Matematický časopis

Zuzana Ladzianska

Модулярные подструктуры структуры

Matematický časopis, Vol. 24 (1974), No. 1, 81--84

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/127063`

Mat. čas. 24, 1974, No 1, 81—84

МОДУЛЯРНЫЕ ПОДСТРУКТЫ СТРУКТУРЫ

ЗУЗАНА ЛАДЗИАНСКА

В работе [1] доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы подмножество структуры L (или полной структуры L) порождало дистрибутивную подструктуру L (или вполне дистибутивную замкнутую подструктуру L).

О. Оре [2] указал следующую систему равенств P_1 для того, чтобы подструктура любой структуры, порожденная элементами x, y, z, была модулярной:

$$(1)\quad x \cup [y \cap (x \cup z)] = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

и 11 дальнейших равенств, возникающих из этого при помощи перестановки и двойственности,

$$(2)\quad [x \cup (y \cap z)] \cap (y \cup z) = [x \cap (y \cup z)] \cup (y \cap z)$$

и 2 дальнейших равенства, возникающих при помощи перестановки,

$$(3)\quad (x \cup y) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z) = [x \cap (y \cup z)] \cup [y \cap (x \cup z)]$$

и 5 дальнейших равенств, возникающих при помощи перестановки и двойственности.

Эта система имеет 21 равенство. Система P_1 не независима, как показывает теорема 1.

Теперь P_2 будет означать систему равенств (1′), (2), (3), где

$$(1')\quad \begin{aligned} x \cup [y \cap (x \cup z)] &= (x \cup y) \cap (x \cup z), \\ y \cup [z \cap (y \cup x)] &= (y \cup z) \cap (y \cup x), \\ z \cup [x \cap (z \cup y)] &= (z \cup x) \cap (z \cup y) \end{aligned}$$

и 3 дальнейших двойтсвенных равенства.
Система P_2 имеет 15 равенств.

Теорема 1. *Имеет место* (1′) & (3) $\Rightarrow$ (1). *Поэтому система* P_2 *влечет систему* P_1.

Доказательство. Предположим, что имеет место (1′) и (3). Покажем, что имеет место (1). Для этого докажем равенство $y \cap [x \cup (y \cap z)] =$

$= (y \cap x) \cup (y \cap z)$. Согласно (3) имеем $z \cup (x \cap y) \geqq (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup \cup (x \cap z) = [x \cup (y \cap z)] \cap [y \cup (x \cap z)] \geqq y \cap [x \cup (y \cap z)]$, из чего получим $y \cap [z \cup (x \cap y)] \geqq y \cap [x \cup (y \cap z)]$. Из последнего наревенства согласно (1′) получаем $(y \cap z) \cup (y \cap x) = y \cap [z \cup (x \cap y)] \geqq y \cap [x \cup \cup (y \cap z)] \geqq (x \cap y) \cup (y \cap z)$. Итак, имеет место $y \cap [x \cup (y \cap z)] = = (y \cap x) \cup (y \cap z)$. Подобным образом мы получим остальные равенства.

Теорема 2. *Система* P_2 *независима.*

Доказательство. Структуры на рисунках 1—3 удовлетворяют всем условиям P_2, за исключением равенства $z \cap [x \cup (z \cap y)] = (z \cap x) \cup \cup (z \cap y)$ (рис. 1), $[z \cap (x \cup y)] \cup (x \cap y) = [z \cup (x \cap y)] \cap (x \cup y)$ (рис. 2), $[x \cup (y \cap z)] \cap [y \cup (x \cap z)] = (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)$ (рис. 3).

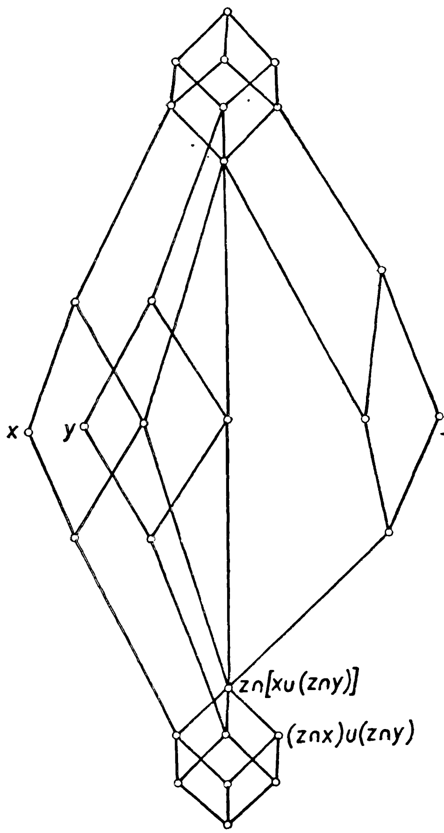

Рис. 1

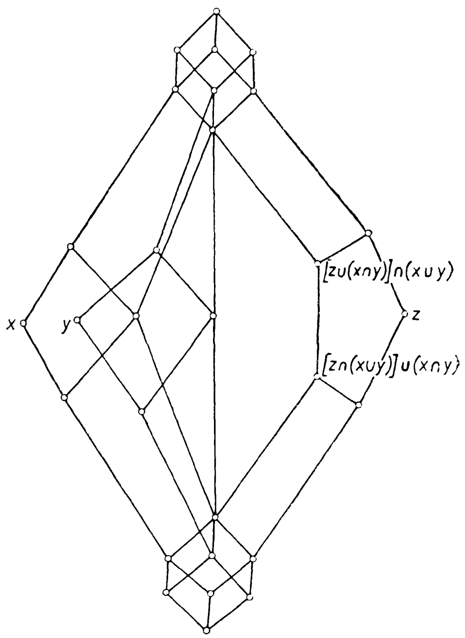

Рис. 2

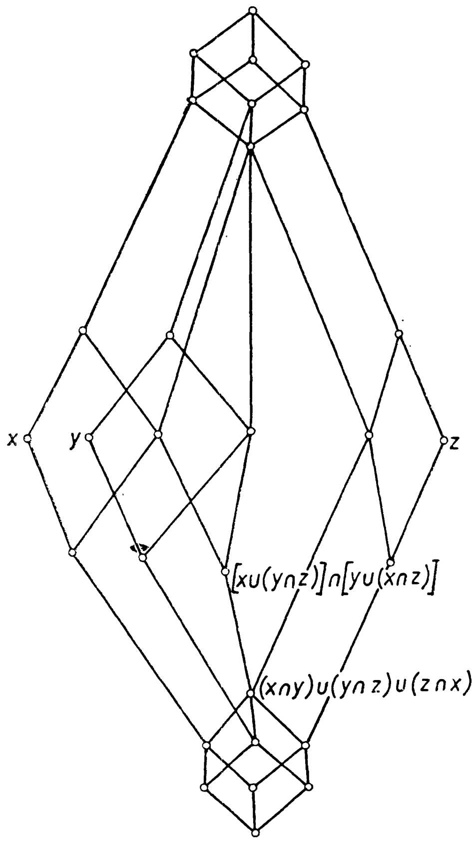

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

[1] KOLIBIAR, M.: Distributive sublattices of a lattice, Proc. Amer. Math. Soc. *34*, 1972, 359—364.

[2] ORE, O.: Remarks on structures and group relations, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellsachaft in Zürich *85*, 1940, 4.

Поступило 12. 12. 1972

Matematický ústav
Slovenskej akadémie vied
Obrancov mieru 41
886 25 Bratislava

MODULAR SUBLATTICES OF A LATTICE

Zuzana Lazianska

Summary

A minimal system of conditions for three elements of a lattice to generate a modular sublattice is given.