Oto Obůrka

О парах линейчатых поверхностей

Matematicko-fyzikálny časopis, Vol. 13 (1963), No. 4, 275--302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/126708

MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 4, 1963

О ПАРАХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ОТО ОБУРКА (Oto Obůrka), Брно

1. Введение

При апликациях метода подвижного репера на исследование многообразия часто бывает необходимо считаться с одномерной системой реперов, которая является частью многомерной системы. Хорошим примером этого является напр. § 5 работы [1] Е. Т. Ивлева, где рассматривается система нормальных реперов Картана в точках асимптотической линии поверхности. Эта мысль может получить широкое обобщение, которое прежде всего требует предыдущего составления теории пар линейчатых поверхностей еще более подробно, чем дает приведенная работа Е. Т. Ивлева.

Абзацы 1—7 предложенной работы являются статьей касающейся этого вопроса в этом отношении. В них рассматриваются пары линейчатых поверхностей в P_3 (в линейчатом соответствии), при этом сохранена общность аналитического аппарата, которая позволяет его добавочные канонизации от случая к случаю, смотря по характеру решаемого вопроса, такие, чтобы была сохранена как можно большая симметрия. Это является самой большой разницей примененного метода в сравнении с работой [1] несмотря на решение некоторых специальных вопросов.

Не обращено внимание на случай, когда обе неразвертывающиеся поверхности являются фокальными поверхностями конгруэнции W К. Сегре. Эти конгруэнции кроме К. Сегре также исследовали Террачини, Торторичи, Егоров, Ивлев, у нас Клапка [2] и Горак [3].

В последнем восьмом абзаце данной работы исследуется специальный случай пары линейчатых поверхностей, т. е. случай линейчатой поверхности и из нее выведенной поверхности, которая называется ее тангенциальной поверхностью. Для этой работы, узко связанной с понятиями обобщенный параметр Картана и девелопанта линейчатой поверхности, было необходимо применить математические средства, которые опираются на теорию линейчатых поверхностей в P_3, которую составил Э. Чех. Было объяснено геометрическое значение аналитических условий для обобщенного параметра Картана и объяснена структура расположения касательных плоскостей поверхностей системы обобщенных девелопант.

2. Квазифлекнодальные точки и кривые пары линейчатых поверхностей в $\mathbf{P}_3$

Пусть будут $A_1(v)$, $A_2(v)$ или $A_3(v)$, $A_4(v)$ пары изменяемых точек в пространстве P_3, описывающих при параметре v, изменяющемся в открытом промежутке $v \in I$, кривые C_1, C_2 или C_3, C_4. При этом символ $A_i(v)$ одновременно значит четверку однородных координат $A_i^{(1)}(v)$, $A_i^{(2)}(v)$, $A_i^{(3)}(v)$, $A_i^{(4)}(v)$ (или вектор) точки $A_i(v)$, так что хотя бы одна из этих координат не равнялась нулю для всех $v \in I$. При этом мы предполагаем существование и непрерывность всех, в дальнейшем появляющихся, производных функций $A_i^{(k)}(v)$ во всех точках промежутка I.

Пусть точки четверки $A_i(v)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ не лежат в одной плоскости для всех $v \in I$, так что в этом промежутке детерминант из координат

$$D = [A_1(v), A_2(v), A_3(v), A_4(v)] =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1^{(1)}(v), & A_2^{(1)}(v), & A_3^{(1)}(v), & A_4^{(1)}(v) \\ A_1^{(2)}(v), & A_2^{(2)}(v), & A_3^{(2)}(v), & A_4^{(2)}(v) \\ A_1^{(3)}(v), & A_2^{(3)}(v), & A_3^{(3)}(v), & A_4^{(3)}(v) \\ A_1^{(4)}(v), & A_2^{(4)}(v), & A_3^{(4)}(v), & A_4^{(4)}(v) \end{vmatrix} \tag{1}$$

является функцией параметра v, и он не равен нулю.

Тогда можно точки $A_i(v)$ считать вершинами подвижного репера. Каждую точку X пространства P_3 (постоянную или зависимую от параметра v) можно изобразить в форме линейной комбинации точек $A_i'(v)$, т. е.

$$X = x^1 A_1(v) + x^2 A_2(v) + x^3 A_3(v) + x^4 A_4(v), \tag{2}$$

где x^1, x^2, x^3, x^4 будут так наз. локальные координаты точки X по отношению к реперу A_1, A_2, A_3, A_4.

Специально, производная точка $A_i'(v)$ [т. е. точка с координатами $A_i^{(1)\prime}(v)$, $A_i^{(2)\prime}(v)$, $A_i^{(3)\prime}(v)$, $A_i^{(4)\prime}(v)$] является тоже линейной комбинацией точек

$$\begin{aligned} A_1' &= a_1^1 A_1 + a_1^2 A_2 + a_1^3 A_3 + a_1^4 A_4, \\ A_2' &= a_2^1 A_1 + a_2^2 A_2 + a_2^3 A_3 + a_2^4 A_4, \\ A_3' &= a_3^1 A_1 + a_3^2 A_2 + a_3^3 A_3 + a_3^4 A_4, \\ A_4' &= a_4^1 A_1 + a_4^2 A_2 + a_4^3 A_3 + a_4^4 A_4, \end{aligned} \tag{3}$$

или коротко

$$A_i' = a_i^j A_j. \tag{4}$$

Коэффициенты a_i^j являются локальными координатами точки A_i'. Так как детерминант D в (1) не равен нулю, каждые две точки $A_i(v)$, $A_k(v)$; $(i, k = 1, \ldots, 4, i \neq k)$ различны и их соединительная линия $[A_i, A_k]$ при изменении параметра

v образует линейчатую поверхность R_{ik}, также и оставшиеся две вершины A_l, A_m определяют образующую $[A_l, A_m]$ линейчатой поверхности R_{lm}, скрещивающейся с $[A_i, A_k]$. Одновременно параметром v дано соответствие между шестью прямыми $[A_i, A_k]$. Рассмотрим определитель

$$\omega_{ik} = [A_i, A_k, A_i', A_k']. \tag{5}$$

Существует отношение

$$\begin{aligned}\omega_{ik} &= [A_i, A_k, a_i^l A_l + a_i^m A_m, a_k^l A_l + a_k^m A_m] = \\ &= (a_i^l a_k^m - a_i^m a_k^l) \,.\, [A_i, A_k, A_l, A_m] = \\ &= \varepsilon_{iklm} \,.\, (a_i^l a_k^m - a_i^m a_k^l) \,.\, D,\end{aligned} \tag{6}$$

где ε_{iklm} это знак перестановки $iklm$ чисел 1, 2, 3, 4. Условие $\omega_{ik} \neq 0$, т. е. по отношению к $D \neq 0$

$$a_i^l a_k^m - a_i^m a_k^l \neq 0 \tag{7}$$

показывает, что поверхность R_{ik} неразвертывающаяся.

Специально неравенства

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= (a_1^3 a_2^4 - a_1^4 a_2^3)\, D \neq 0, \\ \omega_{34} &= (a_3^1 a_4^2 - a_3^2 a_4^1)\, D \neq 0\end{aligned} \tag{8}$$

представляют условия необходимые и достаточные для того, чтобы поверхности R_{12} и R_{34} были неразвертывающиеся, что в дальнейшем будем предпологать.

К понятию „*квазифлекнодальная точка*" прямолинейной образующей $[A_1, A_2]$ или сооветствующей прямой $[A_3, A_4]$ поверхности R_{12} или R_{34} приходит Е. Т. Ивлев в работе [1] в сущности так:

Напишем условия для того, чтобы прямая

$$q = [\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4], \tag{9}$$

т. е.

$$q = \lambda_1\lambda_3[A_1, A_3] + \lambda_1\lambda_4[A_1, A_4] + \lambda_2\lambda_3[A_2, A_3] + \lambda_2\lambda_4[A_2, A_4] \tag{10}$$

была инцидентной не только с прямой $[A_1, A_2]$ или $[A_3, A_4]$, но и с прямолинейной образующей с ней смежной на R_{12} или R_{34}.

Если введем обыкновенное сокращение

$$[A_i, A_k] = [ik], \tag{11}$$

то

$$[ik]' = (a_i^i + a_k^k)\,[ik] + a_i^j[jk] + a_k^j[ij] \tag{12}$$

($i \neq k$, по i, k не суммировать!).

Специально

$$
\begin{aligned}
[1\ 2]' &= (a_1^1 + a_2^2)\,[1\ 2] - a_1^3[2\ 3] - a_1^4[2\ 4] + a_2^3[1\ 3] + a_2^4[1\ 4],\\
[3\ 4]' &= (a_3^3 + a_4^4)\,[3\ 4] + a_3^1[1\ 4] + a_3^2[2\ 4] - a_4^1[1\ 3] - a_4^2[2\ 3].
\end{aligned} \tag{13}
$$

Если обозначим $p\,.\,q$ скалярное произведение Плюккера, образованное из координат p_{ik}, q_{ik}, будет прямая q выполнять условия

$$
\begin{aligned}
q\,.\,[1\ 2]' &= 0,\\
q\,.\,[3\ 4]' &= 0,
\end{aligned} \tag{14}
$$

из них получаются уровнения

$$
\begin{aligned}
a_1^4\lambda_1\lambda_3 - a_1^3\lambda_1\lambda_4 + a_2^4\lambda_2\lambda_3 - a_2^3\lambda_2\lambda_4 &= 0,\\
a_3^2\lambda_1\lambda_3 + a_4^2\lambda_1\lambda_4 - a_3^1\lambda_2\lambda_3 - a_4^1\lambda_2\lambda_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Из этих уравнений исключением отношения $\lambda_3 : \lambda_4$ или $\lambda_1 : \lambda_2$ получается

$$
\left.
\begin{aligned}
&(a_1^3a_3^2 + a_1^4a_4^2)\,\lambda_1^2 + (a_2^3a_3^2 + a_2^4a_4^2 - a_1^3a_3^1 - a_1^4a_4^1)\,\lambda_1\lambda_2 -\\
&\qquad - (a_2^3a_3^1 + a_2^4a_4^1)\,\lambda_2^2 = 0\\
&\text{или}\\
&(a_1^4a_3^1 + a_3^2a_2^4)\,\lambda_3^2 + (a_1^4a_4^1 + a_2^4a_4^2 - a_1^3a_3^1 - a_2^3a_3^2)\,\lambda_3\lambda_4 -\\
&\qquad - (a_1^3a_4^1 + a_2^3a_4^2)\,\lambda_4^2 = 0.
\end{aligned}
\right\} \tag{16}
$$

Вообще каждое из квадратных уравнений дает две величины пропорций $\lambda_1 : \lambda_2$ или $\lambda_3 : \lambda_4$ и следовательно пару точек $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2$, $\lambda_3A_3 + \lambda_4A_4$ на $[A_1, A_2]$ или $[A_3, A_4]$. При этом любое из уравнений (15) присоединяет к себе корни уравнений (16) так, чтобы соединяющие прямые (9) соответствующих точек по (16) были искомые поперечники q_1, q_2. Эти соответствующие точки являются *точками квазифлекнодальными*, ими описанные кривые (при переменом $v \in J$) являются квазифлекнодальными кривыми поверхности R_{12} или R_{34}. Прямые q_1, q_2 назовем *квазифлекнодальными касательными* пары поверхностей R_{12}, R_{34} (вообще — в отличие от флекнодальных касательных — они не являются асимптотическими касательными, а также касательными квазифлекнодальных кривых).

Квазифлекнодальные касательные q_1, q_2 не будут определены, если матрица коэффициентов уравнений (15)

$$
\begin{pmatrix}
a_1^4 & -a_1^3 & a_2^4 & -a_2^3\\
a_3^2 & a_4^2 & -a_3^1 & -a_4^1
\end{pmatrix} \tag{17}
$$

имеет ранг 1, т. е., если удовлетворена система уравнений

$$
\begin{aligned}
a_1^4a_4^1 - a_2^3a_3^2 &= 0, & a_1^3a_3^1 - a_4^2a_2^4 &= 0,\\
a_1^3a_3^2 + a_1^4a_4^2 &= 0, & a_2^3a_3^1 + a_2^4a_4^1 &= 0,\\
a_1^3a_4^1 + a_2^3a_4^2 &= 0, & a_1^4a_3^1 + a_2^4a_3^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{18}
$$

что является необходимыми и достаточными условиями, чтобы R_{12}, R_{34} были фокальными поверхностями конгруэнции W К. Сегре. Так как этот случай мы вначале исключили, предположим, что *не все* уравнения системы (18) выполнены.

Для упрощения дальше предположим, что ни одно из обоих уравнений (16) не имеет двухкратного корня. И тогда существуют две разные квазифлекнодальные точки на $[A_1, A_2]$ и на $[A_3, A_4]$ и предположим, что это именно точки A_1, A_2 или A_3, A_4[1] и именно так, что $q_1 = [A_1, A_3]$, $q_2 = [A_2, A_4]$. Тогда действительны последние четыре уравнения системы (18) и неравенства

$$\begin{aligned} a_2^3 a_3^2 + a_2^4 a_4^2 - a_1^3 a_3^1 - a_1^4 a_4^1 &\neq 0, \\ a_1^4 a_4^1 + a_2^4 a_4^2 - a_1^3 a_3^1 - a_2^3 a_3^2 &\neq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Из этих последних четырех уравнений (18) выходит

$$a_1^3 a_3^1 - a_2^4 a_4^2 = a_1^4 a_4^1 - a_2^3 a_3^2 = 0,$$

что однако противоречит неравенствам (19). Из этого вытекает, что эти четыре уравнения (18) обязательно выполнены так что

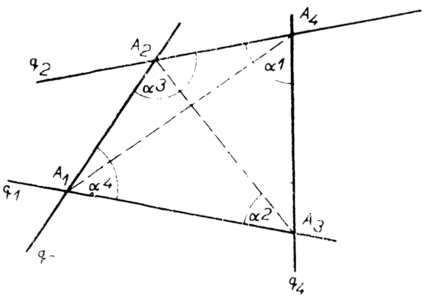
$$a_1^4 = a_2^3 = a_3^2 = a_4^1 = 0 \tag{20}$$

или

$$a_i^k = 0 \quad (\text{для } i, k = 1, 2, 3, 4;\ i + k = 5). \tag{21}$$

В результате уравнений (20) неравенства (19) редуцируются в одно

$$a_1^3 a_3^1 - a_2^4 a_4^2 \neq 0. \tag{22}$$



В системе уравнений (3) проявляется по (20) произведенный выбор вершин подвижного репера таким способом, что элементы второстепенной диагонали

[1] Четырехугольник $A_1 A_2 A_3 A_4$ для краткости называем квазифлекнодальным четырехугольником пары поверхностей R_{12}, R_{34}, или R_{13}, R_{24}.

в квадратной матрице коэффициентов a_i^k правых сторон уравнений (3) равны нулю.

Из этого предположения легко докажем, что *не только* $q_1 = [1\ 3]$, $q_2 = [2\ 4]$ *являются квазифлекнодальными касательными пары поверхностей* R_{12} *и* R_{34}, *но также прямые* $q_3 = [1\ 2]$, $q_4 = [3\ 4]$ *являются квазифлекнодальными касательными пары* R_{13}, R_{24}. Действительно, так как прямые [1 2] и [1 3] пересекаются в A_1, то

$$[1\ 2]\,.\,[1\ 3] = 0,$$

откуда найдем производную и получим

$$[1\ 2]'\,.\,[1\ 3] + [1\ 2]\,.\,[1\ 3]' = 0.$$

Первое из двух слагаемых равно нулю по определению квазифлекнодальной касательной $q = [1\ 3]$. Итак остается отношение $[1\ 3]'\,.\,[1\ 2] = 0$, которое доказывает, что прямая $q_3 = [1\ 2]$ является квазифлекнодальной касательной пары поверхностей R_{13}, R_{24}, чего и требовалось доказать. То же действительно и для прямой $q_4 = [3\ 4]$.

3. Двойственность реперов

Если возьмем как всегда

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= -[A_2, A_3, A_4], \quad \alpha^2 = [A_1, A_3, A_4], \\ \alpha^3 &= -[A_1, A_2, A_4], \quad \alpha^4 = [A_1, A_2, A_3], \end{aligned} \tag{23}$$

то получим дифференцированием этих уравнений по (3)

$$\alpha^{i\prime} = -a_j^i \alpha^j \tag{24}$$

($i = j = 1, 2, 3, 4$, слагается по j учитывая (20)). Также матрица коэффициентов $-a_j^i$ правых сторон уравнений системы (24) состоит из элементов на смежной диагонали равных нулю.

Тетраэдр $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ коротко будем называть *квазифлекнодальным тетраэдром* пары поверхностей R_{12}, R_{34} или R_{13}, R_{24}.

У реперов первоначалного и двойственного можно значение аннулирования элементов диагоналей матрицы коэффициентов легко интерпретировать геометрическим путем. Система уравнений (3), когда действительны уравнения (20), показывает, что касательная $[A_i, A_i']$ квазифлекнодальной кривой C_i пересекает ребро $[j\ k]$ ($j \neq i$, $k \neq i$, $j \neq k$, $i + j \neq 5$, $i + k \neq 5$) в точке

$$B_i = a_i^j A_j + a_i^k A_k \qquad \text{(без суммирования).} \tag{25}$$

Также система (24) показывает (если действительны уравнения (20)), что характеристика стены α_i двойственного репера, т. е. образующая прямая развертывающейся поверхности(²) которую эта стена образует, или же прямая $[\alpha^i, \alpha^{i\prime}]$ находится тоже в плоскости

$$\beta^i = -a^i_j\alpha^j - a^i_k\alpha^k, \tag{26}$$

принадлежащей пучку с осью $[\alpha^j, \alpha^k]$, где для индексов i, j, k действительно то же, что в прошлом случае. Выходит, что

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1' - a^1_1A_1 = a^2_1A_2 + a^3_1A_3,\\
B_2 &= A_2' - a^2_2A_2 = a^1_2A_1 + a^4_2A_4,\\
B_3 &= A_3' - a^3_3A_3 = a^1_3A_1 + a^4_3A_4,\\
B_4 &= A_4' - a^4_4A_4 = a^2_4A_2 + a^3_4A_3,
\end{aligned} \tag{27}$$

и

$$\begin{aligned}
\beta^1 &= \alpha^{1\prime} + a^1_1\alpha^1 = -a^1_2\alpha^2 - a^1_3\alpha^3,\\
\beta^2 &= \alpha^{2\prime} + a^2_2\alpha^2 = -a^2_1\alpha^1 - a^2_4\alpha^4,\\
\beta^3 &= \alpha^{3\prime} + a^3_3\alpha^3 = -a^3_1\alpha^1 - a^3_4\alpha^4,\\
\beta^4 &= \alpha^{4\prime} + a^4_4\alpha^4 = -a^4_2\alpha^2 - a^4_3\alpha^3.
\end{aligned} \tag{28}$$

Наконец заметим, что ребра $[A_1, A_4]$, $[A_2, A_3]$ подвижного репера не являются квазифлекнодальными касательными ни пары поверхностей R_{12}, R_{34} ни пары R_{13}, R_{24}.

Напишем еще символы Грассмана 1. для касательных квазифлекнодальных кривых C_1, C_2, C_3, C_4, описанных вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 и 2. для характеристических прямых квазифлекнодальных развертывающихся поверхностей $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$, которые огибаются стенами $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$.
Тогда действительно

$$\begin{aligned}
[A_1, A_1'] &= [A_1, B_1] = a^2_1[1\ 2] + a^3_1[1\ 3],\\
[A_2, A_2'] &= [A_2, B_2] = -a^1_2[1\ 2] + a^4_2[2\ 4],\\
[A_3, A_3'] &= [A_3, B_3] = -a^1_3[1\ 3] + a^4_3[3\ 4],\\
[A_4, A_4'] &= [A_4, B_4] = -a^2_4[2\ 4] - a^3_4[3\ 4].
\end{aligned} \tag{29}$$

А также, введем ли для краткости символы (см. E. Чех [8], стр. 72, уравнение (1))

$$\begin{aligned}
&[1\ 2]^* = [\alpha_1, \alpha_2] = -[[A_2, A_3, A_4]\,[A_1, A_3, A_4]] = D[3\ 4],\\
&[1\ 3]^* = -D[2\ 4], \qquad [2\ 3]^* = D[1\ 4],\\
&[1\ 4]^* = D[2\ 3], \qquad [2\ 4]^* = -D[1\ 3],\\
&[3\ 4]^* = D[1\ 2],
\end{aligned} \tag{30}$$

можно написать

(²) В дальнейшем развертывающиеся поверхности образованные плоскостями $\alpha^i (i = 1, 2, 3, 4)$ будем называть квазифлекнодальными.

$$
\begin{aligned}
[\alpha^1, \alpha^{1\prime}] &= [\alpha^1, \beta^1] = -a_2^1[1\ 2]^* - a_3^1[1\ 3]^* = D\{-a_2^1[3\ 4] + a_3^1[2\ 4]\},\\
[\alpha^2, \alpha^{2\prime}] &= [\alpha^2, \beta^2] = a_1^2[1\ 2]^* - a_4^2[2\ 4]^* = D\{a_1^2[3\ 4] + a_4^2[1\ 3]\},\\
[\alpha^3, \alpha^{3\prime}] &= [\alpha^3, \beta^3] = a_1^3[1\ 3]^* - a_4^3[3\ 4]^* = D\{-a_1^3[2\ 4] - a_4^3[1\ 2]\},\\
[\alpha^4, \alpha^{4\prime}] &= [\alpha^4, \beta^4] = a_2^4[2\ 4]^* + a_3^4[3\ 4]^* = D\{-a_2^4[1\ 3] + a_3^4[1\ 2]\}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Из (29) и (31) видно, что каждая из прямых пары

$$
[A_1, B_1],\ [\alpha^4, \beta^4];\ [A_2, B_2],\ [\alpha^3, \beta^3];\ [A_3, B_3],\ [\alpha^2, \beta^2];\ [A_4, B_4],\ [\alpha^1, \beta^1]
$$

является линейной комбинацией пары прямых [1 2], [1 3] или [1 2], [2 4] или [1 3], [3 4] или [2 4], [3 4], принадлежащих к линейной конгруэнции Γ с направляющими прямыми [1 4], [2 3], т. е. все эти восемь прямых принадлежат к Γ.

Напишем матрицу M, M^* коэффициентов правых сторон уравнений в системах (29) или (31), во второй после деления на фактор D,

$$
M = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0 \\ -a_2^1 & 0 & a_2^4 & 0 \\ 0 & -a_3^1 & 0 & a_3^4 \\ 0 & 0 & -a_4^2 & -a_4^3 \end{pmatrix}
\tag{32}
$$

$$
M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3^1 & -a_2^1 \\ 0 & a_4^2 & 0 & a_1^2 \\ -a_4^3 & 0 & -a_1^3 & 0 \\ a_3^4 & -a_2^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\tag{33}
$$

Определитель матрицы M имеет величину

$$
\Delta = a_1^3 a_2^1 a_3^4 a_4^2 - a_1^2 a_2^4 a_3^1 a_4^3.
\tag{34}
$$

определитель матрицы M^* имеет величину -1. Из этого вытекает теорема:

Теорема 1. *Четыре касательны $[A_i, A_i']$ к квазифлекнодальным кривым и четыре образующие прямые $[a_i, a_i']$ квазифлекнодальных развертывающихся поверхностей имеют всегда одновременно гиперболоидное положение, тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.*

Заметим, что при этом прямая $[A_1, A_1']$ с прямой $[\alpha^4, \alpha^{4\prime}]$ образуют пару *сопряженных касательных* в точке A_1 на поверхностях R_{12} и R_{13}. А также в точке A_2 или A_3 или A_4 это пара прямых $[A_2, A_2']$, $[\alpha^3, \alpha^{3\prime}]$ или $[A_3, A_3']$, $[\alpha^2, \alpha^{2\prime}]$ или $[A_4, A_4']$, $[\alpha^1, \alpha^{1\prime}]$, а именно на парах поверхностей R_{12}, R_{24} или R_{13}, R_{34} или R_{24}, R_{34}. Это вытекает сразу из обстоятельства, что $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ являются касательными плоскостями пар поверхностей в точках A_4, A_3, A_2, A_1.

4. Изменения аналитического выражения

Предположим, что вершины $A_1(v)$, $A_2(v)$, $A_3(v)$, $A_4(v)$ подвижного репера заменим точками

$$\bar{A}_i = \varrho_i(v)\, A_i, \tag{35}$$

так что вершины репера геометрически остались без изменения. Предположим при этом, что $\varrho_i(v)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ являются функциями параметра v не равняющегося нулю в интервале J и имеющие непрерывные производные всех порядков принятых во внимание. Таким образом

$$\begin{aligned}
\bar{A}'_1 &= \left(a_1^1 + \frac{\varrho'_1}{\varrho_1}\right)\bar{A}_1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\, a_1^2\bar{A}_2 + \frac{\varrho_1}{\varrho_3}\, a_1^3\bar{A}_3 ,\\
\bar{A}'_2 &= \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\, a_2^1\bar{A}_1 + \left(a_2^2 + \frac{\varrho'_2}{\varrho_2}\right)\bar{A}_2 + \frac{\varrho_2}{\varrho_4}\, a_2^4\bar{A}_4 ,\\
\bar{A}'_3 &= \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\, a_3^1\bar{A}_1 + \left(a_3^3 + \frac{\varrho'_3}{\varrho_3}\right)\bar{A}_3 + \frac{\varrho_3}{\varrho_4}\, a_3^4\bar{A}_4 ,\\
\bar{A}'_4 &= \frac{\varrho_4}{\varrho_2}\, a_4^2\bar{A}_2 + \frac{\varrho_4}{\varrho_3}\, a_4^3\bar{A}_3 + \left(a_4^4 + \frac{\varrho'_4}{\varrho_4}\right)\bar{A}_4 .
\end{aligned} \tag{36}$$

Напротив из преобразования параметра

$$v = f(v^*) \tag{37}$$

получаются уравнения

$$A_i(v) = A_i[f(v^*)], \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}v^*} = \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}v}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}v^*} = A'_i\dot{f} = \dot{A}_i, \tag{39}$$

при чем

$$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f(v^*)}{\mathrm{d}v^*} \tag{40}$$

это

$$\begin{aligned}
\dot{A}_1 &= \dot{f}[a_1^1A_1 + a_1^2A_2 + a_1^3A_3],\\
\dot{A}_2 &= \dot{f}[a_2^1A_1 + a_2^2A_2 + a_2^4A_4],\\
\dot{A}_3 &= \dot{f}[a_3^1A_1 + a_3^3A_3 + a_3^4A_4],\\
\dot{A}_4 &= \dot{f}[a_4^2A_2 + a_4^3A_3 + a_4^4A_4],
\end{aligned} \tag{41}$$

т. е. $\dot{A}_i = a_i^{*k}A_k$ (суммируется по k).

Из (36) – (41) вытекают уравнения преобразования для коэффицентов a_i^k

a) при преобразованиях (35)

$$\bar{a}_i^k = \frac{\varrho_i}{\varrho_k} a_i^k + \delta_i^k \frac{\varrho_i'}{\varrho_i} \qquad \text{(без суммирования)}, \tag{42}$$

$$\text{где } \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{когда } i = k, \\ 0 & \text{когда } i \neq k; \end{cases}$$

б) при преобразовании (37) получим

$$a_i^{*k} = \dot{j} a_i^k. \tag{43}$$

Если одновременно изменим факторы однородности по (35) и параметр по (37), выходит

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{A}}_1 &= \dot{f}\left[\left(a_1^1 + \frac{\varrho_1'}{\varrho_1}\right)\bar{A}_1 + a_1^2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\bar{A}_2 + a_1^3 \frac{\varrho_1}{\varrho_3}\bar{A}_3\right], \\
\dot{\bar{A}}_2 &= \dot{f}\left[a_2^1 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\bar{A}_1 + \left(a_2^2 + \frac{\varrho_2'}{\varrho_2}\right)\bar{A}_2 + a_2^4 \frac{\varrho_2}{\varrho_4}\bar{A}_4\right], \\
\dot{\bar{A}}_3 &= \dot{f}\left[a_3^1 \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\bar{A}_1 + \left(a_3^3 + \frac{\varrho_3'}{\varrho_3}\right)\bar{A}_3 + a_3^4 \frac{\varrho_3}{\varrho_4}\bar{A}_4\right], \\
\dot{\bar{A}}_4 &= \dot{f}\left[a_4^2 \frac{\varrho_4}{\varrho_2}\bar{A}_2 + a_4^3 \frac{\varrho_4}{\varrho_3}\bar{A}_3 + \left(a_4^4 + \frac{\varrho_4'}{\varrho_4}\right)\bar{A}_4\right],
\end{aligned} \tag{44}$$

так что

$$\bar{a}_i^{*k} = \dot{f}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho_k} a_i^k + \delta_i^k \frac{\varrho_i'}{\varrho_i}\right) \tag{45}$$

и предыдущую систему можно написать

$$\dot{\bar{A}}_i = \bar{a}_i^{*k}\bar{A}_k. \tag{46}$$

Из (45) видно, что произведение

$$a_i^k \,.\, a_k^i \qquad (i \neq k,\ i + k \neq 5) \tag{47}$$

не изменяется при изменениях фактора, между тем как при изменении параметра (37) выходит по (43)

$$a_i^{*k} \,.\, a_k^{*i} = \dot{f}^2 a_i^k \,.\, a_k^i.$$

Если j, l оставшиеся два индекса, то дробь

$$\frac{a_i^k \,.\, a_k^i}{a_j^l \,.\, a_l^j}. \tag{48}$$

является абсолютным инвариантом образа. Это действительно и для выражений

$$\frac{a_i^k \cdot a_k^j}{a_i^l \cdot a_l^j} \quad (\text{где } l + k = i + j = 5;\ i + k,\ j + k,\ i + l,\ j + l \neq 5). \tag{48a}$$

Мы видим, что I в (34) инвариантна по отношению к изменению фактора (35), при изменении параметра (37) умножается на $\dot{f}^4$.

Легко получается геометрическое значение абсолютного инварианта (48), где $i + k \neq 5,\ j + l \neq 5$:

Касательная плоскость поверхности R_{ij} в точке L прямой $[A_i, A_j]$ пересекает соответственную прямую $[A_k, A_l]$ поверхности R_{kl} в точке M, касательная плоскость которой пересекает прямую $[A_i, A_j]$ в точке N. Итак инвариант (48) сложное отношение проективитета $L \to N$.

Заметим еще, что при преобразовании (35) для двойственного репера выходит по (23)

$$\bar{\alpha}_1 = -[\bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4] = -\varrho_2\varrho_3\varrho_4[A_2, A_3, A_4], \quad \text{т. е.} \quad \bar{\alpha}_1 = \varrho_2\varrho_3\varrho_4\alpha_1.$$

Вообще, если $ikjl$ являются любой перестановкой элементов 1, 2, 3, 4, получится

$$\bar{\alpha}_i = \varrho_k\varrho_j\varrho_l\alpha_i. \tag{49}$$

Изменение параметра (37) оставляет плоскости α_i и их координаты неизмененными.

5. Локальные координаты

Для дальнейшего исследования будет уместно кроме локальных координат x^1, x^2, x^3, x^4 точки X по отношению к реперу A_1, A_2, A_3, A_4 [см. уравнение (2)] ввести локальные координаты $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ плоскости ξ по отношению к реперу $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ уравнением

$$\xi = \xi_1\alpha^1 + \xi_2\alpha^2 + \xi_3\alpha^3 + \xi_4\alpha^4, \tag{50}$$

где ξ_i опять являются функциями параметра $v \in J$.

Точка X или плоскость ξ геометрически неподвижна, если

$$X' = \sigma(v)\,X \tag{51}$$

или

$$\xi' = \tau(v)\,\xi, \tag{52}$$

где σ или τ является любой функцией параметра v с непрерывными производными всех во внимание принятых рядов. Даже координаты точки X или плоскости ξ являются постоянными, если $\sigma(v) = 0$ или $\tau(v) = 0$ действительно идентичны в J.

В таком случае

$$X' = x^{i\prime}A_i + x^iA_i' \tag{53}$$

(суммировать по i для $i = 1, 2, 3, 4$) или

$$\xi' = \xi_i' \alpha^i + \xi_i \alpha^{i\prime}, \tag{54}$$

что ведет по (3), (21), (51) к системе

$$\begin{array}{llllll} x^{1\prime} = & (\sigma - a_1^1)\, x^1 & -a_2^1 x^2 & & -a_3^1 x^3 & . \\ x^{2\prime} = & -a_1^2 x^1 & +\ (\sigma - a_2^2)\, x^2 & & & -a_4^2 x^4, \\ x^{3\prime} = & -a_1^3 x^1 & & +\ (\sigma - a_3^3)\, x^3 & & -a_4^3 x^4, \\ x^{4\prime} = & & -a_2^4 x^2 & & -a_3^4 x^3 & +\ (\sigma - a_4^4)\, x^4. \end{array} \tag{55}$$

или по (24), (21), (51) к системе

$$\begin{array}{llllll} \xi_1' = & (\tau + a_1^1)\, \xi_1 & +a_1^2 \xi_2 & & +a_1^3 \xi_3 & \\ \xi_2' = & a_2^1 \xi_1 & +(\tau + a_2^2)\, \xi & & & +a_2^4 \xi_4, \\ \xi_3' = & a_3^1 \xi_1 & & +(\tau + a_3^3)\, \xi_3 & & +a_3^4 \xi_4, \\ \xi_4' = & & +a_4^2 \xi_2 & & +a_4^3 \xi_3 & +(\tau + a_4^4)\, \xi_4. \end{array} \tag{56}$$

Система (55) или (56) следовательно показывает, что точка X или плоскость ξ является геометрически постоянной и что действительны уравнения (51) или (52). Действительно

$$S\xi x' + Sx\xi' = (\sigma + \tau)\, Sx\xi. \tag{57}$$

6. Пары линейчатых поверхностей, квазифлекнодальный четырехугольник (тетраэдр) которых является полярным по отношению к постоянной поверхности второго порядка

У локальных координат x^i уравнения любой поверхности второго порядка, для которой квазифлекнодальный четырехугольник является полярным, имеет форму

$$B(x) = b_1(x^1)^2 + b_2(x^2)^2 + b_3(x^3)^2 + b_4(x^4)^2 = 0,$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 являются функциями параметра v, которые не все равны нулю. При $b_1 b_2 b_3 b_4 \neq 0$ поверхность второго порядка $B(x)$ регулярна.

Когда $B(x)$ является постоянной поверхностью второго порядка? Это бывает как раз тогда, действительно ли идентично в x^1, x^2, x^3, x^4 уравнение $[B(x)]' = \varphi(v) \,.\, B(x)$. Однако возможно $B(x)$ умножить на такой фактор (который является вообще функцией параметра v), что после этого умножения $\varphi(v) = 0$, т. е.

$$[B(x)]' \equiv 0, \tag{58}$$

т. е. коэффициенты в квадратичной форме $[B(x)]'$ равняются нулю, что в дальнейшем предположим. Тогда будет

$$[B(x)]' = b_1'(x^1)^2 + b_2'(x^2)^2 + b_3'(x^3)^2 + b_4'(x^4)^2 +$$
$$+ 2(b_1 x^1 x^{1\prime} + b_2 x^2 x^{2\prime} + b_3 x^3 x^{3\prime} + b_4 x^4 x^{4\prime}),$$

т. е. по (55) $\sigma = 0$.

$$[B(x)]' = (b_1' - 2a_1^1 b_1)(x^1)^2 + (b_2' - 2a_2^2 b_2)(x^2)^2 + (b_3' - 2a_3^3 b_3)(x^3)^2 +$$
$$+ (b_4' - 2a_4^4 b_4)(x^4)^2 - 2(a_2^1 b_1 + a_1^2 b_2)\, x^1 x^2 - 2(a_3^1 b_1 + a_1^3 b_3)\, x^1 x^3 -$$
$$- 2(a_4^2 b_2 + a_2^4 b_4)\, x^2 x^4 - 2(a_4^3 b_3 + a_3^4 b_4)\, x^3 x^4,$$

так что уравнение (58) действительно в случае регулярной поверхности второго порядка $B(x)$ как раз когда

$$\frac{b_1'}{b_1} = 2a_1^1, \qquad \frac{b_2'}{b_2} = 2a_2^2, \qquad \frac{b_3'}{b_3} = 2a_3^3, \qquad \frac{b_4'}{b_4} = 2a_4^4,$$
$$a_2^1 b_1 + a_1^2 b_2 = a_3^1 b_1 + a_1^3 b_3 = a_4^2 b_2 + a_2^4 b_4 = a_4^3 b_3 + a_3^4 b_4 = 0. \tag{59}$$

Первыми четырьмя уравнениями системы (59) являются b_1, b_2, b_3, b_4 определенные квадратурами только без постоянных факторов. Из дальнейших уравнений системы вытекает

$$\frac{b_2}{b_1} = -\frac{a_2^1}{a_1^2}, \qquad \frac{b_1}{b_3} = -\frac{a_1^3}{a_3^1}, \qquad \frac{b_4}{b_2} = -\frac{a_4^2}{a_2^4}, \qquad \frac{b_3}{b_4} = -\frac{a_3^4}{a_4^3}.$$

Умножением этих уравнений получается $\dfrac{a_1^3 a_2^1 a_3^4 a_4^2}{a_1^2 a_2^4 a_3^1 a_4^3} = 1$ что, однако, по (34) является условием тождественным с уравнением $A = 0$. Отсюда вытекает теорема:

Теорема 2. *Если квазифлекнодальный четырехугольник пары линейчатых поверхностей является полярным по отношению к постоянной регулярной поверхности второго порядка, тогда четверка касательных к квазифлекнодальным кривым пары находится в гиперболоидном положении; это действительно и для четверки образующих прямых квазифлекнодальных развертывающихся поверхностей и тогда* $A = 0$.

Исчисление для тангенциальных координат можно произвести подобным образом. Теорему можно выразить двойственно.

7. О пучке поверхностей второго порядка, базис которого образуют квазифлекнодальные касательные

$$[A_1, A_2],\ [A_2, A_4],\ [A_4, A_3],\ [A_3, A_1]$$

Каждая поверхность второго порядка Q проходящая через прямые

$$[A_1, A_2],\ [A_2, A_4],\ [A_4, A_3],\ [A_3, A_1](^3) \tag{60}$$

имеет в локальных точечных координатах уравнение вида

$$\lambda x^1 x^4 + \mu x^2 x^3 = 0, \tag{61}$$

где $\lambda : \mu$ постоянное отношение. Для $\lambda = 1$, $\mu = 0$ или $\lambda = 0$, $\mu = 1$ получим сингулярную поверхность второго порядка

$$Q^{\mathrm{I}} = x^1 x^4 = 0 \tag{62}$$

или

$$Q^{\mathrm{II}} = x^2 x^3 = 0. \tag{63}$$

Обе сингулярные поверхности второго порядка образованы из плоскостей, первая из плоскостей $x^1 = 0$ и $x^4 = 0$ т. е. плоскостей α^1, α^4, вторая из плоскостей α^2 и α^3. Это значит, что пересекаются плоскости первой пары в ребре A_2, A_3, второй пары в ребре A_1, A_4 подвижного репера. Так как определитель формы (61) равен $(1/2^4)\ \lambda^2\mu^2$, очевидно, что каждую из сингулярных поверхностей второго порядка $Q^{\mathrm{I}}\ Q^{\mathrm{II}}$ пучка необходимо считать двумя сливающимися сингулярными поверхностями второго порядка.

Поверхности второго порядка $Q^{\mathrm{I}}, Q^{\mathrm{II}}$ очевидно имеют инвариантное значение (от фактора и от параметра независимое). Определим дальнейшие такие поверхности второго порядка принадлежащие к пучку следующим образом:

Все остальные поверхности второго порядка принадлежащие пучку (60) регулярные, и в точке $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ имеют общие касательные плоскости данные обеими прямыми (60), которые через нее проходят. Для того, чтобы корреляции между пучком касательных плоскостей и рядом точек касания образующей прямой поверхности (напр. R_{12} и поверхности второго порядка пучка) были тождественны, необходимо и достаточно, когда обе поверхности имеют общую касательную плоскость в следующей точке M прямой $[A_1, A_2]$, отличающейся от A_1 и A_2. Поэтому необходимо определить эту поверхность второго порядка величиной отношения $\lambda : \mu$ в ее уравнении (61).

Касательная плоскость поверхности R_{12} в ее точке $M = y^1 A_1 + y^2 A_2$ дана точками A_1, A_2 и напр. точкой

$$M' = (y^1 A_1 + y^2 A_2)' = y^1 A_1' + y^2 A_2' = y^1 a_1^3 A_3 + y^2 a_2^4 A_4 \quad (\text{мод. } A_1, A_2)$$

т. е. это плоскость данная уравнением

$$y^2 a_2^4 x^3 - y^1 a_1^3 x^4 = 0.$$

(3) Будем говорить, что $[A_1, A_2]$, $[A_4, A_3]$ это противолежащие образующие прямые, также и $[A_2, A_4]$, $[A_1, A_3]$. Наоборот $[A_1, A_2]$, $[A_3, A_1]$ или $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_4]$ или $[A_4, A_3]$, $[A_3, A_1]$ или $[A_2, A_4]$, $[A_4, A_3]$ это пары „смежных" образующих прямых. Одинаково называем пары поверхностей, образованные этими прямыми.

С другой стороны в полярном соответствии по отношению к поверхности второго порядка (61) к точке M с локальными координатами $(y^1, y^2, 0, 0)$ принадлежит полярная плоскость, т. е. касательная плоскость с уравнением $\mu y^2 x^3 + \lambda y^1 x^4 = 0$. Обе плоскости тождественны только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} y^2 a_2^4, & -y^1 a_1^3 \\ \mu z^2, & \lambda y^1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $a_2^4 \lambda + a_1^3 \mu = 0$, т. ч. можно написать

$$\lambda : \mu = a_1^3 : -a_2^4. \tag{64}$$

Отсюда вытекает:

Теорема 3. *В пучке поверхностей второго порядка* (61) *существует единственная поверхность второго порядка* Q_{12}, *касающаяся поверхности* R_{12} *вдоль* $[A_1 A_2]$. *Она характеризуется отношением* (64) *и ее уравнение в точечных локальных координатах будет*

$$Q_{12} \equiv a_1^3 x^1 x^4 - a_2^4 x^2 x^3 = 0. \tag{65}$$

Также уравнения поверхностей второго порядка Q_{34} *или* Q_{13} *или* Q_{24} *касающихся поверхностей* R_{34} *или* R_{13} *или* R_{24} *следующие*

$$\begin{aligned} Q_{34} &\equiv a_4^2 x^1 x^4 - a_3^1 x^2 x^3 = 0, \\ Q_{13} &\equiv a_1^2 x^1 x^4 - a_3^4 x^2 x^3 = 0, \\ Q_{24} &\equiv a_4^3 x^1 x^4 - a_2^1 x^2 x^3 = 0. \end{aligned}$$

Каждую из приведенных поверхностей второго порядка Q_{ik} *назовем касательной поверхностью второго порядка поверхности* R_{ik}.

Из уравнений (62), (63) и (65) вытекает теорема:

Теорема 4. *Пара касательных поверхностей второго порядка* (65) *образует с парой* Q^{I} Q^{II} *сложные отношения, показанные на схеме:*

$$\begin{array}{lll} Q_{12}, Q_{34} & \text{сложное отношение} & \dfrac{a_1^3 a_3^1}{a_2^4 a_4^2}, \\[2ex] Q_{12}, Q_{13} & \text{сложное отношение} & \dfrac{a_1^3 a_3^4}{a_1^2 a_2^4}, \\[2ex] Q_{12}, Q_{24} & \text{сложное отношение} & \dfrac{a_1^3 a_2^1}{a_2^4 a_4^3}, \\[2ex] Q_{34}, Q_{13} & \text{сложное отношение} & \dfrac{a_4^2 a_3^4}{a_1^2 a_3^1}, \end{array} \tag{66}$$

Q_{34}, Q_{24}	сложное отношение	$\dfrac{a_4^2 a_2^1}{a_3^1 a_4^3}$,
Q_{13}, Q_{24}	сложное отношение	$\dfrac{a_1^2 a_2^1}{a_3^4 a_4^3}$.

Четвертой теоремой определено геометрическое значение инвариантов (48) и (48a).

Теорема 5. *Если касательные поверхности второго порядка двух противолежащих поверхностей тождественны, тогда эти поверхности будут фокальными поверхностями конгруэнции W К. Сегре.*

Действительно, если напр. $Q_{12} = Q_{34}$, по (66_1) $\dfrac{a_1^3 a_3^1}{a_2^4 a_4^2} = 1$, т. е. $a_1^3 a_3^1 - a_2^4 a_4^2 = 0$, что по отношению к (20) является одним оставшимся из необходимых и достаточных условий (18) для конгруэнции W К. Сегре с фокальными поверхностями R_{12}, R_{34}. Также $Q_{13} = Q_{24}$ по (66_6) получается как раз тогда, когда $a_1^2 a_2^1 - a_3^4 a_4^3 = 0$; тогда R_{13} и R_{24} являются фокальными поверхностями конгруэнции W К. Сегре.

Сложное отношение четверки поверхностей второго порядка Q_{12}, Q_{34}, Q_{13}, Q_{24} получается в виде

$$\kappa = \frac{(a_1^3 a_3^4 - a_1^2 a_2^4)(a_2^1 a_4^2 - a_1^3 a_4^3)}{(a_4^2 a_3^4 - a_1^2 a_3^1)(a_2^1 a_1^3 - a_2^4 a_4^3)}. \tag{67}$$

У каждой из касательных поверхностей второго порядка (65) поверхностей R_{ik} существует ее *сопряженная* поверхность второго порядка, т. е. поверхность второго порядка, которая вместе с рассматриваемой гармонически отделяет пару Q^{I} Q^{II} (в дальнейшем будем ее называть просто сопряженной поверхностью второго порядка той же поверхности). К отдельным поверхностям второго порядка (65) сопряженными поверхностями второго порядка являются:

$$\begin{aligned}
&\text{к } Q_{12}: && S_{12} \equiv a_1^3 x^1 x^4 + a_2^4 x^2 x^3 = 0 \\
&\text{к } Q_{34}: && S_{34} \equiv a_4^2 x^1 x^4 + a_3^1 x^2 x^3 = 0 \\
&\text{к } Q_{13}: && S_{13} \equiv a_1^2 x^1 x^4 + a_3^4 x^2 x^3 = 0 \\
&\text{к } Q_{24}: && S_{24} \equiv a_4^3 x^1 x^4 + a_2^1 x^2 x^3 = 0.
\end{aligned} \tag{68}$$

Очевидно, что сложное отношение поверхностей второго порядка пары S_{ij}, S_{kl} из схемы (68) или пары поверхностей второго порядка Q_{ij}, Q_{kl} из схемы (65) с парой Q^{I} Q^{II} одинаково. Легко можно проверить следующую теорему.

Теорема 6. *Если в какой-либо из уравнений (66_{2-5}) величина приведенного сложного отношения -1, тогда соответствующая пара касательных поверх-*

ностей второго порядка гармонически отделяет пару сингулярных поверхностей второго порядка и квазифлекнодальная кривая на обеих поверхностях соответствующей пары является асимптотической.

Поставим себе следующий вопрос, когда касательная поверхность второго порядка одной из линейчатых поверхностей

$$R_{12},\ R_{13},\ R_{34},\ R_{24} \tag{69}$$

будет тождественна с поверхностью второго порядка, сопряженной с касательной поверхностью второго порядка противолежащей поверхности. Напр. когда

$$Q_{12} = S_{34}.$$

Тогда уравнения

$$Q_{12} \equiv a_1^3 x^1 x^4 - a_2^4 x^2 x^3 = 0$$
$$S_{34} \equiv a_4^2 x^1 x^4 + a_3^1 x^2 x^3 = 0$$

отличаются только фактором, т. е. инвариант (см. [48])

$$\frac{a_1^3 a_3^1}{a_2^4 a_4^2} \tag{70}$$

равен величине -1. Однако очевидно, что условие тождества поверхностей второго порядка

$$S_{12} \equiv a_1^3 x^1 x^4 + a_2^4 x^2 x^3 = 0 \quad \text{и} \quad Q_{34} \equiv a_4^2 x^1 x^4 - a_3^1 x^2 x^3 = 0$$

опять получается, что величина инварианта (70) равна -1. Из этого вытекает:

Теорема 7. *Если отождествляется касательная поверхность второго порядка одной из поверхностей (64) с сопряженной поверхностью второго порядка противолежащей поверхности, тогда и сопряженная поверхность второго порядка первоначальной поверхности и касательная поверхность второго порядка противолежащей поверхности отождествляются. Тогда мы скажем, что обе противолежащие поверхности являются сопряженными. Условием, чтобы получился такой случай для плоскости R_{12} или R_{34}, является*

$$\frac{a_1^3 a_3^1}{a_2^4 a_4^2} = -1.$$

Одинаково для поверхности R_{13} или R_{24} будет

$$\frac{a_1^2 a_2^1}{a_3^4 a_4^3} = -1. \tag{71}$$

8. О параметре Картана, системе девелопант и о тангенциальной поверхности

Предпошлем несколько кратких выдержек из приводимых работ О. Майера [9], М. Барнера [5] и др.

Пусть неразвертывающаяся линейчатая поверхность R_{yz} дана направляющими линиями C_y и C_z и их точечным соответствием, так что образующие поверхности являются соединительными линиями пар соответствующих точек обеих линий.

Аналитически можно поверхность R_{yz} определить приведенным способом напр. так, что даны две четверки функций

$$y_{(v)}^{(1)},\ y_{(v)}^{(2)},\ y_{(v)}^{(3)},\ y_{(v)}^{(4)};\qquad z_{(v)}^{(1)},\ z_{(v)}^{(2)},\ z_{(v)}^{(3)},\ z_{(v)}^{(4)} \tag{72}$$

с непрерывными производными всех порядков, которые в дальнейшем встретятся, а именно для всех величин параметра v определенного промежутка J.

Каждую из обеих четверок считаем упорядоченной четверкой однородных координат точки $y_{(v)}$ или $z_{(v)}$ проективного пространства P_3, которая при переменном v образует направляющую кривую C_y или C_z (в соответствии данным параметром v), а так как мы предполагаем, что соединительными линиями точек $y_{(v)}$, $z_{(v)}$ полученная поверхность R_{yz} неразвертывающаяся, то определитель

$$(y, z, y', z') = \begin{vmatrix} y_{(v)}^{(1)} & z_{(v)}^{(1)} & y_{(v)}^{(1)\prime} & z_{(v)}^{(1)\prime} \\ y_{(v)}^{(2)} & z_{(v)}^{(2)} & y_{(v)}^{(2)\prime} & z_{(v)}^{(2)\prime} \\ y_{(v)}^{(3)} & z_{(v)}^{(3)} & y_{(v)}^{(3)\prime} & z_{(v)}^{(3)\prime} \\ y_{(v)}^{(4)} & z_{(v)}^{(4)} & y_{(v)}^{(4)\prime} & z_{(v)}^{(4)\prime} \end{vmatrix} = \omega, \tag{73}$$

не равен нулю для каждой величины $v \in J$.

Если в теорию Чеха (см. [10], глава IV) внесем по О. Майеру

$$a_1 = a' + A,\qquad b_1 = b' + B,\qquad c_1 = c' + C. \tag{74}$$

тогда, как известно, четыре пары $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ координат (72) — где $i = 1, 2, 3, 4$ — являются парами соответствующих независимых решений системы уравнений (см. [9], ур. (2))

$$\left.\begin{aligned} y'' &= (M + b\Theta' - b_1)\,y + (a_1 - a\Theta')\,z + (\Theta' - 2b)\,y' + 2az', \\ z'' &= (c\Theta' - c_1)\,y + (M - b\Theta' + b_1)\,z - 2cy' + (\Theta' + 2b)\,z', \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

где было положено

$$M = ac - b^2 - j. \tag{76}$$

Одновременно с направляющими кривыми C_y, C_z на поверхности R_{yz} дана (координатная) система Риккати Σ_{xy} линий, которую описывают точки k_1y+ $+ k_2z$, где k_1 и k_2 постоянные. Вообще эти системы кривых (системы Риккати, Doppelverhältnissysteme) даны дифференциальным уравнением Риккати; из свойств его общего решения вытекает, что любые четыре линии системы пересекают образующие поверхности в четверках точек постоянного сложного отношения. Например асимптотические линии линейчатой поверхности R_{yz} образуют систему Риккати, дифференциальное уравнение которой будет

$$t_1t_2' - t_2t_1' + f(t) = 0 \tag{77}$$

где

$$f(t) = at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2,$$

т. е. точка $t_1y + t_2z$ описывает асимптотическую линию, когда t_1, t_2 отвечают уравнению (77). Наоборот раньше приведенная система Σ_{xy} имеет простое уравнение $t_1t_2' - t_2t_1' = 0$ и пригодным выбором фактора однородности можно достичь, чтобы $t_1 = k_1$, $t_2 = k_2$, где k_1, k_2 постоянные, что в дальнейшем будем все время предполагать. Скажем, что поверхность R_{yz} *относится к системе* Σ_{yz}, что значит, что линии этой системы образуют семейство координатных кривых $k_1 : k_2 = k = \text{const.}$, если выходим из параметрического изображения поверхности уравнением

$$x(v, k) = k_1y(v) + k_2z(v).$$

Уравнение $f(t) = 0$, т. е. $at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2 = 0$ определяет своими корнями две так наз. фундаментальные точки системы Σ_{xy} на образующей линии $[x, y]$ поверхности. Ими описанные линии являются фундаментальными линиями системы (Майер).

Касательная к линии $C_{k_1y+k_2z}$ в точке

$$x = k_1y + k_2z \tag{78}$$

является прямой

$$r_1(v) = [x, x'] = [k_1y + k_2z, k_1y' + k_2z']. \tag{79}$$

Это прямая *первой* системы (демиквадрики) $R_1(v)$ на касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$, которую t образует при постоянном v и переменном $k_1 : k_2$.

$T^2(v)$ является *касательной поверхностью второго порядка* системы Σ_{xy} вдоль образующей линии $[y(v), z(v)]$ поверхности R_{xy}. Эта образующая принадлежит ко *второй* демиквадрике $R_2(v)$ поверхности второго порядка $T^2(v)$, остальные линии которой можно получить соединением точек $y + \lambda y'$, $z + \lambda z'$, при переменном λ и постоянном v, т. е. это будет прямая

$$r_2(v) = [y + \lambda y', z + \lambda z']. \tag{80}$$

Если введем локальные координаты x_1, x_2, x_3, x_4 точки X по отношению к базису y, z, y', z' считая

$$X = x_1 y + x_2 z + x_3 y' + x_4 z', \tag{81}$$

тогда уравнение касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$ у локальных координат будет

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0. \tag{82}$$

Поверхность второго порядка $T^2(v)$ является конечно одной из поверхностей второго порядка всей системы (зависимой от параметра v) касательных поверхностей второго порядка. У каждой из них характеристика распадается в прямую $[y, z]$ (образующую поверхности R_{yz}) и кубическую кривую $C^3(v)$, которая конечно может и дальше распадаться, а именно, в дальнейшую прямую и кривую второго порядка (тогда система Риккати называется *квадратической*) или в три прямые (*аксиальная* система). Уравнения кривой третьего порядка $C^3(v)$ выражены

$$x_1 = a_1 + 2b_1 u + c_1 u^2, \qquad x_2 = u(a_1 + 2b_1 u + c_1 u^2)$$
$$x_3 = 2(a + 2bu + cu^2), \qquad x_4 = 2u(a + 2bu + cu^2)$$

или коротко

$$x_1 = f_1(u), \qquad x_2 = uf_1(u), \qquad x_3 = 2f(u), \qquad x_4 = 2uf(u), \tag{83}$$

где u параметр этой точки кривой третьего порядка, которая лежит на касательной $r_1(v)$, т. е. на прямой первой демиквадрики поверхности второго порядка $T^2(v)$, проходящей через точку $y(v) + uz(v)$.

Из (83) вытекает, что система Σ_{xy} является *квадратической*, когда

$$\begin{aligned}(ac_1 - a_1 c)^2 + 4(ab_1 - a_1 b)(cb_1 - c_1 b) &= \\ = (2bb_1 - ac_1 - a_1 c)^2 - 4(ac - b^2)(a_1 c_1 - b_1^2) &= 0,\end{aligned} \tag{84}$$

и *аксиальной*, когда

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 . \tag{85}$$

Прямые второй демиквадрики на касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$ пересекают ее кривую третьего порядка $C^3(v)$ в парах точек. Действительно прямая $r_2(v)$ (см. ур. [80]) дана точками с локальными координатами $1, 0, \lambda, 0$ или $0, 1, 0, \lambda$, так что для ее пересечений с $C^3(v)$ по (83) матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ f_1(u) & uf_1(u) & 2f(u) & 2uf(u) \end{pmatrix} \tag{86}$$

имеет ранг 2, что дает единственное условие

$$2f(u) - \lambda f_1(u) = 0. \tag{87}$$

Если проектируем пары точек кривой третьего порядка $C^3(v)$ прямыми *первой* демиквадрики в прямую $[y, z]$, получим пары точек $y + uz$, где u корни уравнения (87), т. е. при переменном λ эти пары образуют квадратическую точечную инволюцию на $[y, z]$, двойные точки которой даны корнями якобиана $J(f, f_1)$ форм f, f_1, т. е. уравнением

$$J(f, f_1) = \begin{vmatrix} b + cu, & a + bu \\ b_1 + c_1 u, & a_1 + b_1 u \end{vmatrix} = 0. \tag{88}$$

М. Барнер называет эти точки *зеркальными точками* (Spiegelpunkte) а ими проходящие прямые первой демиквадрики поверхности второго порядка $T^2(v)$ *зеркальными прямыми* (Spiegelgeraden) системы Σ_{xy} в прямой $[y(v), z(v)]$.

Зеркальные прямые пересекают кривую третьего порядка $C^3(v)$ в точках, где прямые второй демиквадрики ее касаются. Эти точки не были до сих пор нигде названы, так назовем их для краткости *„гармоникальными точками"* системы Σ''_{yz}, принадлежащими образующей $[y(v), z(v)]$ поверхности R_{yz}. По причине, которая скоро станет ясной, назовем соединительную линию гармоникальных точек *„тангенциальной прямой"* системы Σ_{yz}, принадлежащей образующей прямой $[y, z]$.

После этого объяснения некоторых известных результатов можем перейти к собственному изучению, которое относится к обобщению понятия параметра Картана и девелопанты линейчатой поверхности по Барнеру. Это обобщение состоит в том, что определяются параметр и девелопанта принадлежащая системе Риккати линий поверхности R_{yz} так, что их дефиниции содержат случай Картана, который кажется специальным случаем, а именно так, что исследуемая система линий Риккати является системой асимптотических линий поверхности R_{yz}.

Тем не менее определение обобщенного параметра Картана для общей системы Риккати (без ущерба для общности можем предполагать, что это система Σ_{yz}) является чисто аналитической. Параметр r по ней является обобщенным параметром Картана системы Σ_{xy} как раз тогда, когда в системе (75) есть (см. Вала [7], уравнение $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$, $\beta_{11} + \beta_{22} = 0$, стр. 225)

$$\Theta' = 0 \tag{89}$$

и

$$M = 0. \tag{90}$$

Если эти два условия выполнены, система (75) получает более простую форму

$$\begin{aligned} y'' &= -b_1 y + a_1 z - 2by' + 2az', \\ z'' &= -c_1 y + b_1 z - 2cy' + 2bz'. \end{aligned} \tag{91}$$

Как известно, можно параметр Картана (и обобщенный) применить для определения сложного отношения четверки прямых неразвертывающейся линейчатой поверхности, относящейся к координатной системе Риккати Σ_{xy}. Если v_1, v_2, v_3, v_4 являются величинами этого параметра для прямых четверки, то сложное отношение $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ будет ее проективным инвариантом и можно его назвать сложным отношением четверки этих прямых.

Если параметр общий, то точка y'' или z'' в (75) не будет иметь геометрического значения, за исключением того, что она будет точкой соприкасающейся плоскости кривой C_y или C_z в ее точке $y(v)$ или $z(v)$. Если параметр будет обобщенным параметром Картана, то точки y'', z'' получают вполне определенное геометрическое значение, которое помогает и геометрическому объяснению, как самого обобщенного параметра Картана, так и обобщенной системы девелопант. Первое значение объясняет теорема:

Теорема 8. *Прямая $[y'', z'']$ соединяющая точки y'', z'' приведенные в* (75) *является поперечником пары зеркальных прямых как раз тогда, когда параметр v является обобщенным параметром Картана неквадратической системы Риккати линий Σ_{yz} линейчатой поверхности R_{yz}.*

Доказательство: По (75) локальные координаты точки будут

$$\begin{aligned} y'' &\ldots M + b\Theta' - b_1, \quad a_1 - a\Theta', \quad \Theta' - 2b, \quad 2a, \\ z'' &\ldots c\Theta' - c_1, \quad M - b\Theta' + b_1, \quad -2c, \quad \Theta' + 2b, \end{aligned} \tag{92}$$

так что соединительная линия $[y'', z'']$ этих точек является поперечником пары зеркальных прямых как раз тогда, когда уравнение для $k_1 : k_2$

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 & k_2 \\ M + b\Theta' - b_1 & a_1 - a\Theta' & \Theta' - 2b & 2a \\ c\Theta' - c_1 & M - b\Theta' + b_1 & -2c & \Theta' + 2b \end{vmatrix} = 0, \tag{93}$$

или же когда уравнение

$$(k_1 y + k_2 z, \quad k_1 y' + k_2 z', \quad y'', \quad z'') = 0 \tag{94}$$

имеет вид якобиана

$$J(f, f_1) = 0. \tag{95}$$

Действительно, если это так, тогда прямая $[y'', z'']$ будет инцидентной с обеими зеркальными прямыми $[k_1 y + k_2 z, k_1 y' + k_2 z']$, где $k_1 : k_2$ будут корнями уравнения (95).

Однако сразу видно, что уравнение (93) после разложения определителя на левой стороне принимает вид

$$(2M + \Theta'^2) f - \Theta' f_1 - 2J(f, f_1) = 0. \tag{96}$$

Однако формы f, f_1, $J(f, f_1)$ будут линейно независимыми квадратичными формамы поскольку обе зеркальные точки разные, т.к. определитель из их коэффициентов является выражением (84), т. е. определитель якобиана $J(f, f_1)$. Иначе говоря, эти три квадратичные формы будут линейно независимыми как раз тогда, когда Σ_{yz} *не является квадратической* системой Риккати, как предполагается в теореме 8.

Для того, чтобы в уравнении (96) были те же корни как и в (95), необходимо

$$\Theta' = 0, \qquad M = 0,$$

что именно является условиями (89) и (90) для того, чтобы параметр v был обобщенным параметром Картана, что и требовалось доказать. Теорему 8 пополняет:

Теорема 9. *Если v является обобщенным параметром Картана поверхности R_{yz}, относящейся к неквадратической системе Риккати Σ_{yz}, то прямая $[y''(v), z''(v)]$ является тангенциальной прямой принадлежащей к образующей линии $[y(v), z(v)]$ поверхности R_{yz}.*

Доказательство: Иначе говоря, нам надо доказать, что если наш параметр v является обобщенным параметром Картана, то прямая $[y'', z'']$ пересекает касательную квадрику $T^2(v)$ как раз в гармоникальных точках.

С этой целью мы рассматриваем прямую r_2 (см. ур. [80]) второй демиквадрики $R_2(v)$ касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$ и напишем уравнение для λ, соответствующей прямой r_2 инцидентной с $[y'', z'']$. В таком случае обязательно будет

$$(y + \lambda y', \quad z + \lambda z', \quad y'', \quad z'') = 0, \tag{97}$$

т. е. в локальных координатах по (91) (т. к. условия (89) и (90) считаем выполненными!)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ -b_1 & a_1 & -2b & 2a \\ -c_1 & b_1 & -2c & 2b \end{vmatrix} = 0. \tag{98}$$

После разложения определителя получается уравнение

$$4(ac - b^2) + 2(2bb_1 - a_1c - ac_1)\lambda + (a_1c_1 - b_1^2)\lambda^2 = 0, \tag{99}$$

которым определены две прямые $r_2^{(1)}, r_2^{(2)}$ демиквадрики $R_2(v)$, инцидентной с $[y'', z'']$. Напишем по (83)

$$\lambda = \frac{2f(u)}{f_1(u)}, \tag{100}$$

чтобы определить величины u принадлежащие тем прямым первой системы, которые проходят через точки пересечения прямых $r_2^{(1)}$ и $r_2^{(2)}$ с кривой $C^3(v)$. Получится уравнение

$$(ac - b^2)f_1^2(u) + (2bb_1 - a_1c - ac_1)ff_1 + (a_1c_1 - b_1^2)f^2 = 0, \tag{101}$$

которое после короткого исчисления получается тождественным с уравнением

$$[J(f, f_1)]^2 = 0, \tag{102}$$

чем и доказана теорема 9.

Для дальнейшей работы удобно выразить следующие определения: *Тангенциальная точка относящаяся к точке $x = k_1y + k_2z$ прямой $[y(v), z(v)]$* (или к прямой первой демиквадрики проходящей через нее) *линейчатой поверхности R_{yz}, относящейся к системе Риккати Σ_{yz}, является точкой пересечения соприкасающейся плоскости кривой C_x в ее точке x с тангенциальной прямой принадлежащей прямой $[y(v), z(v)]$ поверхности R_{yz}. Тангенциальная поверхность той же линейчатой поверхности является системой тангенциальных прямых, принадлежащих образующим прямым поверхности.*

Затем припомним (см. Вала [7], стр. 225, ур. [5]), что — если v является обобщенным параметром Картана (как дальше и будем предполагать) поверхности R_{yz}, относящиеся к системе Риккати Σ_{yz} — прямая $[Y(v), Z(v)]$ демиквадрики $R_2(v)$, определенная точками

$$\begin{aligned} Y(v) &= y(v) + (\mu - v)\, y'(v), \\ Z(v) &= z(v) + (\mu - v)\, z'(v), \end{aligned} \tag{103}$$

где $\mu =$ конст., при переменном v описывает обобщенную μ-девелопанту Картана поверхности R_{yz}. Обозначим ее R_{YZ}^{μ}, и μ назовем *показателем* девелопанты. Для разных величин показателя μ получим разные девелопанты, которые образуют систему $R(\Sigma_{yz})$.

Девелопанты, это линейчатые поверхности, в определенном смысле аналогичные эвольвентам плоской кривой. Касательным кривой отвечают касательные демиквадрики $R_2(v)$ на касательных поверхностях второго порядка $T^2(v)$ поверхности вдоль ее прямых $[y(v), z(v)]$. Уравнениями (103) в каждой демиквадрике $R_2(v)$ дана прямая и система этих прямых является девелопантой R_{YZ}^{μ}. Перпендикулярности эвольвент к касательным кривой соответствует следующее характерное свойство девелопант:

У прямой $[Y(v), Z(v)]$, которая является общей прямой касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$ (ее демиквадрики $R_2(v)$) и девелопанты R_{YZ}^{μ}, произведение корреляций Чалеса обеих поверхностей является *инволюторной проективностью.*

Для объяснения разделения касательных плоскостей девелопант всей системы $R(\Sigma_{yz})$ существует важная теорема:

Теорема 10. *Касательные плоскости девелопант R^{μ}_{YZ} с разными показателями μ в точках прямой $r_1 = [k_1 y + k_2 z, k_1 y' + k_2 z']$, которая не является зеркальной (k_1, k_2 постоянные) и принадлежит первой демиквадрике $R_1(v)$ касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$, огибают коническую поверхность Γ^2 второго класса с вершиной V в тангенциальной точке, принадлежащей прямой $r_1(v)$. Коническая поверхность Γ^2 образована системой плоскостей, через которые из V проектируются прямые демиквадрики $R_2(v)$ поверхности второго порядка $T^2(v)$.*

(Для зеркальной прямой r_1 является вершина V ее гармоникальной точкой, т. е. точкой касательной поверхности второго порядка $T^2(v)$. Конус Γ^2 распадается.)

Доказательство: Касательная плоскость девелопанты R^{μ}_{YZ} (направляющие кривые которой образованы точками (103) при переменном v) в точке

$$X = k_1 Y + k_2 Z = k_1 y + k_2 z + (\mu - v)(k_1 y' + k_2 z') \tag{104}$$

определена точками Y, Z и точкой $X' = (k_1 Y + k_2 Z)'$, т. е. по (104) точкой

$$X' = k_1 y' + k_2 z' - (k_1 y' + k_2 z') + (\mu - v)(k_1 y'' + k_2 z''),$$

или точкой $X' = (\mu - v)(k_1 y'' + k_2 z'')$, т. е. при $v \neq \mu$ точкой

$$V = k_1 y'' + k_2 z'', \tag{105}$$

которая не зависит от μ и явно является точкой пересечения соприкасающейся плоскости кривой $C_{k_1 y + k_2 z}$ с прямой $[y'', z'']$. Это и есть тангенциальная точка, принадлежащая прямой r_1 демиквадрики $R_1(v)$, что и требовалось доказать. (Теоремой 10 можно обосновать выбор названия тангенциальная точка, тангенциальная прямая и поверхность.) Будет действительна теорема:

Теорема 11. *Тангенциальные прямые принадлежащие образующим прямым поверхности R_{yz}, относящиеся к неквадратической системе Риккати Σ_{yz}*

будут $\left\{\begin{array}{l}\text{\textit{с ними инцидентны}}\\ \text{\textit{с ними тождественны}}\\ \text{\textit{неопределимы}}\end{array}\right\}$ *как раз когда*

$\left|\begin{array}{l}\text{\textit{обе фундаментальные кривые системы } } \Sigma_{yz} \text{ \textit{отождествляются,}}\\ \Sigma_{yz} \text{ \textit{является системой асимтотических кривых и флекнодальные линии различны,}}\\ \Sigma_{yz} \text{ \textit{является системой асимптотических линий и флекнодальные линии отождествляютсь.}}\end{array}\right.$

Доказательство: При предположении, что наш параметр является обобщенным параметром Картана, условие инцидентности прямых $[y, z]$ и $[y'', z'']$ будет $[y, z, y'', z''] = 0$, т. е. в локальных координатах по (91) действительно

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_1 & a_1 & -2b & 2a \\ -c_1 & b_1 & -2c & 2b \end{vmatrix} = 0, \tag{106}$$

т. е.

$$ac - b^2 = 0, \tag{107}$$

чем доказана первая часть теоремы 11.

Чтобы прямые $[y, z]$ и $[y'', z'']$ отождествились, необходимо, чтобы y'' и z'' были двумя линейно независимыми линейными комбинациями точек y, z, так что в (91) обязательно будет

$$a = b = c = 0 \tag{108}$$

и

$$\begin{vmatrix} -b_1 & a_1 \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_1 c_1 - b_1^2 \neq 0. \tag{109}$$

Неравенство (109) по (108), (74) идентично с

$$AC - B^2 \neq 0, \tag{110}$$

чем доказана вторая часть теоремы 11.

Если при удовлетворенных уравнениях (108)

$$AC - B^2 = 0 \tag{111}$$

точка y'' будет кратным точки z'', чем тоже и доказана третья часть теоремы.

Теорема 12. *Тангенциальная поверхность R''''_{yz} линейчатой поверхности R_{yz}, данной системой уравнений* (91), *развертывающаяся как раз тогда, когда определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & 2b & 2a \\ c_1 & b_1 & 2c & 2b \\ b'_1 & a'_1 & b_1 + 2b' & a_1 + 2a' \\ c'_1 & b'_1 & c_1 + 2c' & b_1 + 2b' \end{vmatrix} \tag{112}$$

равен нулю.

Доказательство: Необходимым и достаточным условием развертываемости поверхности $R_{y''z''}$ является, как известно, $[y'', z'', y''', z'''] = 0$, где

$$y''' = (2bb_1 - 2ac_1 - b'_1)\,y + (2ab_1 - 2a_1 b + a'_1)\,z -$$
$$- [4(ac - b^2) + 2b' + b_1]\,y' + (a_1 + 2a')\,z'.$$

$$z''' = (2cb_1 - 2c_1b - c_1')\,y + (2bb_1 - 2a_1c + b_1')\,z -$$
$$- (c_1 + 2c')\,y' - [4(ac - b^2) - 2b' - b_1]\,z'.$$

В локальных координатах можно написать $A\,.\,[y, z, y', z'] = \omega A = 0$, где $\omega \neq 0$. Этим теорема доказана.

И наконец скажем, что результаты найденные в абзаце 8, дают импульс к исследованию специальных пар поверхностей, т. е. линейчатой поверхности и к ней принадлежащей обобщенной девелопанты или поверхности тангенциальной и др. А также вопрос существования таких специальных пар поверхностей в конгруэнциях прямых или в комплексах и другие применения побуждают к дальнейшему исследованию.

В заключение я выражаю благодарность проф. докт. Ю. Клапке, который на семинаре дифференциальной геометрии в г. Брно обратил мое внимание на эту проблематику, а также за ценные его советы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Е. Т., *О паре линейчатых поверхностей в трехмерном проективном пространстве*, Геометрический сборник 2, Труды Томского гос. университета, Серия мех.-матем., Томск, 161 (1962), 3–12.

[2] Klapka J., *O W kongruencích s fokálními plochami přímkovými*, Spisy přírodověd. fak. Brno, č. 69, 1926, Brno, 29 stran a další práce.

[3] Horák Vl., *Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projekt. Raumes und ihre Applikation auf Segresche W Kongruenzen etc.*, Чех. мат. журнал, *9* (*84*) (1959), 590–628.

[4] Horák Vl., *Projektive Deformation der Segreschen W – Kongruenzen etc.*, Чех. мат. журнал, *10* (*85*) (1960), 551–595.

[5] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Mathem. Zeitschrift, *62* (1955), 50–93.

[6] Cartan E., *Sur les développantes d'une surface reglée*, Bull. Acad. roumaine, *14* (1931), 167–174; смотри тоже Oevres complètes III-2, 1187–1194.

[7] Vala J., *O Cartanově parametru na přímkových plochách*, Sborník VUT 1959/3–4, Brno, 225–230.

[8] Čech E., *Projektivní diferenciální geometrie*, 1926 Praha.

[9] Mayer O., *Étude sur les surfaces réglées*, Buletinul Façultatii de ştiinţe din Cernăuti, II (1928), 1–33.

[10] Fubini G., Čech E., *Geometria proiettiva differenziale*, Tomo I, Bologna, Zanichelli 1926.

Поступило 10. III. 1963 г.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
Strojní fakulty Vysokého učení technického
Brno

SUR LES COUPLES DES SURFACES RÉGLÉES

Oto Obůrka

Résumé

Dans le travail [1] E. T. Ivlev s'occupait des couples des surfaces réglées gauches avec les généra-trices en correspondence biunivoque. Dans le travail cité on se sert de méthode des formes extérieures de Cartan, quoique cela ne soit pas nécessaire, parce qu'il s'agit des systèmes monoparamètriques. Le repère canonique d'Ivlev est caractérisé d'une part par la position de ses quatre sommets dans les points dots quasiflecnodals de couple des surfaces, d'autre part par le choix de ses facteurs d'homogénéité et par le choix du paramètre de manière que certains coefficients des composantes de la variation infinitésimale du repère soyent annulés ou pesés égaux à une constante différente de zéro. Mais par ce dernier choix la symmétrie des formules est dérangée.

Dans le travail présent, nous avons, par conséquent, abandoné l'utilisation de la symbolique de Cartan. Quoique les sommets du repère coordonaire soient choisi aussi dans les points quasiflecnodals, on ne normalise pas le facteur et le paramètre et au lieux de cela on écrit directement les formules exprimant l'influence de la variation de ces paramètres secondaires.

Ce procédé a permis de démontrer l'invariance des expressions les plus simples et après, en utilisant les quadriques tangentes Q_{ik} et quadriques conjuguées S_{ik}, de donner leur interprétation géometrique et de trouver quelques théorèmes.

Le dernier (huitième) paragraphe est consacré a l'étude des couples des surfaces réglées du type special, c'est-à-dire celles constituées par la surface et sa développante de Cartan généralisée, éventuellement sa surface tangentielle. La généralisation du paramètre de Cartan, donnée par M. Barner, admet une interprétation géometrique simple et intuitive trouvé dans ce travail. En même temps nous avons énoncé les théorèmes principaux sur la distribution des plans tangentiels du système des développantes généralisées. Le huitième paragraphe réprésente donc un approfondissment des fondaments de la théorie des systèmes de courbes de Riccati. On peut s'attendre d'en pouvoir tirer encore d'autre conséquences.