Mat.-fyz. časop. *15* (1965), 280—284.

[8] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., *Теория иррациональностей третьей степени*, М.—Л. 1940.

[9] Lutz E., *Sur l'equation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques*, J. reine und angew. Math. *177* (1937), 238—247.

Поступило 7. 3. 1966.

Кафедра математики
Ивановского педагогического института,
Иваново, СССР