

J. E. Boillat

Constante de Cheeger et première valeur propre non nulle du Laplacien d'un graphe de petite dimension

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 43 (1993), No. 2, 205–219

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/128408>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1993

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

CONSTANTE DE CHEEGER
ET PREMIÈRE VALEUR PROPRE NON NULLE DU LAPLACIEN
D'UN GRAPHE DE PETITE DIMENSION

J. E. BOILLAT, Berne

(Reçu le 10 juillet, 1991)

1. INTRODUCTION

Dans cet article, on se propose d'étudier les liens entre la constante de Cheeger (appelée aussi nombre isopérimétrique) et la première valeur propre non nulle du Laplacien des graphes connexes valués. La méthode utilisée s'inspire de techniques analogues à celles développées par Fiedler [3] pour déterminer les relations entre la mesure d'irréductibilité et les valeurs propres de l'opérateur de Poisson d'un graphe valué. Nous montrons que l'on peut appliquer cette méthode aux graphes de petites dimensions et nous déterminons une borne inférieure pour la première valeur propre non nulle du Laplacien d'un graphe connexe valué.

1.1. Notations, définitions et lemmes utiles.

Dans cet article, un graphe G est un graphe fini, non orienté, connexe et sans boucles. On désigne par E_G l'ensemble des arêtes de G et par V_G l'ensemble de ses sommets (ou plus simplement par E et V si aucune confusion n'est possible). Un sous-graphe H de G est un sous-ensemble des sommets de G muni de toutes les arêtes de G reliant deux à deux ses sommets. Une valuation d'un graphe G est une application associant à chaque arête (i, j) de G un réel positif $c_{ij} = c_{ji}$. On posera $c_{ii} = \sum_{(i,j) \in E(G)} c_{ij}$.

Définition 1.1. (Matrice d'adjacence généralisée.) On appelle matrice d'adjacence généralisée de G la matrice symétrique A^C telle que

$$(1.1) \quad A_{ij}^C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_{ij} & \text{si } (i, j) \in E_G, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.2. (Matrice de valence généralisée.) On appelle matrice de valence généralisée de G la matrice diagonale D^C telle que

$$(1.2) \quad D_{ii}^C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(i,j) \in E_G} c_{ij}.$$

On remarquera que $c_{ii} = d_{ii}$.

Définition 1.3. (Laplacien.) Le Laplacien de G est la forme quadratique q^C sur G dont la matrice est donnée par

$$(1.3) \quad \Delta^C \stackrel{\text{def}}{=} D^C - A^C.$$

On remarquera que

$$(1.4) \quad q(x) = (\Delta^C x, x) = \sum_{(i,j) \in E_G} c_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

Soit e le vecteur $(1, 1, \dots, 1)^T$. Comme $\Delta e = 0$ et Δ est positive semi-définie, 0 est la plus petite valeur propre de Δ^C . Comme G est connexe, Δ^C est irréductible et e est l'unique solution linéairement indépendante de $(\Delta^C x, x) = 0$ donc 0 est une valeur propre de multiplicité 1 du Laplacien. Soient $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de Δ . Dans le reste de cet article, on s'intéressera en particulier à λ_2 , la première valeur propre non nulle de Δ .

Remarque 1.1. Lorsque G est muni de la valuation constante 1, la matrice d'adjacence généralisée A^C est la matrice d'adjacence de G , la matrice de valence généralisée D^C est la matrice de valence de G .

Dorénavant on utilisera la notation Δ , D et A à la place de Δ^C , D^C et A^C si aucune confusion n'est possible.

Définition 1.4. (Degré généralisé.) On appelle degré maximal (minimal) généralisé les grandeurs suivantes:

$$(1.5) \quad M_G \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in V_G} c_{ii},$$

$$(1.6) \quad m_G \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in V_G} c_{ii}.$$

Définition 1.5. (Volume.) Le volume $|H|$ d'un sous-graphe H de G est le cardinal de l'ensemble des sommets V_H de H c'est à dire

$$(1.7) \quad |H| = \text{card}(V_H).$$

Définition 1.6. (Bord.) Le bord ∂H d'un sous-graphe H de G est l'ensemble de toutes les arêtes e reliant un sommet de H à un élément de $V_G - V_H$.

Définition 1.7. (Aire.) L'aire $|\partial H|$ d'un sous-graphe H de G est la somme pondérée par C des éléments de ∂H c'est à dire

$$(1.8) \quad |\partial H| = \sum_{e \in \partial H} c_e.$$

Définition 1.8. (Constante de Cheeger.) La constante de Cheeger i_G du graphe G appelée aussi nombre isopérimétrique de G est définie comme suit

$$(1.9) \quad i_G \stackrel{\text{def}}{=} \min_H \frac{|\partial H|}{\min(|H|, |G-H|)}.$$

La constante de Cheeger correspond au plus petit rapport aire / volume ($\frac{|\partial H|}{|H|}$) d'un sous graphe H de G contenant au plus la moitié des sommets de G . Si on identifie G à un modèle rudimentaire de réseau téléphonique, i_G peut être considérée comme une mesure de congestion des lignes lorsque les abonnés du sous graphe H communiquent avec les abonnés du sous graphe $G-H$.

Si A est une matrice carrée $n \times n$ et $N = \{1, 2, \dots, n\}$. On peut aussi définir un nombre isopérimétrique algébrique de A de la façon suivante:

$$(1.10) \quad i_{ALG}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\emptyset \neq M \subsetneq N} \frac{\sum_{i \in M, j \in N-M} a_{ij}}{\min(|M|, |N-M|)}.$$

Définition 1.9. (Mesure d'irréductibilité.) La mesure d'irréductibilité du graphe G , notée μ_G est l'aire minimale d'un sous-graphe non trivial H de G , c'est à dire

$$(1.11) \quad \mu_G \stackrel{\text{def}}{=} \min_H |\partial H|.$$

La mesure d'irréductibilité (algébrique) a été introduite par [3] pour les matrices doublement stochastiques. La mesure d'irréductibilité satisfait de façon triviale $\mu_G \geq i_G$.

Définition 1.10. (Valuation unitaire et subunitaire.) Une valuation C est unitaire si

$$c_{ii} = 1 \quad \forall i$$

elle est subunitaire si

$$c_{ii} \leq 1 \quad \forall i.$$

Définition 1.11. (Opérateur de Poisson.) Soit G graphe muni d'une valuation subunitaire C . L'opérateur de Poisson P^C de G est la matrice

$$(1.12) \quad P^C \stackrel{\text{def}}{=} I - \Delta^C.$$

Remarque 1.2. L'opérateur de Poisson P^C du graphe G est une matrice stochastique symétrique.

Remarque 1.3. On peut associer à chaque valuation C une valuation subunitaire C_0 en divisant tous les poids c_e des arêtes par M_G . On pourrait aussi associer au Laplacien un opérateur de Poisson généralisé $P = M_G I - \Delta$ obtenant ainsi une matrice stochastique généralisée (la somme des éléments de chaque ligne valant M_G).

On notera P à la place de P^C si aucune confusion n'est possible.

Soit G_n l'ensemble des graphes valués à n sommets et désignons par Δ_n l'ensemble des matrices des Laplaciens associés.

Lemme 1.1. Si $A \in \Delta_n, B \in \Delta_n, \alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ alors

$$(1.13) \quad \alpha A + \beta B \in \Delta_n,$$

$$(1.14) \quad i(\alpha A + \beta B) \geq \alpha i(A) + \beta i(B).$$

Preuve. La première affirmation est triviale. Il existe $M \subset N$ tel que

$$i(\alpha A + \beta B) = \sum_{i \in M, j \notin M} \alpha a_{ij} + \beta b_{ij} \geq \alpha i(A) + \beta i(B).$$

□

Nous terminons ce paragraphe par la définition de quelques graphes par leurs matrices d'adjacence.

$P_n(z)$ est le chemin à n sommets muni de la valuation constante z

$$P_n(z) = z \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_n(z)$ est le circuit à n sommets muni de la valuation constante z

$$C_n(z) = z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$K_n(z)$ est le graphe complet à n sommets muni de la valuation constante z

$$K_n(z) = z \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Rappel de quelques résultats.

Nous rappelons ici quelques résultats importants mettant en relation la première valeur propre non nulle du Laplacien, la constante de Cheeger et la mesure d'irréductibilité des graphes valués.

Théorème 1.1. *Soit G un graphe valué. Soit λ_2 est la première valeur propre non nulle du Laplacien de G , on a :*

$$\lambda_2 \leq 2i_G.$$

Preuve. Choisissons un sous graphe H de G , tel que $|H| < |G - H|$ et $i_G = \frac{|\partial H|}{|H|}$. On pose $k = |H|$, $l = |G - H|$ et on définit le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ par

$$x_i = \begin{cases} l & \text{si } i \in H, \\ -k & \text{si } i \in G - H. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} &= \sum_{(i,j) \in E_G} c_{ij} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{(i,j) \in E_H} c_{ij} (x_i - x_j)^2 + \sum_{(i,j) \in E(G-H)} c_{ij} (x_i - x_j)^2 \\ &\quad + \sum_{(i,j) \in \partial H} c_{ij} (x_i - x_j)^2 \\ &= 0 + 0 + (l + k)^2 |H| \frac{|\partial H|}{|H|} \\ &= k(l + k)^2 i_G \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\leq \frac{x^T \Delta x}{\|x\|^2} \\ &\leq \frac{k(l+k)^2}{kl^2 + lk^2} i_G \\ &\leq \frac{l+k}{l} i_G \\ &\leq 2i_G. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4. Soit $K_{2n}(c)$ le graphe complet à $2n$ sommets, muni d'une valuation constante c , alors

$$i(K_{2n}(c)) = nc$$

et

$$\lambda_2(K_{2n}(c)) = 2nc$$

donc

$$\lambda_2(K_{2n}(c)) = 2i(K_{2n}(c))$$

c'est à dire, à constante de Cheeger donnée, K_{2n} a la plus grande première valeur propre non nulle du Laplacien. (Se référer à [4] pour le calcul de $i(K_{2n}(1))$ et à [3] pour le calcul de $\lambda_2(K_{2n}(c))$)

Théorème 1.2. Soit G un graphe valué. Si λ_2 est la première valeur propre non nulle du Laplacien de G , on a :

$$\frac{i_G^2}{2M_G} \leq \lambda_2.$$

Preuve. Voir [2], [1] et [4]

□

Théorème 1.3. Soit D_n l'ensemble de toutes les matrices $n \times n$ ($n \geq 2$) stochastiques et symétriques et considérons l'application Γ de D_n dans le plan donnée par

$$\Gamma(A) = (\mu(A), 1 - \lambda_{n-1}(A))$$

où $\lambda_{n-1}(A)$ est la deuxième plus grande valeur propre de A . Alors l'image R de D_n par Γ est un quadrilatère, dont les sommets sont $V_0 = (0, 0)$, $V_1 = (\frac{1}{2}, 1 - \cos \frac{\pi}{n})$, $V_2 = (1, 1 - \cos \frac{2\pi}{n})$ et $V_3 = (1, \frac{n}{n-1})$. Si $n = 3$, $V_2 = V_3$ et R est un triangle; si $n = 2$, $V_2 = V_3$, $V_1 \in V_0V_2$ et R est un segment.

Preuve. Voir [3]. On notera que V_1 correspond à $\Gamma(P_n(\frac{1}{2}))$, V_2 à $\Gamma(C_n(\frac{1}{2}))$ et V_3 à $(\Gamma(K_n(\frac{1}{n-1})))$

□

2. CHEMIN VALUÉ MINIMAL

On définit la fonction $f: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ de la façon suivante:

$$(2.1) \quad f(k) = \begin{cases} \min(k, n-k), & k < n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

et on notera $G_n(z)$ l'ensemble des Graphes dont la constante de Cheeger vaut z .

Théorème 2.1. Soit $\hat{P}_n(z)$ le segment à n sommets muni de la valuation

$$(2.2) \quad c_{i,j} = \begin{cases} f(i)z & j = i + 1, \\ f(j)z & j = i - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$(2.3) \quad i_{\hat{P}_n(z)} = z$$

et si $G \in G_n(z)$ alors

$$(2.4) \quad \lambda_2(G) \geq \lambda_2(\hat{P}_n(z)).$$

Preuve. On identifiera les sommets de $\hat{P}_n(z)$ avec l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. La valuation de $\hat{P}_n(z)$ est construite de manière à ce que chaque sous graphe H_m tel que $V_{H_m} = \{1, 2, \dots, m\}$, ($m \leq n$) soit un sous graphe isopérimétrique. Le calcul de $i_{\hat{P}_n(z)}$ est immédiat.

La preuve de la deuxième affirmation est analogue à celle du théorème 1.3:

Désignons par $\Delta_n(z)$ l'ensemble des Laplaciens associés aux graphes de $G_n(z)$. Soit S_n l'ensemble des vecteurs unitaires orthogonaux à e et considérons S'_n l'ensemble de tous les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ de S_n tels que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ alors

$$\begin{aligned} \min_{A \in \Delta_n(z)} \lambda_2(z) &= \min_{A \in \Delta_n(z)} \min_{x \in S_n} x^T A x \\ &= \min_{x \in S_n} \min_{A \in \Delta_n(z)} x^T A x \\ &= \min_{x \in S'_n} \min_{A \in \Delta_n(z)} x^T A x. \end{aligned}$$

Car si P est une matrice de permutation et $A \in \Delta_n(z)$ alors $PAP^T \in \Delta_n(z)$.

Soit

$$(2.5) \quad v_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, \dots, 0)^T \quad k = 1, \dots, n$$

et considérons la matrice $Z = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, c'est à dire

$$(2.6) \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & 1 \\ & 1 & . & . & . & 1 \\ & & 1 & . & . & 1 \\ & & & . & . & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On remarquera que

$$(2.7) \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & . & . & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Avant de terminer la preuve, nous avons encore besoin des résultats de deux petits lemmes.

Lemme 2.1. Si $A \in \Delta_n(z)$

$$(2.8) \quad \begin{aligned} v_k^T A v_k &\geq f(k)z, & k < n, \\ v_k^T A v_m &\geq 0, & k < m, \\ v_k^T A v_n &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $M_k = \{1, \dots, k\}$. On remarquera que

$$\begin{aligned} v_k^T A v_k &= \sum_{(i,j) \in \partial M_k} c_{ij} \\ &= |\partial M_k| \\ &= f(k) \frac{|\partial M_k|}{f(k)} \\ &\geq f(k)z. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 (Av_m)_i &= \sum_{j=1}^m a_{ij} \\
 &= c_{ii} - \sum_{(i,j) \in M_m} c_{ij} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad v_k^T \hat{P}_n(z) v_k &= f(k)z, & k < n, \\
 v_k^T \hat{P}_n(z) v_m &= 0, & k < m, \\
 v_k^T \hat{P}_n(z) v_n &= 0.
 \end{aligned}$$

Preuve. Immédiat

□

Considérons la matrice

$$(2.10) \quad U = Z^T A Z - Z^T \hat{P}_n(z) Z.$$

Il découle des lemmes 2.1 et 2.2 que $u_{ij} \geq 0 \forall i, j = 1, \dots, n$. Si $x \in S'_n$, on pose $y = Z^{-1}x$ et on remarquera que $y_i \geq 0$ si $i < n$. On obtient donc

$$y^T U y = \sum_{i,j=1}^n u_{ij} y_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} u_{ij} y_i y_j \geq 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
 0 &\leq y^T U y \\
 &\leq x^T (Z^{-1})^T [Z^T A Z - Z^T \hat{P}_n(z) Z] Z^{-1} x \\
 &\leq x^T A x - x^T \hat{P}_n(z) x.
 \end{aligned}$$

Donc

$$(2.11) \quad \lambda_2(A) \geq \lambda_2(P_n(z)).$$

□

4. GRAPHE À 4 SOMMETS

Théorème 4.1. Soit \hat{G}_4 l'ensemble de tous les graphes G non complets à 4 sommets munis d'une valuation subunitaire et considérons l'application Γ de \hat{G}_4 dans le plan donnée par

$$\Gamma_G = (i_G, \lambda_2(G)).$$

Alors l'image par Γ de \hat{G}_4 est contenue dans un quadrilatère dont les sommets sont $U_0 = (0, 0)$, $U_1 = \hat{P}_4(\frac{1}{3})$, $U_2 = DC_4$ et $U_3 = C_4(\frac{1}{2})$ où DC_4 est le graphe dont la matrice d'adjacence généralisée vaut

$$DC_4 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les arêtes du quadrilatère sont toutes réalisées par des graphes, exceptée celle joignant l'image des graphes DC_4 et $C_4(\frac{1}{2})$. La frontière exacte est dans ce cas l'arc de parabole $(i, 1 - \sqrt{2 - 6i + 5i^2})$, $i \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ (voir figure 1).

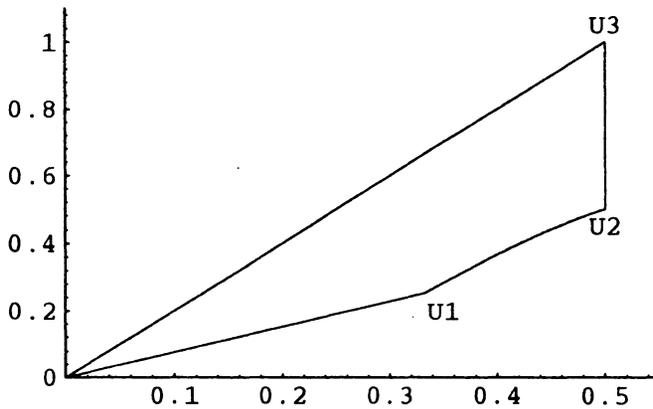


Figure 1. Domaine des graphes non complets à 4 sommets munis d'une valuation subunitaire.

Preuve. On traite chaque arête du quadrilatère séparément:

- Le cas du segment de l'origine à U_1 a déjà été traité plus haut (corrolaire 2.2)
- Dans le système de coordonnées (i, λ) , le segment de l'origine à U_3 a une pente de 2 qui réalise l'inégalité $\lambda \leq 2i$ du théorème 1.1.

- Chaque graphe non complet à 4 sommets a un nombre isopérimétrique plus petit ou égal à $\frac{1}{2}$. En effet, la matrice d'adjacence d'un tel graphe peut être mise sous la forme

$$\begin{pmatrix} a+b & -a & -b & 0 \\ -a & a+c+d & -c & -d \\ -b & -c & b+c+e & -e \\ 0 & -d & -e & d+e \end{pmatrix}$$

et on peut admettre que $a \geq b$ on en déduit que

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a+c+d &\leq 1, \\ a+b-2a &\leq 0, \\ b+c+d &\leq 1. \end{aligned}$$

Or $b+c+d = |\partial\{1,2\}|$ et

$$i_G \leq \frac{|\partial\{1,2\}|}{|\{1,2\}|} \leq \frac{1}{2}$$

selon la dernière inégalité 4.1.

Soit $B(t) = (1-t)C_4(\frac{1}{2}) + tDC_4$, ($0 \leq t \leq 1$). On vérifie facilement que $i_{B(t)} = \frac{1}{2}$ et que $\lambda_2(B(t)) = \frac{2-t}{2}$, ($0 \leq t \leq 1$). L'arête de U_2 à U_3 est donc l'image par Γ de graphes de \hat{G}_4

- Pour traiter le domaine situé entre $\Gamma(\hat{P}_4(\frac{1}{3}))$ et $\Gamma(DC_4)$, nous avons tout d'abord besoin des lemmes suivants:

Lemme 4.1. Soit $G_n(z)$ l'ensemble des graphes munis d'une valuation subunitaire et dont la constante de Cheeger vaut z et désignons par $\Delta_n(z)$ l'ensemble des Laplaciens associés, alors si $A \in \Delta_n(z)$

$$(4.2) \quad \begin{aligned} v_k^T A v_{k+1} &\geq \frac{1}{2}((f(k) + f(k+1))z - 1), \quad k < n-1, \\ v_{n-1}^T A v_n &= 0. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme. Comme la valuation est subunitaire, $a_{k+1,k+1} \leq 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 1 &\geq a_{k+1,k+1} \\ &\geq (v_{k+1}^T - v_k^T)A(v_{k+1} - v_k) \\ &\geq v_k^T A v_k + v_{k+1}^T A v_{k+1} - v_{k+1}^T A v_k - v_k^T A v_{k+1} \end{aligned}$$

d'autre part comme A est symétrique, $v_{k+1}^T A v_k = v_k^T A v_{k+1}$ donc

$$\begin{aligned} v_{k+1}^T A v_k &\geq \frac{1}{2}(v_{k+1}^T A v_{k+1} + v_k^T A v_k - 1) \\ &\geq \frac{1}{2}((f(k) + f(k+1))z - 1). \end{aligned}$$

□

Lemme 4.2. Soit

$$A(z) = 3(1 - 2z)\hat{P}_4\left(\frac{1}{3}\right) + 2(3z - 1)DC_4 \quad \frac{1}{3} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

alors

k	$v_k^T A(z) v_k$	$v_k^T A(z) v_{k+1}$	$v_k^T A(z) v_{k+2}$
1	z	$\frac{1}{2}(3z - 1)$	0
2	$2z$	$\frac{1}{2}(3z - 1)$	0
3	z	0	-
4	0	-	-

de plus

$$(4.3) \quad \lambda_2(A(z)) = 1 - \sqrt{2 - 6z + 5z^2}.$$

Preuve du Lemme. On remarquera que

$$A(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2z & z-1 & 1-3z & 0 \\ z-1 & 2 & 2z-2 & 1-3z \\ 1-3z & 2z-2 & 2 & z-1 \\ 0 & 1-3z & z-1 & 2z \end{pmatrix}.$$

Le reste de la preuve est immédiat

□

Une preuve analogue à celle du théorème 2.1 permet de montrer que si $A \in \Delta_n(z)$ $\frac{1}{3} \leq z \leq \frac{1}{2}$ alors

$$\lambda_2(A) \geq \lambda_2(A(z)).$$

□

Remarque 4.1. Le résultat précédent montre que l'inégalité du théorème 1.2 est faible en petites dimensions. En effet, cette inégalité prévoit un domaine plutôt convexe, alors qu'il est concave en réalité. Plus précisément, le domaine est étoilé par rapport à l'origine, c'est à dire que si $(x, y) \in R$ alors $(\alpha x, \alpha y) \in R$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). En effet, si $G \in \hat{G}_4$ alors il est facile de vérifier que $i_t G = t i_G$ et $\lambda_2(tG) = t \lambda_2(G)$, ($0 \leq t \leq 1$). L'application γ est donc surjective.

La technique de démonstration du théorème 1.3 ne s'applique plus au cas de tous les graphes à 4 sommets (graphes complets inclus). Une des frontières du domaine est donnée par le segment joignant l'origine à $\Gamma(K_4(\frac{1}{4}))$ (théorème 1.1). Une génération de graphes aléatoires réalisée avec le programme Mathematica¹ [5] permet de trouver le chaînon manquant entre DC_4 et $K_4(\frac{1}{4})$. Nous pouvons donc formuler la conjecture suivante²:

Conjecture 1. Soit G_4 l'ensemble de tous les graphes G à 4 sommets munis d'une valuation subunitaire et considérons l'application Γ de G_4 dans le plan définie par

$$\Gamma_G = (i_G, \lambda_2(G)).$$

Alors l'image par Γ de G_4 est contenue dans un polygone à 5 sommets: $W_0 = (0, 0)$, $W_1 = \Gamma(\hat{P}_4(\frac{1}{3}))$, $W_2 = \Gamma(DC_4)$, $W_3 = \Gamma(T_4)$ et $W_4 = \Gamma(K_4(\frac{1}{4}))$ où T_4 est le graphe dont la matrice d'adjacence généralisée vaut

$$T_4 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les arêtes du polygone sont toutes réalisées par des graphes, exceptées celle joignant l'image des graphes DC_4 et P_4 (la frontière exacte est donnée par l'arc de parabole $(i, 1 - \sqrt{2 - 6i + 5i^2}) \quad i \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$) et celle joignant DC_4 et T_4 (la frontière exacte est donnée par l'arc de parabole $(i, \frac{-2+7i-\sqrt{12-44i+41i^2}}{2}) \quad i \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$) (voir Figure 2).

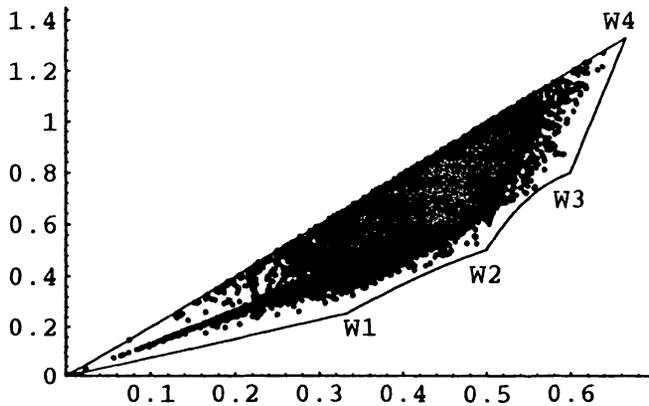


Figure 2. 10,000 graphes aléatoires et frontières probables du domaine des graphes à 4 sommets munis d'une valuation subunitaire.

¹ Le graphe DC_4 a lui aussi été trouvé à l'aide d'une génération de graphes aléatoires

² On remarquera que les graphes complets posent aussi certains problèmes dans la démonstration d'une version stricte du théorème 1.2 faite par Mohar [4]

References

- [1] *B. Colbois*: Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien des surfaces à courbure -1 , PhD thesis, Université de Lausanne, 1987.
- [2] *J. Dodziuk*: Difference Equations, Isoperimetric Inequalities and Transience of certain Random Walks, *Transaction of the American Mathematical Society* *284*(2) (1984), 787–794.
- [3] *M. Fiedler*: Bounds for Eigenvalues of Doubly Stochastic Matrices, *Linear Algebra and its Applications* *5* (1972), 299–310.
- [4] *B. Mohar*: Isoperimetric Numbers of Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* *47* (1989.), 274–291.
- [5] *S. Wolfram*: *Mathematica*, Addison-Wesley, Redwood City, 1988.

L'adresse de l'auteur: Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées, Université de Berne, Länggassstraße 51, CH-3012 Berne, e-mail: boillat@iam.unibe.ch.