Matematický časopis

Miranda Kakabadze

Об одной задаче с интегральными условиями для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 3, 225--237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/126975`

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИРАНДА КАКАБАДЗЕ

В настоящей статье рассматривается краевая задача вида

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

$$x_i(t_i) + \int_a^b x_i(t)\, \mathrm{d}\varphi_i(t) = x_{0i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $a \leq t_i \leq b$ $(i = 1, \ldots, n)$, а $\varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$—функции ограниченной вариации на $[a, b]$. Частными случаями задачи (1), (2) являются, например, задача Коши—Николетти

$$x_i(t_i) = x_{0i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

и периодическая краевая задача

$$x_i(a) = x_i(b) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

В регулярном случае, когда правые части системы (1) непрерывны или удовлетворяют условиям Каратеодори, задача (1), (2) исследовалась в [4], [6], [7], [9], [10], [13] и др. В сингулярном случае, когда функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, вообще, не являются суммируемыми по t на отрезке $[a, b]$, задача (1), (3) исследована в [3]. Важные результаты о разрешимости задачи (1), (4) в регулярном случае собраны в монографиях М. А. Красносельского [5] и В. А. Плисса [11]. Следует отметить также работы [1] и [8]. В сингулярном случае задача (1), (4) исследована в [2].

§ 1. Регулярный случай

1. Формулировка теорем существования и единственности.

Всюду в этом параграфе предполагается, что функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ определены в области

$$D^4_{ab} = \{(t, x_1, \ldots, x_n) : a < t < b, -\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty\}$$

и удовлетворяют локальным условиям Каратеодори, т. е. $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны по $x_1, \ldots, x_n$ во всём n-мерном евклидовом пространстве E^n при почти всех $t \in [a, b]$, измеримы по t на отрезке $[a, b]$ при любом $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ и для каждого $r \in (0, +\infty)$ функции

$$f^*_i(t, r) = \sup\{|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : |x_k| \leq r \ (k = 1, \ldots, n)\}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

суммируемы на $[a, b]$.

Под решением задачи (1), (2) понимаются абсолютно непрерывные на $[a, b]$ функции $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, почти всюду на $[a, b]$ удовлетворяющие системе (1) и условиям (2).

Мы исследуем разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда правые части системы (1) в области D^n удовлетворяют следующим односторонним оценкам

$$(1.1) \quad [f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - P_i(t)x_i] \operatorname{sign}[(t - t_i)x_i] \leq \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)|x_j| + \omega_i\Big(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где $P_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$—суммируемые на $[a, b]$ функции, $P_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ неотрицательны и суммируемы на $[a, b]$, а функции $\omega_i(t, \varrho)$ $(i = 1, \ldots, n)$ неотрицательны, суммируемы по t на отрезке $[a, b]$ при любом $\varrho \geq 0$, не убывают по ϱ и

$$(1.2) \qquad \lim_{\varrho \to +\infty} \frac{1}{\varrho} \int_a^b \omega_i(t, \varrho) \mathrm{d}t = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Мы будем пользоваться также следующими обозначениями

---

[1]) Под $\int_a^t |\mathrm{d}\,\varphi_i(\tau)|$ понимается полная вариация функции $\varphi_i(\tau)$ на отрезке $[a, t]$.

$$\varphi_i^*(a) = 0, \quad \varphi_i^*(t) = \int\limits_a^t |\mathrm{d}\varphi_i(\tau)| \quad \text{при} \quad a < t \leq b \quad (i = 1, \ldots, n)^{1)}$$

$$(1.3) \qquad \alpha_i = \int\limits_a^b e^{\int\limits_{t_i}^t P_i(s)\mathrm{d}s} \mathrm{d}\varphi_i^*(t) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$(1.4)\ \beta_i = \max\{e^{\int\limits_\tau^t P_i(s)\mathrm{d}s} : (t-\tau)(t-t_i)\geqslant 0,\ (\tau-t_i)(t-t_i)\geqslant 0,\ a\leq\tau,\ t\leq b\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и спектр матрицы* $Q = (q_{ij})$,

$$(1.5) \qquad q_{ij} = \beta_i \left[\frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1-\alpha_i} + 1\right] \int\limits_a^b P_{ij}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot (i, j = 1, \ldots, n)$$

расположен внутри единичного круга. Тогда задача (1), (2) *разрешима.*

Теорема 1.2. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $P_{ij}(t) \equiv P_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *постоянные и спектр матрицы* $Q = (q_{ij})$,

$$(1.6) \qquad q_{ij} = \beta_i \left[\frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1-\alpha_i} + \frac{2}{\pi}\right] (b-a)P_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

расположен внутри единичного круга. Тогда задача (1), (2) *разрешима.*

Теорема 1.3. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и в области* D^n_{ab} *выполняются неравенства*

$$(1.7)\ [f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n) - P_i(t)(x_i - y_i)]\,\mathrm{sign}\,[(t-t_i) \times$$
$$\times (x_i - y_i)] \leqslant \sum_{j=1}^n P_{ij}(t)\,|x_j - y_j| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

где функции $P_i(t)$, $P_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют либо условиям теоремы* 1.1, *либо условиям теоремы* 1.2. *Тогда задача* (1), (2) *имеет одно и только одно решение.*

При $\varphi_i(t) \equiv 0$, $P_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ из теорем 1.1 и 1.3 получаются теоремы М. Швеца [13] и А. Ласота [6] о существовании и единственности решения задачи (1), (3). Частным случаем теоремы 1.1 является также теорема Кордуняну о разрешимости периодической задачи (1), (4) (см. [11], стр. 86 теорема 6.2).

2. Некоторые вспомогательные предложения

Лемма 1. *Пусть в области D^1_{ab} выполняются неравенства*

$$(1.8)\quad [f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - P_i(t)x_i] \operatorname{sign} [(t - t_i)x_i] \leq g_i(t, |x_1|, \ldots, |x_n|) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где функции $P_i(t)$ суммируемы на $[a, b]$, а $g_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — определённые в области $a < t < b$, $0 \leq x_1, \ldots, x_n < +\infty$ неотрицательные функции. Пусть, кроме того, $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ и для любых действительных чисел $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ найдётся такое положительное число $\varrho_0 = \varrho_0 (x_{01}, \ldots, x_{0n})$, что каковы бы ни были асболютно непрерывные на $[a, b]$ функции $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие системе дифферьнциальных неравенств

$$(1.9)\quad [x_i'(t) - P_i(t)x_i(t)] \operatorname{sign} [(t - t_i)x_i(t)] \leq g_i(t, |x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|)$$

при $a \leq t \leq b$, $(i = 1, \ldots, n)$ и условиям (2), *будет иметь место неравенство*

$$(1.10)\qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)| \leq \varrho_0 \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b.$$

Тогда задача (1), (2) *разрешима.*

Доказательство. Введём функции

$$(1.11)\qquad \eta(\varrho) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho_0 \\ 2 - \varrho/\varrho_0 & \text{при} \quad \varrho_0 < \varrho \leq 2\varrho_0 \\ 0 & \text{при} \quad 2\varrho_0 < \varrho \end{cases}$$

и

$$(1.12)\quad h_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \eta \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big) [f_i (t, x_1, \ldots, x_n) - P_i(t)x_i] \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Ясно, что в области D^n_{ab} соблюдаются неравенства

$$(1.13)\qquad |h_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leq h_i^*(t) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$h_i^*(t) = 2\varrho_0|P_i(t)| + \sup \Big\{|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 2\varrho_0\Big\} \in \mathrm{L}(a, b) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Покажем, что система

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(t)x_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

не имеет нетривиального решения, удовлетворяющего условиям

$$x_i(t_i) + \int_a^b x_i(t)\, d\varphi_i(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.15}$$

В самом деле, каждое решение системы (1.14) имеет вид

$$x_i(t) = e^{\int_{t_i}^{t} P_i(\tau)d\tau} x_i(t_i) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому из (1.15) находим

$$|x_i(t_i)| \leqslant |x_i(t_i)| \int_a^b e^{\int_{t_i}^{t} P_i(\tau)d\tau} d\varphi_i^*(t) = \alpha_i |x_i(t_i)| \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Поскольку $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ ясно, что $x_i(t_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ и, следовательно,

$$x_i(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ввиду того, что задача (1.14), (1.15) имеет только тривиальное решение и соблюдается условие (1.13), согласно одной теорем Р. Конти (см. [4] §4), система

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(t)x_i + h_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

имеет по крайней мере одно решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, удовлетворяющее условиям (2). Ввиду условий (1.11), (1.12) и (1.16), имеют место неравенства

$$[x_i'(t) - P_i(t)x_i(t)] \operatorname{sign} [(t - t_i)x_i(t)] \leqslant g_i(t, |x_1(t)|, \ldots, |x_n(t)|)$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

и поэтому справедливо (1.10).

В силу (1.10)—(1.12), ясно, что $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ есть решение задачи (1), (2). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функции $P_i(t)$, $P_{ij}(t)$, $\omega_i(t, \varrho)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют либо условиям теоремы 1.1, либо условиям теоремы 1.2. Тогда для любых действительных чисел $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ найдутся такое положительное число $\varrho_0 = \varrho_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ и положительное число a_0, не зависящее от $x_{01}, \ldots, x_{0n}$, что каковы бы ни были абсолютно непрерывные на $[a, b]$*

функции $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, *удовлетворяющие системе дифференциальных неравенств*

$$(1.17)\qquad [x_i'(t) - P_i(t)x_i(t)]\,\mathrm{sign}\,[(t - t_i)x_i(t)] \leqslant \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)|x_j(t)| +$$

$$+ \omega_i\,(t, \sum_{j=1}^{n} |x_j(t)| \qquad \text{при}\quad a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и условиям (2), *будем иметь*

$$(1.18)\qquad |x_i(t)| \leqslant a_0 \sum_{j=1}^{n} (|x_{0j}| + \int_a^b \omega_j(\tau, \varrho_0)\,\mathrm{d}\tau)$$

$$\text{при}\quad a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда выполняются условия теоремы 1.1.

Из (1.17) ясно, что

$$(1.19)\qquad |x_i(t)| \leqslant e^{\int_{t_i}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s} |x_i(t_i)| + \sum_{j=1}^{n} |\int_{t_i}^{t} P_{ij}(\tau)|x_j(\tau)|\, e^{\int_{\tau}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\tau| +$$

$$+ |\int_{t_i}^{t} \omega_i(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|)\, e^{\int_{\tau}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\tau| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, поскольку $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, в силу (2), (1.3), (1.4) и очевидных неравенств

$$|\int_a^b x_i(t)\,\mathrm{d}\varphi_i(t)| \leqslant \int_a^b |x_i(t)|\,\mathrm{d}\varphi_i^*(t) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

легко проверить, что

$$(1.20)\qquad |x_i(t_i)| \leqslant \frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b P_{ij}(\tau)|x_j(\tau)|\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} \int_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|\right)\mathrm{d}\tau + \frac{|x_{0i}|}{1 - \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Положим

$$\varrho_i = \max\,\{|x_i(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Подстановкой неравенств (1.20) в (1.19) получаем

$$(1.21)\qquad \sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-q_{ij})\varrho_j \leqslant \beta_i\left[\frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1-\alpha_i}+1\right]\int_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n}\varrho_j\right)\mathrm{d}\tau+\frac{\beta_i|x_{0i}|}{1-\alpha_i}$$

$$(i=1,\ldots,n),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — числа, определённые равенствами (1.5).

Пусть I — единичная матрица. Поскольку $Q = (q_{ij})$ неотрицательна и её спектр расположен внутри единичного круга, ясно, что существует неотрицательная матрица $(I - Q)^{-1} = (d_{ij})$ обратная к $I - Q$. Поэтому из (1.21) следует, что

$$(1.22)\qquad \varrho_i \leqq \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\beta_j\left[\left(\frac{\beta_j\varphi_j^*(b)}{1-\alpha_j}+1\right)\int_a^b \omega_j\left(\tau, \sum_{s=1}^{n}\varrho_s\right)\mathrm{d}\tau+\frac{|x_{0j}|}{1-\alpha_j}\right]$$

$$(i=1,\ldots,n)$$

Положим

$$N=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{d}_{ij}\beta_j\left[\frac{\beta_j\varphi_j^*(b)}{1-\alpha_j}+1+\frac{|x_{0j}|}{1-\alpha_j}\right].$$

Согласно условию (1.2), можно подобрать такое положительное число $\varrho_0 > N$, что

$$\int_a^b \omega_i(t, \varrho)\,\mathrm{d}t < \frac{\varrho}{N} \qquad \text{при} \quad \varrho \geqslant \varrho_0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, ввиду (1.22), легко можно убедиться в том, что

$$(1.23)\qquad \sum_{i=1}^{n}\varrho_i \leqslant \varrho_0,$$

так как в противном случае получили бы противоречивое неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\varrho_i < \sum_{i=1}^{n}\varrho_i.$$

Из (1.22), (1.23) непосредственно получаются неравенства (1.18), где

$$a_0 = \max\left\{d_{ij}\beta_j\left[\frac{\beta_j\varphi_j^*(b)+1}{1-\alpha_j}+1\right] : (i, j = 1, \ldots, n)\right\}.$$

Учитывая, что a_0 и $\varrho_0 = \varrho_0(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ не зависят от $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, справедливость леммы становится очевидной.

Рассмотрим второй случай, когда выполняются условия теоремы 1.2. Аналогично, как и в первом случае, можно показать, что

$$|x_i(t)| \leqslant e^{\int\limits_{t_i}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s} |x_i(t_i)| + \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \left| \int\limits_{t_i}^{t} x_j(\tau)\, e^{\int\limits_{\tau}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s} \mathrm{d}\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_i}^{t} \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|\right) e^{\int\limits_{\tau}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s} \mathrm{d}\tau \right| \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$|x_i(t_i)| \leqslant \frac{\beta_i \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \int\limits_a^b |x_j(\tau)|\, \mathrm{d}\tau + \frac{\beta_i \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} \int\limits_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|\right) \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{|x_{0i}|}{1 - \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$(1.24) \qquad |x_i(t)| \leqslant \frac{\beta_i^2 \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \int\limits_a^b |x_j(\tau)| \mathrm{d}\tau + \beta_i \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \left| \int\limits_{t_i}^{t} |x_j(\tau)| \mathrm{d}\tau \right| +$$

$$+ \beta_i \left[\frac{\beta_i \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} + 1 \right] \int\limits_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|\right) \mathrm{d}\tau + \frac{\beta_i |x_{0i}|}{1 - \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Отсюда, в силу неравенств Минковского и Гельдера, вытекает, что

$$(1.25) \qquad \left(\int\limits_a^b |x_i(t)|^2\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\beta_i^2 \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} (b - a) \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \left(\int\limits_a^b |x_j(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \beta_i \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \left(\int\limits_a^b \left| \int\limits_{t_i}^{t} |x_j(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} + \beta_i \left[\frac{\beta_i \varphi_i^*(b)}{1 - \alpha_i} + 1 \right] (b - a)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n} |x_j(\tau)|\right) \mathrm{d}\tau + \frac{(b - a)^{\frac{1}{2}} \beta_i\, |x_{0i}|}{1 - \alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно неравенству Виртингера,

$$\Big(\int_a^b \Big|\int_{t_i}^t |x_j(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\Big|^2 \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{\pi}(b-a)\Big(\int_a^b |x_j(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

(см. [12] стр. 219, неравенство 7.6.1). Поэтому из (1.25) следует, что

$$(1.26)\qquad \sum_{j=1}^{n} (\delta_{0j} - q_{ij})y_j^* \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}}\,\beta_i\left[\frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1-\alpha_i}+1\right]\int_a^b \omega_i\left(\tau, \sum_{j=1}^{n}|x_j(\tau)|\right)\mathrm{d}\tau +$$
$$+\frac{(b-a)^{\frac{1}{2}}\beta_i|x_{0i}|}{1-\alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$y_i^* = \Big(\int_a^b |x_i(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

а q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — числа, определённые равенствами (1.6). Положим

$$\varrho_i = \max\{|x_i(t)| : a \leqslant t \leqslant b\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Как и в первом случае существует положительная матрица $(I - Q)^{-1} = (d_{ij})$. В силу этого, из (1.26) имеем

$$y_i^* \leqslant (b-a)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\beta_j\left[\left(\frac{\beta_j\varphi_j^*(b)}{1-\alpha_i}+1\right)\int_a^b \omega_j\left(\tau, \sum_{s=1}^{n}\varrho_s\right)\mathrm{d}\tau +\right.$$
$$\left.+\frac{|x_{0j}|}{1-\alpha_j}\right] \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому из (1.24) вытекает

$$(1.27)\qquad \varrho_i \leqslant a_0 \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_a^b \omega_j\big(\tau, \sum_{s=1}^{n}\varrho_s\big)\,\mathrm{d}\tau + |x_{0j}|\Big] \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где

$$a_0 = \max\left\{\beta_i\left[\frac{\beta_i\varphi_i^*(b)}{1-\alpha_i}+1\right]\left[(b-a)\beta_j\left(\frac{\beta_j\varphi_j^*(b)}{1-\alpha_j}+1\right)\sum_{k=1}^{n} P_{ik}d_{kj} + \delta_{ij}\right]:\right.$$
$$\left.: (i, j = 1, \ldots, n)\right\}.$$

Пусть

$$N = ha_0 \left(h + \sum_{j=1}^{n} |x_{0j}|\right)$$

и $\varrho_0 > N$ такое положительное число, что

$$\int_a^b \omega_i(t, \varrho)\, dt < \frac{\varrho}{N} \qquad \text{при } \varrho \geqslant \varrho_0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ввиду этих неравенств, из (1.27) ясно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_i \leqslant \varrho_0, \tag{1.28}$$

ибо в противном случае получили бы противоречивое неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_i < \sum_{i=1}^{n} \varrho_i.$$

Итак, из (1.27) и (1.28) следует справедливость неравенства (1.18). Лемма доказана.

3. Доказательство теорем существования и единственности.

Справедливость теорем 1.1 и 1.2 непосредственно следует из лемм 1 и 2.

Доказательство теоремы 1.3. Существование решения вытекает из теорем 1.1 и 1.2. Докажем единственность. Пусть $x_{11}(t), \ldots, x_{1n}(t)$ и $x_{21}(t), \ldots, x_{2n}(t)$ — решения задачи (1), (2). Обозначим через $x_i(t)$ их разность

$$x_i(t) = x_{1i}(t) - x_{2i}(t) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Из условий (2) и (1.17) следует, что

$$[x_i'(t) - P_i(t)x_i(t)] \operatorname{sign}[(t - t_i)x_i(t)] \leqslant \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)|x_j(t)| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и имеет место (1.15).

Отсюда, в силу леммы 2, следует, что

$$x_i(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Теорема доказана.

§ 2. Сингулярный случай

В этом параграфе мы коснёмся вопроса разрешимости задачи (1), (2) в сингулярном случае. Ниже запись $f(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(a, b)$ означает, что функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори в области D^n_{ab}. Через $L(a, b; t_1, \ldots, t_m)$ и $K(a, b; t_1, \ldots, t_m)$ обозначаются множества всех функций, принадлежащих, соответственно, $L(\alpha, \beta)$ и $K(\alpha, \beta)$ для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, который не содержит точек t_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Будем считать, что выполняются неравенства (1.1) и функции $P_{ij}(t)$, $\omega_i(t, \varrho)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в предыдущем параграфе. Положим

$$\alpha_i = \begin{cases} \int\limits_a^b e^{\int\limits_{t_i}^{t} P_i(s)\mathrm{d}s} \mathrm{d}\varphi_i^*(t) & \text{если} \quad P_i(t) \in L(a, b) \\ 0 \quad \text{если} & P_i(t) \notin L(a, b) \end{cases}$$

и β_i — числа, определённые равенствами (1.4).

Применяя теоремы 1.1, 1.2, 1.3 и пользуясь методикой работы [2], можно убедиться в справедливости следующих теорем.

Теорема 2.1. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $P_i(t) \operatorname{sign} (t - t_i) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и для каждого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *либо*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(a, b) \quad \text{и} \quad P_i(t) \in L(a, b), \tag{2.1}$$

либо

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(a, b; \tau_{i1}, \ldots, \tau_{im_i}), \ P_i(t) \in L(a, b; \tau_{i1}, \ldots, \tau_{im_i}), \tag{2.2}$$
$$\tau_{ij} \neq t_i \quad (j = 1, \ldots, m_i)$$

и

$$\Big| \int\limits_{\tau_{ij}}^{\tau_{ij} - \delta \operatorname{sign}(\tau_{ij} - t_i)} P_i(\tau)\mathrm{d}\tau \Big| = -\infty \tag{2.3}$$

при любом достаточно малом $\delta > 0$. *Пусть, кроме того, спектр матрицы* $Q = (q_{ij})$, *где* q_{ij} — *числа, определённые равенствами* (1.5), *расположен внутри единичного круга. Тогда задача* (1), (2) *разрешима.*

Теорема 2.2. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $P_{ij}(t) \equiv P_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *постоянные и выполняются либо условие* (2.1), *либо условия* (2.2) *и* (2.3). *Если, кроме того, спектр матрицы* $Q = (q_{ij})$, *где* q_{ij} — *числа определённые равенствами* (1.6), *расположен внутри единичного круга, то задача* (1), (2) *разрешима.*

Теорема 2.3. *Пусть* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и в области* D_{ab}^n *выполняются неравенства* (1.7), *где функции* $P_i(t)$, $P_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *удовлетворяют либо условиям теоремы* (2.1), *либо условиям теоремы* 2.2. *Тогда задача* (1), (2) *имеет не более одного решения.*

При $t_i = 0$, $x_{0i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и*

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant t < \omega \\ -1 & \text{при} \quad t = \omega \end{cases}$$

в условиях, когда $\omega_i(t, \varrho) = g_i(t)$, $g_i(t) \in L(0, \omega)$ $(i = 1, \ldots, n)$, *из теорем* 2.1 *и* 2.3 *следуют результаты работы* [2] *о разрешимости задачи* (1), (4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] BARBALAT, J., HALANAY, A.: Solutions perioduques des systéms d'équations differentielles non linéaires. Rev. Math. Pures Appl., *3*, N3, 1958, 395—411.

[2] КИГУРАДЗЕ, И. Т.: О периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностями. ДАН СССР, *198*, № 2, 1971, 286—289.

[3] КИГУРАДЗЕ, И. Т.: О сингулярной задаче Николетти. ДАН СССР, *186*, № 4, 1969, 769—772.

[4] CONTI, R.: Equazioni differenziali ordinarie quasilineari con lineari. Ann. Matem. pura ed appl., *57*, 1962, 49—61.

[5] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, М. А.: Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Москва, из-во „Наука", 1966.

[6] LASOTA, A.: Sur l'existence et l'unicite des solutions du probléme aux limites de Nicoletti pour un systéme d'équations differentielles ordinaires. Zeszyty Nauk. UI, Prace Math., *11*, 1966, 41—48.

[7] LASOTA, A., OLECH, C.: An optimal solutions od Nicoletti's boundary value problem. Ann. Polon. Math., *18*, N2, 1966, 131—139.

[8] LASOTA, A., OPIAL, Z.: Sur les solutions periodiques des equations differentielles ordinaires. Ann. Polon. Math., *16*, 1964, 69—94.

[9] NICOLETTI, O.: Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali della equations differenziali ordinarie. Atti. della R. Acad Sci. Torino, *33*, 1897, 746.

[10] ПЕРОВ, А. И., КИБЕНКО, А. В.: Об одном общем методе исследования краевых задач. Изв. АН СССР, сер. матем., *30*, № 2, 1966, 249—264.

[11] ПЛИСС, В. А.: Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л., из-во „Наука", 1964.

[12] ХАРДИ, Г. Г., ЛИТТЛЬВУД, Дж. Е., ПОЛИА, Г.: Неравенства. М., Из-во Иностранной литературы, 1948.

[13] ŠVEC, M.: K problemi jednoznacnosti integralov systemi linearnych differencialnich rovnic. Mat. — Fyz. Sb. Slov. akad vied a umení *2*, 1952, 3—22.

Поступило 2. 2. 1973

СССР, Тбилиси 43
ул. Университетская 2
Институт прикладной математики
Тбилисского
государственного университета

Miranda Kakabadze

Summary

In this article the boundary-value problem (1), (2) is considered, where the functions $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ are defined in the domain

$$D^n_{ab} = \{(t, x_1, \ldots, x_n) : a < t < b, -\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty\}$$

and satisfy the local conditions of Caratheodory. Under the solutions of the problem (1), (2) we understand absolutely continuous on $[a, b]$ functions $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, which almost everywhere on $[a, b]$ satisfy the system (1) and the conditions (2). It is also supposed that the estimates (1.1) take place, the functions $P_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ are summable on $[a, b]$, $P_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ are non-negative and summable on $[a, b]$ and the functions $\omega_i(t, \varrho)$ $(i = 1, \ldots, n)$ are non-negative, summable in t on the segment $[a, b]$ with any $\varrho > 0$, non-decreasing in ϱ and satisfy the conditions (1.2), α_i and $\beta_i (i = 1, \ldots, n)$ are numbers, defined in correspondence with the equalities (1.3) and (1.4). The following theorems are proved:

Theorem 1. *Let* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ *and the spectrum of the matrix* $Q = (q_{ij})$, *where* q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *are numbers defined by the equalities* (1.5), *be placed in the unit circle. Then the problem* (1), (2) *may be solved.*

Theorem 2. *Let* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, $P_{ij}(t) = P_{ij} (i, j = 1, \ldots, n)$ *be constant and the spectrum of the matrix* $Q = (q_{ij})$, *where* q_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ *are numbers defined by the equalities* (1.6), *be placed in the unit circle. Then the problem* (1), (2) *may be solved.*

Theorem 3. *Let* $\alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, *the inequalities* (1.7) *be fullfilled in the domain* D^n_{ab} *and the functions* $P_i(t)$, $P_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *satisfy either the conditions of Theorem* 1, *or the conditions of Theorem* 2. *Then the problem* (1), (2) *has one and only one solution.*

Analogous theorems in the singular case when the functions $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, generally speaking, are non-summable in t in the segment $[a, b]$, are also given.