Matematický časopis

Fritz Schweiger

Eine Bemerkung zu einer Arbeit von S. D. Chatterji

Matematický časopis, Vol. 19 (1969), No. 2, 89--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/127095

Matematický časopis 19 (1969), No. 2

EINE BEMERKUNG ZU EINER ARBEIT VON S. D. CHATTERJI

FRITZ SCHWEIGER, Wien (Österreich)

Sei $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ die Entwicklung einer Zahl $x \in (0,1)$ in einen regelmäßigen Kettenbruch und sei

$$I^{(n)}_{k_1 \ldots k_n} = \{x \in (0,1) | a_i = k_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

so hat Chatterji in [2] bewiesen:

Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Eigenschaft

$$P(I^{(n)}_{k_1 \ldots k_n}) = p_1(k_1) \ldots p_n(k_n) \tag{1}$$

so ist P singulär bezüglich des Lebesgueschen Maßes L. Der Beweis verläuft etwa so: Ist P absolut stetig bezüglich L, so folgt aus den Sätzen von Kuzmin und Lévy (siehe z. B. [1]):

$$\lim_{n \to \infty} P(T^{-n}E) = \mu(E) \tag{2}$$

Dabei ist $T : x \to \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right]$ die dem Kettenbruch zugeordnete Transformation und

$$\mu(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}x}{1 + x}$$

das zu L äquivalente invariante Maß. Aus (2) erkennt man:

$$\lim_{n \to \infty} p_n(k) = p(k)$$

Dies bedeutet, man kann sich auf den Fall

$$P(I^{(n)}_{k_1 \ldots k_n}) = p(k_1) \ldots p(k_n) \tag{3}$$

d. h. die $a_i(x)$ sind unabhängig gleichverteilt, beschränken. Anderseits besagt (2), daß $p(k) = \mu(I^{(1)}_k)$ und durch Einsetzen in Beispiele kommt man zu einem Widerspruch.

Da für den Jacobischen Algorithmus die explizite Gestalt des invarianten, zu L äquivalenten Maßes nicht bekannt — ein Analogon zu (2) richtig ist — möchte ich hier einen Beweis geben, daß μ nicht die Eigenschaft (3) besitzt, wobei nur von der Abschätzung

$$K_1 L(E) \leqslant \mu(E) \leqslant K_2 L(E) \tag{4}$$

Gebrauch gemacht werden soll (vgl. [3]).

Wäre nun $\mu(I^{(n)}_{k_1 \dots k_n}) = p(k_1) \dots p(k_n)$, d. h. die $a_i(x)$ unabhängig gleichverteilt bezüglich μ, so betrachten wir Intervalle $I^{(n)}_{k \dots k}$, wo alle $a_i = k$ sind. Wegen

$$L(I^{(n)}_{k \dots k}) = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}$$

gilt

$$\frac{C_1}{L(I^{(n)}_{k \dots k})} \leqslant \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}\right)^{2n} \leqslant \frac{C_2}{L(I^{(n)}_{k \dots k})}$$

wie man durch Auflösen der Differenzengleichung

$$q_{n+1} = k q_n + q_{n-1}$$

erkennt. Aus (3) und (4) folgt dann

$$p(k) = \left(\frac{2}{k + \sqrt{k^2 + 4}}\right)^2 \tag{5}$$

Betrachtet man Intervalle $I^{(2n)}_{ts \dots ts}$, d. h. $a_{2n-1} = t$ und $a_{2n} = s$, so gilt, wie man durch Auflösen der Differenzengleichung

$$q_{2n+4} = (st + 2) q_{2n+2} - q_{2n}$$

(man erhält diese aus $q_{2n+1} = t q_{2n} + q_{2n-1}$ und $q_{2n+2} = s q_{2n+1} + q_{2n}$) erkennt

$$\frac{C_3}{L(I^{(2n)}_{ts \dots ts})} \leqslant \left(\frac{st + 2 + \sqrt{s^2t^2 + 4st}}{2}\right)^{2n} \leqslant \frac{C_4}{L(I^{(2n)}_{ts \dots ts})}$$

Daraus folgt

$$p(t)p(s) = \left(\frac{2}{st + 2 + \sqrt{s^2t^2 + 4st}}\right)^2 \tag{6}$$

Für $s = 1$ und $t = 2$ führen aber (5) und (6) zu einem Widerspruch.

Dem Referenten danke ich noch für seine hilfreichen Bemerkungen zu dieser Arbeit.

LITERATUR

[1] Khintchine A. Ya., *Continued fractions*, Groningen 1963.
[2] Chatterji S. D., *Maße, die von regelmäßigen Kettenbrüchen induziert sind*, Math. Ann. *164* (1966), 113—117.
[3] Schweiger F., *Existenz eines invarianten Maßes beim Jacobischen Algorithmus*, Acta arithm. *12* (1967), 263—268.
Eingegangen am 20. 2. 1967.

Mathematisches Institut
der Universität,
Wien, Österreich