Matematický časopis 18 (1968), No. 4

# DIE GERADE UND DAS GESCHWINDIGKEITSFELD DES AFFINEN RAUMES $A_n$.

MILAN HEJNÝ, Bratislava

Der Anlass zu dieser Arbeit wurde durch den Artikel [1] gegeben. Bewegt sich in dem affinen $n$-dimensionalen Raum $\mathsf{A}_n$ ein Körper $\mathsf{T}$, so ordnen wir im festgesetzten Augenblick $t_0$ des Zeitintervalls jedem Punkt $X \in \mathsf{A}_n$ den Geschwindigkeitsvektor $v_X$ zu. Das Vektorfeld $\mathfrak{B}$: $X \to v_X$, das man auf diese Weise erhält, ist durch die Gleichung (2) beschrieben.

Jede Gerade $\mathsf{Q}$ erzeugt bei Vermittlung des $\mathfrak{B}$ eine Punktmenge $\mathfrak{B}\mathsf{Q}$, die aus allen Geraden $(X, v_X)$, $X \in \mathsf{Q}$, $v_X \neq o$ und allen Punkten $X$, $X \in \mathsf{Q}$, $v_X = o$ besteht. Es gibt acht verschiedeme Arten von Punktmenge $\mathfrak{B}\mathsf{Q}$, die in der analytischen und auch in der geometrischen Darstellung im Folgenden aufgeführt werden.

**1. Grundbegriffe.** Betrachten wir im affinen reellen Raum $\mathsf{A}_n$ $(n \geq 2)$ einen sich bewegenden Körper $\mathsf{T}$, der im affinen Koordinatensystem

$$0, a_1, \dots, a_n$$

dargestellt ist. Die Bewegung des $\mathsf{T}$ wird dann durch $n + 1$ Vektorfunktionen

$$0 = 0(t), \quad a_i = a_i(t), \quad i = 1, \dots, n,$$

die wir als reell und stetig differenzierbar voraussetzen, gegeben.

Jeder in Bezug auf $\mathsf{T}$ feste Punkt $X$, läßt sich durch

$$X(t) = 0(t) + \xi^1 a_1(t) + \dots + \xi^n a_n(t) \tag{1}$$

oder kürzer durch

$$X(t) = 0(t) + x(t)$$

beschreiben. Durch das Differenzieren von (1) finden wir den Geschwindigkeitsvektor

$$v_X(t) = \dot{X}(t) = \dot{0}(t) + \xi^1 \dot{a}_1(t) + \dots + \xi^n \dot{a}_n(t)$$

des Punktes $X$ zur zeit $t$. Setzen wir für den Augenblick $t = t_0$

$$v_X = v_X(t^0)\,,\ v = \dot{O}(t_0)\,,\ x = x(t_0)\,,\ a_i = a_i(t_0) \text{ und } \dot{a}_i(t_0) = \mathbf{\Omega}\, a_i\,,$$

so nimmt die letzte Gleichung die Gestalt

$$v_X = v + \mathbf{\Omega} x \tag{2}$$

an. Hierbei wird der Endomorfismus $\mathbf{\Omega}$ des Vektorraumes $\{a_1, \ldots, a_n\}$ durch die Beziehungen $\dot{a}_i(t_0) = \mathbf{\Omega} a_i$, $i = 1, \ldots, n$ eindeutig bestimmt. Das Vektorfeld (2) werden wir affines (stationäres) Geschwindigkeitsfeld nennen, und durch $\mathfrak{V}(v, \mathbf{\Omega})$, oder kürzer $\mathfrak{V}$ bezeichnen. Den linearen Vektorraum aller in der Gestalt $x = \mathbf{\Omega} y$ ausdrückbaren Vektoren $x$ werden wir durch $\mathsf{R}$, und den linearen Vektorraum aller Lösungen der Gleichung $\mathbf{\Omega} x = o$ durch $\mathsf{N}$ bezeichnen.

Es ist klar, daß für einen anderen beliebigen Punkt

$$Y = X + w$$

die Gleichung

$$v_Y = v_X + \mathbf{\Omega} w \tag{3}$$

gilt. Nun beweisen wir einen wichtigen

**Hilfssatz.** *Die nächsten vier Bedingungen sind äquivalent:*

*a) es gibt ein Punkt $Z$ so, daß $v_Z = o$ ist;*

*b) durch die Parallelverschiebung des Anfangspunktes* 0 *kann man die Gleichung* (2) *in die Gestalt $v_X = \mathbf{\Omega} x$ bringen;*

*c) jedem Punkt $Y$ kann man einen solchen Vektor $z$ zuordnen, dass $v_Y = \mathbf{\Omega} z$ gilt;*

*d) es ist $v \in \mathsf{R}$.*

Beweisschema. *a*) $\Rightarrow$ *b*) $\Rightarrow$ *c*) $\Rightarrow$ *d*) $\Rightarrow$ *a*). Gibt es den Punkt $Z$ mit $v_Z = o$ so, können wir, in Bezug auf (3), durch die Parallelverschiebung $0 \to Z$ des Anfangspunktes 0 die Gleichung (2) in die Gestalt

$$v_X = \mathbf{\Omega} x \tag{4}$$

transformieren. Die Beziehungen *b*) $\Rightarrow$ *c*) $\Rightarrow$ *d*) gelten unmittelbar. Setzt man schließlich $v \in \mathsf{R}$, also auch $v = \mathbf{\Omega} u$ voraus, dann gilt für $Z = 0 - u$, mit Rücksicht auf (3) auch $v_Z = o$.

**2. Erweiterung und Hülle der Punktmenge $\mathfrak{M}$.** Es sei $\mathfrak{M} \subset \mathrm{A}_n$ eine beliebige nichtleere Punktmenge und $\mathfrak{V}$ das Vektorfeld im $\mathsf{A}_n$. Die Menge aller Punkte $Y$, die sich in der Form $Y = X + \lambda v_X$ schreiben läßt, wo $X \in \mathfrak{M}$ und $\lambda$ eine reelle Zahl ist, werden wir *Erweiterung der Menge* $\mathfrak{M}$ (*bezüglich* $\mathfrak{V}$) nennen, und durch $\mathfrak{V}\mathfrak{M}$ bezeichnen. Den kleinsten affinen Unterraum von $\mathrm{A}_n$, in dem die Erweiterung $\mathfrak{V}\mathfrak{M}$ der $\mathfrak{M}$ enthalten ist, werden wir *Oberhülle der*

*Punktmenge* $\mathfrak{M}$, und ihre Dimension die *Oberdimension des* $\mathfrak{M}$ (*bezüglich auf* $\mathfrak{V}$) nennen. Im folgenden untersuchen wir nur den Fall, wo $\mathfrak{M}$ eine Gerade ist.

Nimmt man also eine Gerade

$$\mathsf{Q} \equiv X = A + \lambda q, \quad q \neq o \tag{5}$$

mit $\lambda$ als reellem Parameter, so gilt nach (3)

$$v_X = v_A + \lambda \mathbf{\Omega} q \tag{6}$$

und

$$\text{Oberdim } \mathsf{Q} = \dim \{v_A, q, \mathbf{\Omega} q\}.$$

Im Bezug auf die Zahl Oberdim $\mathsf{Q}$ unterscheidet man drei mögliche Typen:

*I*) Oberdim $\mathsf{Q} = 1$,
*II*) Oberdim $\mathsf{Q} = 2$,
*III*) Oberdim $\mathsf{Q} = 3$,

die wir im folgenden behandeln werden.

**3. Gerade vom Typ** *I*.

**Satz 1.** *Ist* (5) *eine Gerade vom Typ I so gehört sie zu einer und nur zu einer von den folgenden drei Klassen:*

*Ia*) $v_A = \mathbf{\Omega} q = o$ und $\mathfrak{V}X \equiv X$ *für jeden Punkt* $X \in \mathsf{Q}$;

*Ib*) $v_A = \alpha q \neq o$, $\mathbf{\Omega} q = o$ *und* $\mathfrak{V}X \equiv \mathsf{Q}$ *für jeden Punkt* $X \in \mathsf{Q}$;

*Ic*) $v_A = \alpha q$, $\mathbf{\Omega} q = \beta q \neq o$ *und* $\mathfrak{V}X \equiv \mathsf{Q}$ *für jeden Punkt* $X$, *mit Ausnahme des Punktes* $A - \dfrac{\alpha}{\beta} q$, *für welchen* $\mathfrak{V}\left(A - \dfrac{\alpha}{\beta} q\right) \equiv A - \dfrac{\alpha}{\beta} q$ *ist.*

Beweis. Ist (5) eine Gerade vom Typ *I*, so dim $\{v_A, q, \mathbf{\Omega} q\} = 1$ und bezüglich $q \neq o$ ist $v_A = \alpha q$ und auch $\mathbf{\Omega} q = \beta q$. Setzt man die beiden letzten Gleichungen an Stelle von (6) ein, erhält man

$$v_X = (\alpha + \lambda\beta) q.$$

Nun genügt es zu bemerken, dass das Objekt $\mathfrak{V}X$ entweder den Punkt $X$ oder die Gerade $\mathsf{Q}$ bedeutet, je nachdem, ob $\alpha + \lambda\beta$ gleich oder verschieden von Null ist.

Es ist klar, daß das Nullfeld $\mathfrak{V}(o, \mathbf{O})$ nur die Geraden von der Klasse *Ia* gestattet. Deshalb wollen wir dies als Trivialfall aus unseren Betrachtungen ausschließen. Ist weiter $v \neq o$ und $\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}$, dann muß jede Gerade $\mathsf{Q}$ vom Typ I notwendig von der Klasse *Ib* sein. Diese Beispiele rufen eine allgemeine Frage hervor und zwar die Charakterisierung der Felder, welche die Gerade von der Klasse *Ia*, *Ib*, oder *Ic* gestatten. Auf diese Frage antworten die nächstn drei Sätze.

**Satz 2.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade von der Klasse Ia, wenn* $v \in \mathsf{R}$ *und* $\mathsf{N} \neq \mathsf{O}$ *ist.*

Beweis. Ist (5) die Gerade von der Klasse $Ia$, so gilt nach dem Satz 1 $v_A = \mathbf{\Omega} q = o$, und hinsichtlich des Hilfssatzes auch $v \in \mathsf{R}$ und $\mathsf{N} \neq \mathsf{O}$. Setzt man umgekehrt $v \in \mathsf{R}$ und $\mathsf{N} \neq \mathsf{O}$ voraus, dann genügt es $q$ und $A$ in solcher Weise zu wählen, daß $o \neq q \in \mathsf{N}$ und zugleich $v_A = o$ ist. Das wird durch den Hilfssatz ermöglicht.

Die unmittelbare Folgerung des Satzes 1 ist

**Satz 3.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade von der Klasse Ib, wenn der Unterraum* $(\{v\} + \mathsf{R}) \cap \mathsf{N}$ *einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor enthält.*

**Satz 4.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade von der Klasse Ic, wenn* $v \in \mathsf{R}$ *ist und der Endomorfismus* $\mathbf{\Omega}$ *mindestens einen reellen, von Null verschiedenen Eigenwert hat.*

Beweis. Für die Gerade $\mathsf{Q}$ von der Klasse $Ic$ nach dem Satz 1 gilt $v_A = \alpha q$ und $\mathbf{\Omega} q = \beta q \neq o$. Es ist also $\beta \neq 0$ ein reeller Eigenwert des $\mathbf{\Omega}$, und ausserdem auch $v \in \mathsf{R}$ dem Hilfssatz nach. Ist umgekehrt $v \in \mathsf{q}$ und $\beta \neq 0$ der reelle Eigenwert des $\mathbf{\Omega}$, dann müssen wir zuerst die Feldgleichung (2) in die Form (4) bringen und dann $q \neq o$ als Eigenvektor, der dem Eigenwert $\beta$ entspricht, wählen; daher ist die Gerade $\mathsf{Q} \equiv (0, q)$ gewiß von der Klasse $Ic$.

Die Geraden vom Typ $I$ sind soeben ausführlich behandelt worden und wir gehen zu den Geraden vom Typ $II$ über.

## 4. Gerade vom Typ *II*.

**Satz 5.** *Ist* (5) *eine Gerade vom Typ II, so gehört sie zu einer von den folgenden vier Klassen*:

*IIa*) $\dim \{v_A, q\} = 2, \ \mathbf{\Omega} q = o$;
*IIb*) $\dim \{q, \mathbf{\Omega} q\} = 2, \ v_A = \alpha \mathbf{\Omega} q$;
*IIc*) $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega} q\} = 2, \ q = \beta \mathbf{\Omega} q$;
*IId*) $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega} q\} = 2, \ q = \beta \mathbf{\Omega} q + \alpha v_A, \ \alpha \neq 0$.

Beweis. Setzt man zuerst $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega} q\} = 2$ voraus, dann die Bedingung $\dim \{v_A, q, \mathbf{\Omega} q\} = 2$, kann man auch

$$q = \alpha v_A + \beta \mathbf{\Omega} q$$

schreiben. Falls hier $\alpha = 0$ bzw. $\alpha \neq 0$ ist, so erreichen wir den Fall $IIc$ bzw. $IId$. Ist weiter $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega} q\} = 1$, dann gilt entweder $\mathbf{\Omega} q = o$, oder $\mathbf{\Omega} q \neq o$, was dem Fall $IIa$ oder $IIb$ entspricht.

Über die geometrische Gestalt der Geraden vom Typ $II$ spricht der

**Satz 6.** *Ist* (5) *eine Gerade vom Typ II, so ist die Punktmenge* $\mathfrak{B}\mathsf{Q}$ *hinsichtlich der in dem Satz 5 eingeführten Klassifikation:*

*IIa) die Menge aller, mit dem Vektor* $v_A$ *parallelen Geraden, die die Gerade* $\mathsf{Q}$ *schneiden;*

*IIb) die in dem vorigen Fall beschriebene Punktmenge, mit der Ausnahme einer einzigen Gerade, die hier nur durch ihren Schnittpunkt mit* $\mathsf{Q}$ *ersetzt ist — das Objekt* $\mathfrak{B}X$ *ist stets eine Gerade, nur für den Punkt* $C = A - \alpha q$, *den wir Mittelpunkt der Gerade* $\mathsf{Q}$ *nennen, gilt* $\mathfrak{B}C = C$;

*IIc) die Menge aller Geraden* $HX$, *wo* $H = A - \beta v_A$ *ein fester, nicht auf* $\mathsf{Q}$ *liegender Punkt ist, und* $X$ *der Laufpunkt der Gerade* $\mathsf{Q}$ *ist;*

*IId) die Menge aller Tangenten der Parabel, die in dem Koordinatensystem* $X = A + \xi v_A + \eta\Omega q$, *durch die Gleichung*

$$(\xi + \beta)^2 = 4\alpha\eta \tag{7}$$

*aufgestellt ist.*

Beweis. Die Fälle *IIa* und *IIb* sind klar. Ist ferner $\mathsf{Q}$ von der Klasse *IIc*, so gilt in Bezug auf (6)

$$X - \beta v_X = A - \beta v_A = H \quad (X \in \mathsf{Q})$$

und der Punkt $H$ hängt also von dem Parameter $\lambda$ nicht ab. Bezüglich dim $\{v_A, \Omega q\} = 2$ und $q = \beta\Omega q$ ist noch $H \notin \mathsf{Q}$. Es sei schließlich die Gerade $\mathsf{Q}$ von der Klasse *IId*. Wählt man auf jeder Gerade $\mathfrak{B}X$, $X \in \mathsf{Q}$ den Punkt

$$Z = X + (\alpha\lambda - \beta)v_X = A + (2\alpha\lambda - \beta)v_A + \lambda^2\alpha\Omega q,$$

dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\lambda} = 2\alpha v_X,$$

was hinsichtlich $\alpha \neq 0$ die Kurve $Z = Z(\lambda)$ als Hüllkurve des Geradensystems $(X, v_X)$, $X \in \mathsf{Q}$ festsetzt. Unter Berücksichtigung von

$$\xi = 2\alpha\lambda - \beta, \quad \eta = \lambda^2\alpha$$

ist diese Kurve durch die Gleichung (7) beschrieben.

Nun kehren wir wieder zu den Existenzfragen zurück.

**Satz 7.** *Dann und nur dann gibt es keine Gerade der Klasse IIa, wenn entweder* $\mathsf{N} = \mathsf{O}$ *ist, oder es ist* $n = 2$ *und dabei existiert noch eine Basis* $\langle 0, a_1, a_2\rangle$ *des Raumes* $\mathsf{A}_2$ *in welcher* $v$ *bzw.* $\Omega$ *als*

$$(\tau, o) \text{ bzw.} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

*geschrieben werden kann.*

Beweis. Ist zuerst $\mathsf{N} = \mathsf{O}$, so besitzt die Gleichung $\mathbf{\Omega}q = o$ nur die Lösung $q = o$. Gilt weiter (8), dann muss für jeden Vektor $q \in \mathsf{N}$ stets $\dim \{v_A, q\} < 2$ sein. In Bezug auf den Satz 5 sind beide eingeführten Fälle der Gerade von der Klasse *IIa* ausgeschlossen und eine Gerade von der Klasse *IIa* kann also nicht existieren. Es sei umgekehrt $\mathfrak{V}$ das Feld, das keine Gerade von der Klasse *IIa* gestattet. Ist $\mathsf{N} \neq \mathsf{O}$, dann gilt $\dim \{v_X, q\} \preceq 1$ für jeden Punkt $X$ und für einen beliebigen Vektor $q \in \mathsf{N}$. Dann ist $\mathsf{N} = \{n\}$, $v \in \{n\}$ und also für einen beliebigen Vektor $x$ auch $\mathbf{\Omega}x \in \{n\}$, was endlich zu $\mathsf{N} = \mathsf{R} = \{n\}$ d. h.

$$\operatorname{rang} \mathbf{\Omega} = \dim \mathsf{N} + \dim \mathsf{R} = 2$$

führt. Nun wählen wir ein solches Koordinatensystem, in welchem das Vektor $n$ als $(\tau, 0)$ beschrieben ist und dazu eine passende Normierung. Dann ist der Satz beweisen.

**Satz 8.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade von der Klasse IIb, wenn* $v \in \mathsf{R}$ und $\mathbf{0} \neq \mathbf{\Omega} \neq \varphi\mathbf{I}$ ($\varphi$-reelle konstante, $\mathbf{I}$-Identität) ist.

Der Beweis folgt teilweise aus dem Hilfssatz, nämlich daß $v \in \mathsf{R}$ und $v_A = \alpha\mathbf{\Omega}q$ äquivalent sind, teilweise aus der Behauptung, dass zur Existenz des Vektors $q$ mit $\dim \{q, \mathbf{\Omega}q\} = 2$, die Bedingungen $\mathbf{0} \neq \mathbf{\Omega} \neq \varphi\mathbf{I}$ notwendig und hinreichend sind.

**Satz 9.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade von der Klasse IIc, wenn* $\dim (\{v\} + \mathsf{R}) \geq 2$ *ist, und* $\mathbf{\Omega}$ *(mindestens) einen reellen, von Null verschiedenen Eigenwert hat.*

Beweis. Die Gleichung $q = \beta\mathbf{\Omega}q$ ist für einen unbekannten reellen Vektor $q \neq o$ dann und nur dann lösbar, wenn der Endomorfismus $\mathbf{\Omega}$ (mindestens) einen reellen, von Null verschiedenen Eigenwert $\beta^{-1}$ hat. Ist weiter $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega}q\} = 2$, dann ist wegen $\{v_A, \mathbf{\Omega}q\} \subset \{v\} + \mathsf{R}$ auch $\dim (\{v\} + \mathrm{q}) \geqq 2$. Ist umgekehrt $\dim (\{v\} + \mathsf{R}) \geqq 2$, so gibt es zum beliebigen Vektor $u \in \mathsf{R}$, $u \neq o$ einen solchen Vektor $w \in \mathsf{R}$, daß $\dim \{v + w, u\} = 2$ gilt. Mit anderen Worten: es ist möglich jedem $q \notin \mathsf{N}$ so einen Punkt $A$ zuzuordnen, daß $\dim \{v_A, \mathbf{\Omega}q\} = 2$ ist.

**Satz 10.** *Dann und nur dann ist die Gerade* $\mathsf{Q}$ *von der Klasse IId, wenn sie sich in der Form*

$$\mathsf{Q} \equiv X = B + \lambda v_B \tag{9}$$

*darstellen läßt, wobei* $v_B$ *kein Eigenvektor des Endomorfismus* $\mathbf{\Omega}$ *ist.*

Beweis. Mit Rücksicht auf Satz 5 ist es klar, daß die Gerade (9) von der Klasse *IId* ist. Ist umgekehrt (5) eine Gerade von der Klasse *IId*, so gilt für ihren Punkt $B = A + \dfrac{\beta}{\alpha} q$ (und nur für diesen Punkt) $\dim \{v_B, q\} = 1$.

**Satz 11.** *Dann und nur dann gibt es keine Gerade von der Klasse IId, wenn entweder* $v \notin \mathsf{R}$, $v \in \mathsf{N}$, $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{0}$, *oder* $v \in \mathsf{R}$, $\mathbf{\Omega} \neq \mathrm{O}$, $\mathbf{\Omega}^2 = \varphi\mathbf{\Omega}$ ($\varphi$ — *reelle Konstante) gilt.*

Beweis. Nach dem Satz 10 folgt es, dass $\mathfrak{B}$ genau dann keine Gerade von der Klasse *IId* gestattet, wenn man zu jedem Punkt $X$ einer reellen Zahl $\varphi$ (die hängt vom $X$ ab) so zuordnen kann, dass die Gleichung $\mathbf{\Omega}v_X = \varphi v_X$ gilt. Im Falle dass $v \notin \mathsf{R}$, setzen wir zuerst voraus, dass es keine Gerade von der Klasse *IId* gibt. Es gibt zum beliebigen $X \in \mathsf{A}_n$ einen reellen Parameter $\varphi$ so, da $\mathbf{\Omega}v_X = \varphi v_X$ gilt. Bezüglich (2) folgt $\varphi v = \mathbf{\Omega}(v_X - \varphi x)$ und gilt $\varphi = 0$ also identisch. Dann aber gelten $\mathbf{\Omega}v_X = o$ für jedes $X \in \mathsf{A}_n$ und folglich auch $\mathbf{\Omega}v - o$; identisch ist also $\mathbf{\Omega}^2 x = o$. Hieraus folgt $v \in \mathsf{N}$ und $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{0}$. Ist umgekehrt $v \in \mathsf{N}$ und $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{\Omega}v_X = \mathbf{\Omega}v + \mathbf{\Omega}^2 x = o$ für jedes $X \in \mathsf{A}_n$ und keine Gerade $\mathsf{Q}$ von der Klasse *IId* befindet sich in $\mathrm{A}_n$. Im entgegengesetzten Falle, wo $v \in \mathsf{R}$ ist, setzen wir wieder voraus, daß es in $\mathrm{A}_n$ keine Gerade von der Klasse *IId* gibt. Wenn wir nach dem Hilfssatz anstatt (2), (4) benutzen, behalten wir von $\mathbf{\Omega}v_X = \varphi v_X$ die Gleichung $\mathbf{\Omega}^2 x = \varphi\mathbf{\Omega}x$. Man muss nun beweisen, dass der Faktor $\varphi$ nicht von $x$ abhängt. Es ist möglich jedem $y \in \mathsf{R}$ so einen Vektor $x$ zu geben, dass $y = \mathbf{\Omega}x$ und somit auch $\mathbf{\Omega}y = \varphi y$ gilt. Ist $\mathbf{\Omega} \neq \mathbf{0}$. Für je zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $y, z$ aus $\mathsf{R}$ gelten die Gleichungen $\mathbf{\Omega}y = \varphi y$, $\mathbf{\Omega}z = \psi z$. Hängt $y$ von $z$ linear ab, dann ist offenbar $\varphi = \psi$. Sind $y, z$ linear unabhängige Vektoren, so ist auch der $y + z \in \mathsf{R}$ ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, und darum entspricht er der Gleichung $\mathbf{\Omega}(y + z) = \sigma(y + z)$. Vergleicht man die letzten drei Vektorgleichungen, so erhält man die Gleichung $(\varphi - \sigma)y + (\psi - \sigma)z = o$, woraus schon $\varphi = \sigma = \psi$ folgt. Ist umgekehrt $\mathbf{\Omega}^2 = \varphi\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega} \neq \mathrm{O}$, $\varphi \neq 0$ und $v \in \mathsf{R}$, dann gilt für jedes $X \in \mathsf{A}_n$ die Beziehung $\mathbf{\Omega}v_X = \varphi v_X$ und es existiert also wieder keine Gerade von der Klasse *IId*.

**5. Gerade vom Typ *III*.**

**Satz 12.** *Ist* (5) *eine Gerade vom Typ III, so erzeugt* $\mathfrak{B}\mathsf{Q}$ *eine Regelschar des hyperbolischen Paraboloids, dessen Gleichung in dem affinen Koordinatensystem* $X = \xi v_A + \eta q + \zeta\mathbf{\Omega}q$

$$\zeta = \xi\eta \tag{10}$$

*lautet.*

Beweis. Bezeichnet man $X = A + \lambda q$, dann kann man in Bezug auf (3) den Laufpunkt $Z = X + \mu v_A$ des $\mathfrak{B}\mathsf{Q}$ in der Form

$$Z = A + \mu v_A + \lambda q + \lambda\mu\mathbf{\Omega}q$$

schreiben und durch die Elimination der Parameter $\lambda$ und $\mu$ zu der Gleichung (10) kommen.

**Satz 13.** *Dann und nur dann gibt es eine Gerade vom Typ III, wenn* $\mathbf{\Omega} \neq \varphi\mathbf{I}$ *und zugleich* $\dim \mathsf{R} = 1 \Rightarrow v \notin \mathsf{R}$ *gilt.*

Beweis. Betrachten wir eine Gerade $\mathsf{Q}$ vom Typ *III* im $\mathsf{A}_n$ $(n \geqq 3)$. Dann ist $\dim \{v_A, q, \mathbf{\Omega}q\} = 3$ und also auch $\mathbf{\Omega} \neq \varphi\mathbf{I}$. Falls jetzt $v \in \mathsf{R}$ ist, so ist $\{v, \mathbf{\Omega}q\} \subset \mathsf{R}$ und hinsichtlich der $\dim \{v_A, q, \mathbf{\Omega}q\} = 3$ gilt auch $\dim \{v, \mathbf{\Omega}q\} = 2$, d. h. $\dim \mathsf{R} \geqq 2$. Setzt man umgekehrt $\mathbf{\Omega} \neq \varphi\mathbf{I}$, $n \geqq 3$ und zugleich $\dim \mathsf{R} \geqq 1$ voraus, so ist es möglich, die Vektoren $p$, $q$ so zu nehmen, daß $\dim \{p, q, \mathbf{\Omega}q\} = 3$ ist. Ist eventuell $\mathbf{\Omega}p = \psi p$, so genügt es statt $p$ den Vektor $p + q = p'$, zu nehmen, um der Gleichung $\dim \{p', \mathbf{\Omega}p'\} = 2$ zu genügen. Im Falle, daß $\dim \{p, \mathbf{\Omega}p, q, \mathbf{\Omega}q\} = 4$ ist, genügt es ein beliebiges $v_A \neq o$ zu wählen um den fraglichen dreidimensionalen Raum $\{v_A, q, \mathbf{\Omega}q\}$ oder $\{v_A, p, \mathbf{\Omega}p\}$ zu erhalten. Im entgegengesetzten Falle $\dim \{p, \mathbf{\Omega}p, q, \mathbf{\Omega}q\} = 3$, läßt sich so ein Vektor $m \neq o$ finden daß

$$\{m\} = \{p, \mathbf{\Omega}p\} \cap \{q, \mathbf{\Omega}q\}$$

gilt. Den Voraussetzungen nach gibt es einen Vektor $v_X$ für den $v_X \notin \{m\}$ ist und daher muß mindestens einer von den zwei Räumen $\{v_X, p, \mathbf{\Omega}p\}$ und $\{v_X, q, \mathbf{\Omega}q\}$ dreidimensional sein. Wäre nämlich $v_X \in \{m\}$ für alle $X \in \mathsf{A}_n$, dann ist inbesondere $v \in \{m\}$ und $\mathbf{\Omega}x \in \{m\}$ für alle Vektoren $x$, d. h. $\mathsf{R} = \{m\}$, $v \in \mathsf{R}$.

## LITERATUR


[1] Kováč J., *Nulový komplex všeobecného okamžitého pohybu telesa.* Sborník vedeckých prác Strojníckej fakulty SVŠT, Bratislava 1962, 69—83.

[2] Müller H. R., *Zur Bewegungsgeometrie in Räumen höherer Dimension,* Monatsh. Math. *70* (1966), 47—57.



Eingegangen am 5. 10. 1966.



*Katedra geometrie*
*Prírodovedeckej fakulty*
*Univerzity Komenského,*
*Bratislava*