Mathematica Slovaca

Milan Matejdes

Quelques remarques sur la quasi-continuité des multifonctions

Mathematica Slovaca, Vol. 37 (1987), No. 3, 267--271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/128759

Math. Slovaca 37, 1987, No. 3, 267—271

QUELQUES REMARQUES SUR LA QUASI-CONTINUITÉ DES MULTIFONCTIONS

MILAN MATEJDES

Dans l'article présent, nous démontrerons deux théorèmes sur un ensemble des points de semi-discontinuité inférieure (supérieure) d'une multifonction continue au sens certain (voir déf. 1) de la façon analogue élaborée par Ewert (voir [1] pour une multifonction semi-quasi-continue supérieurement (inférieurement)). Une démonstration analogue a été donnée par Fort dans [2] pour la semi-continuité.

Soient X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique avec la distance d. Nous supposons que I soit un σ-idéal de tous les ensembles de I-e catégorie dans X et $\mathscr{B}_0$ soit la famille de tous les sous-ensembles de X de II-catégorie qui jouissent de la propriété de Baire. Soit $\mathscr{G}$ la famille de tous les sous-ensembles ouverts non vides de X et soit $\mathscr{G} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0 \cup \mathscr{G}$. Soit $F\colon X \to Y$ une multifonction telle que $F(x)$ est comact non vide pour chaque $x \in X$.

Définition 1. *Une multifonction F est dite u-$\mathscr{B}$-continue (l-$\mathscr{B}$-continue) au point x_1, lorsque pour chaque ensemble ouvert $G \subset Y$ tel que $F(x_1) \subset G(F(x_1) \cap G \neq \emptyset)$ et pour chaque entourage U de x_1 il existe un ensemble $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subset U$ et $F(x) \subset G(F(x) \cap G \neq \emptyset)$ pour chaque $x \in B$.*

Remarque 1. La $\mathscr{B}$-continuité est le terme généralisé de la quasi-continuité (pour $\mathscr{B} = \mathscr{G}$).

Nous désignons: $K(y, \varepsilon) = \{z \in Y;\ d(z, y) < \varepsilon\}$, $d(y, A) = \inf\{d(y, a);\ a \in A\}$, $K(A, \varepsilon) = \{y \in Y;\ d(y, A) < \varepsilon\}$, $A \subset Y$. $C_F^+ (C_F^-)$ — l'ensemble des points de semi-continuité supérieure (inférieure) de la multifonction F.

$\bar{A}$ — la fermeture de A.

$\operatorname{int}(A)$ — l'intérieur de A.

Définition 2. *Une multifonction F est dite semi-continue supérieurement (inférieurement) au point x_1, lorsque pour chaque ensemble ouvert $G \subset Y$ tel que $F(x_1) \subset G$ $(F(x_1) \cap G \neq \emptyset)$ il existe un entourage U de x_1 tel que $F(x) \subset G$ $(F(x) \cap G \neq \emptyset)$ pour chaque $x \in U$.*

Lemme 1. *Pour qu' un ensemble A appartienne à I, il faut et il suffit que pour chaque ensemble $G \in \mathscr{G}$ il existe un ensemble $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subset G$ et $B \cap A \in I$.*

Démonstration. Nous montrerons que si $A \notin I$, alors il existe un ensemble $G \in \mathscr{G}$ tel que pour chaque ensemble $B \in \mathscr{B}$, $B \subset G$ on a $A \cap B \notin I$. Si $A \notin I$, alors $D(A) \neq 0$, d'après [3, p. 51], où $D(A)$ est l'ensemble des points où A n'est pas de I-e catégorie. $D(A)$ est fermé et $D(A) \notin I$, donc $\operatorname{int}(D(A)) \neq \emptyset$. Posons $G = \operatorname{int}(D(A))$. Soit $B \subset G$, $B \in \mathscr{B}$. Si $B \in \mathscr{G}$, alors $B \cap A \notin I$. Si $B \in \mathscr{B}_0$, alors $B = (H_0 \setminus I_1) \cup I_2$ où $H_0 \in \mathscr{G}$, I_1, $I_2 \in I$ et $H_0 \cap G \neq \emptyset$. (Si $H_0 \cap G = \emptyset$, alors on a: $B = B \cap G = ((H_0 \setminus I_1) \cap G) \cup (G \cap I_2) \in I$). Posons $H = H_0 \cap G$. Parce que $H \cap A \notin I$, donc
$A \cap B = (H_0 \cap A \setminus I_1 \cap A) \cup (I_2 \cap A) \supset (H \cap A \setminus I_1 \cap A) \cup (I_2 \cap A) \notin I$.
La condition nécessaire est évidemment réalisée.

Théorème 1. *Si une multifonction F est u-$\mathscr{B}$-continue, alors tous les points de semi-discontinuité inférieure de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. Soit $N(F(x), \varepsilon) = \min\{n \geqq 1$, il existe des points y_1, $y_2, \ldots, y_n$ tels que $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i, \varepsilon)\}$. Nous désignons par le symbole $N(n, \varepsilon)$ un ensemble de tous les points $x \in X$ tel que $N(F(x), \varepsilon) = n$ et pour chaque $\varepsilon' \in (0, 3\varepsilon)$ et pour chaque entourage U de x, il existe un ensemble $S \in \mathscr{B}$ tel que $S \subset U$ et $F(x) \not\subset K(F(z), \varepsilon')$ pour chaque $z \in S$. Nous montrerons que l'ensemble $N(n, \varepsilon)$ est de I-e catégorie. Soit G un ensemble ouvert tel que $G \cap N(n, \varepsilon) \neq \emptyset$. Si $x \in G \cap N(n, \varepsilon)$, alors il existe des points y_1, y_2, ..., y_n tels que $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i, \varepsilon)$. La multifonction F est u-$\mathscr{B}$-continue au point x, il existe un ensemble $B_1 \in \mathscr{B}$ tel que $B_1 \subset G$ et $F(p) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(y_i, \varepsilon)$ pour chaque $p \in B_1$, d'où $N(F(p), \varepsilon) \leqq n$. Ou bien $B_1 \cap N(n, \varepsilon) \in I$ ou bien $B_1 \cap N(n, \varepsilon) \notin I$. Soit $B_1 \cap N\,(n, \varepsilon) \notin I$ L'ensemble $B_1 \notin I$, d'où $H = \operatorname{int}(D(B_1)) \neq \emptyset$. Il existe un point $x' \in B_1 \cap H \cap N(n, \varepsilon)$. Le point $x' \in N(n, \varepsilon)$, d'où il existe un ensemble $S \in \mathscr{B}$ tel que $S \subset H$ et $F(x') \not\subset K(F(t), 2\varepsilon)$ pour chaque $t \in S$. Soit $t \in S \cap B_1 \notin I$. On a $N(F(t), \varepsilon) \leqq n$ et il existe un point $y' \in F(x')$ tel que $y' \notin K(F(t), 2\varepsilon)$. Il existe j tel que $y' \in K(y_j, \varepsilon)$ et $K(y_j, \varepsilon) \cap F(t) = \emptyset$, d'où $F(t) \subset \bigcup\{K(y_i, \varepsilon), i \leqq n, i \neq j\}$, donc on a $N(F(t), \varepsilon) \leqq n - 1$. Il existe des points z_1, z_2, ..., z_{n-1} tels que $F(t) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} K(z_i, \varepsilon)$. La multifonction F est u-$\mathscr{B}$-continue au point t, d'où il existe un ensemble $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subset G$ et $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} K(z_i, \varepsilon)$ pour chaque $x \in B$, d'où $N(F(x), \varepsilon) \leqq n - 1$ pour chaque $x \in B$, donc $B \cap N(n, \varepsilon) = \emptyset$. D'après le lemme 1, $N(n, \varepsilon)$ est de I-e catégorie.

Nous montrerons que $X \setminus C_F^- \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon \in Q} N(n, \varepsilon)$, d'où $X \setminus C_F^-$ est de I-e catégorie, où Q est l'ensemble des nombres rationnels > 0. Si $x \in X \setminus C_F^-$, alors il existe $y \in F(x)$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour chaque entourage U de x il existe un point $z \in U$ tel que $F(z) \subset Y \setminus \overline{K(y, \varepsilon)}$. La multifonction F est u-$\mathscr{B}$-continue au point z, donc il existe un ensemble $S \subset U$, $S \in \mathscr{B}$ tel que $F(x_1) \subset Y \setminus \overline{K(y, \varepsilon)}$ pour chaque $x_1 \in S$. Il existe $n = n(x) = N(F(x), \varepsilon/3)$, d'où $x \in N(n, \varepsilon/3)$.

Le théorème est ainsi complétement démontré.

Soit $M(F(x), \varepsilon) = \sup\{m \geq 1$, il existe des points $y_1, y_2, \ldots, y_m \in F(x)$ tels que $d(y_i, y_j) > \varepsilon$ pour chaque $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j\}$. Nous désignons par le symbole $G(n, \varepsilon)$ l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que $M(F(x), \varepsilon) = n$ et pour chaque $\varepsilon' \in (0, 4\varepsilon)$ et pour chaque entourage U de x, il existe un ensemble $S \in \mathscr{B}$ tel que $S \subset U$ et $F(z) \not\subset K(F(x), \varepsilon')$ pour chaque $z \in S$ (comparez avec [1]).

Lemme 2. *Soit F l-$\mathscr{B}$-continue, soit $\varepsilon > 0$ et soit $B \in \mathscr{G}$ tel que $B \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Si pour chaque $A \in I$ il existe des points $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tels que $d(y_i, y_j) > 2\varepsilon$ pour chaque $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$ et $F(x) \cap K(y_i, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B \setminus A$ et pour chaque $i = 1, \ldots, k$ alors il existe un etnsemble $B_2 \in \mathscr{B}$ et un point $y_{k+1} \in Y$ tel que $B_2 \subset B$, $d(y_i, y_{k+1}) > 2\varepsilon$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et on a $F(x) \cap K(y_{k+1}, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_2$.*

Démonstration. Nous supposons que B est ouvert et $A \in I$. Soit $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tels que $d(y_i, y_j) > 2\varepsilon$ pour chaque $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$ et $F(x) \cap K(y_i, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et pour chaque $x \in B \setminus A$. Parce que $B \cap G(n, \varepsilon) \notin I$, il existe un point $x_0 \in B \cap G(n, \varepsilon) \setminus A$, d'où il existe un ensemble $S \subset B$, $S \in \mathscr{B}$ tel que $F(x_1) \not\subseteqq K(F(x_0, 3\varepsilon)$ pour chaque $x_1 \in S$, donc il existe un point $y_{k+1} \in F(x_1)$ tel que $d(y_{k+1}, F(x_0)) \geqslant 3\varepsilon$. Parce que $x_0 \in B \setminus A$, donc il existe des points $z_1, \ldots, z_k$ tels que $z_i \in F(x_0) \cap K(y_i, \varepsilon/4)$, $i = 1, \ldots, k$, d'où $d(y_{k+1}, z_i) \geqq 3\varepsilon$, donc $d(y_{k+1}, y_i) > 2\varepsilon$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$. Le point $x_1 \in B$ et la multifonction F est l-$\mathscr{B}$-continue au point x_1, d'où il existe un ensemble $B_2 \in \mathscr{B}$ tel que $B_2 \subset B$ et pour chaque $x \in B_2$ on a $F(x) \cap K(y_{k+1}, \varepsilon/4) \neq \emptyset$. La démonstration est achevée.

Dans [1, th. 4], l'auteur suppose que X soit l'espace extrêmement discontinu. Le théorème suivant montre que cette condition peut être supprimée (pour $\mathscr{G} = \mathscr{B}$ voir [1, th. 4])

Théorème 2. *Si une multifonction F est l-$\mathscr{B}$-continue, alors tous les points de semi-discontinuité supérieure de la multifonction F constituent un ensemble de I-e catégorie.*

Démonstration. Nous montrerons que l'ensemble $G(n, \varepsilon)$ est de I-e catégorie. Soit G un ensemble ouvert. On a deux cas. Ou bien $G \cap G(n, \varepsilon) \in I$ ou bien $G \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Soit $G \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Si $x_0 \in G \cap G(n, \varepsilon)$, alors il existe un ensemble $S \in \mathscr{B}$ tel que $S \subset G$ et $F(x_1) \not\subset K(F(x_0), 3\varepsilon)$ pour chaque $x_1 \in S$. Soit $x_1 \in S$ et $y_1 \in F(x_1)$. La multifonction F est l-$\mathscr{B}$- continue au point x_1, donc il existe un ensemble $B_1 \in \mathscr{B}$ tel que $B_1 \subset G$ et $F(x) \cap K(y_1, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_1$.

Ou bien $B_1 \cap G(n, \varepsilon) \in I$ ou bien $B_1 \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Si $B_1 \cap G(n, \varepsilon) \notin I$, alors $G \cap H_1 \cap G(n, \varepsilon) \notin I$ où $B_1 = (H_1 \setminus I_1) \cup I'_1$, $H_1 \in \mathscr{G}$, I_1, $I'_1 \in I$. D'après le lemme 2, il existe un ensemble $B_2 \in \mathscr{B}$ et un point $y_2 \in Y$ tel que $B_2 \subset H_1 \cap G$, $d(y_1, y_2) > 2\varepsilon$ et $F(x) \cap K(y_2, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_2$. On a $B_2 \subset B_1 \cup I_1$. Ou bien $B_2 \cap G(n, \varepsilon) \in I$ ou bien $B_2 \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ et $B_1 \subset G$, $B_i \subset G$, $B_i \subset B_{i-1} \cup I_{i-1}$, $I_{i-1} \in I$ pour chaque $i = 2, \ldots, n$ tels que $d(y_i, y_j) > 2\varepsilon$ pour chaque $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ et $F(x) \cap K(y_i, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_i$ et pour chaque $i = 1, \ldots, n$. Ou bien $B_n \cap G(n, \varepsilon) \in I$ ou bien $B_n \cap G(n, \varepsilon) \notin I$. Si $B_n \cap G(n, \varepsilon) \notin I$, alors $H_n \cap G \cap G(n, \varepsilon) \notin I$, où $B_n = (H_n \setminus I_n) \cup I'_n$, $H_n \in G$, I_n, $I'_n \in I$. D'après le lemme 2, il existe un ensemble $B_{n+1} \in \mathscr{B}$ et un point $y_{n+1} \in Y$ tel que $B_{n+1} \subset H_n \cap G$, $d(y_{n+1}, y_i) > 2\varepsilon$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$ et

$F(x) \cap K(y_{n+1}, \varepsilon/4) \neq \emptyset$ pour chaque $x \in B_{n+1}$. On a $B_{n+1} \subset B_n \cup I_n$. Soit $B_{n+1} = (H_{n+1} \setminus I_{n+1}) \cup I'_{n+1}$, où $H_{n+1} \in \mathscr{G}$, I_{n+1}, $I'_{n+1} \in I$. Parce que $B_i \subset$ $\subset B_{i-1} \cup I_{i-1}$ pour chaque $i = 2 \ldots, n+1$, donc on a $H_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i \subset \bigcap_{i=1}^{n+1} B_i$, d'où $M(F(x), \varepsilon) \geqq n+1$ pour chaque $x \in H_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} I_i$ donc $B_{n+1} \cap G(n, \varepsilon) \in I$ et d'après le lemme 1, $G(n, \varepsilon)$ est de I-e catégorie.

Nous montrerons que $X \setminus C_F^+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon \in Q} G(n, \varepsilon)$. Si $x_1 \in X \setminus C_F^+$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque entourage U de x_1, il existe un point $x \in U$ tel que $F(x) \not\subset K(F(x_1), 5\varepsilon)$. Soit $y \in F(x) \setminus KF((x_1), 5\varepsilon)$. La multifonction F est l-$\mathscr{B}$-continue au point x, donc il existe $S \in \mathscr{B}$, $S \subset U$ et $F(x_2) \cap K(y, \varepsilon/2) \neq \emptyset$ pour chaque $x_2 \in S$, il existe $n = M(F(x_1), \varepsilon/4)$, d'où $x_1 \in G(n, \varepsilon/4)$.

Deux exemples suivants montrent que dans le théorème 1 (le théorème 2) la u-$\mathscr{B}$-continuité (l-$\mathscr{B}$-continuité) ne peut pas être replacée par la l-$\mathscr{B}$-continuité (u-$\mathscr{B}$-continuité) (comparez avec [1, th. 2]).

Exemple 1. Soit F: $\langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$, $F(x) = \langle 0, 1 \rangle$ pour chaque $x \notin Q$ et $F(x) = \{0\}$ pour chaque $x \in Q$, où Q est des nombres rationnels dans $\langle 0, 1 \rangle$.

Exemple 2. Soit F: $\langle 0, 1 \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$, $F(x) = \langle 0, 1 \rangle$ pour chaque $x \in Q$ et $F(x) = \{0\}$ pour chaque $x \notin Q$.

OUVRAGES CITÉS

[1] EWERT, J.: On points of lower and upper quasi-continuity of multivalued maps. Math. Slovaca (sous presse).

[2] FORT, M. K.: Points of continuity of semicontinuous functions. Publ. Math. Debrecen, 2, 1951, 100—102.

[3] KURATOWSKI, C.: Topologie I, Warszawa 1952.

Matematický ústav SAV
Obrancov mieru 49
814 73 Bratislava

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КВАЗИ-НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Milan Matejdes

Резюме

В этой работе сформулированы некоторые условия, касающиеся полунепрерывности сверху (снизу), снизу (сверху) B-полунепрерывных многозначных отображений.