Pavol Marušiak

О колеблемости и монотонности решений нелинейных дифференвиалных уравнений с запаздывающим аргументом

Mathematica Slovaca, Vol. 26 (1976), No. 2, 139--152

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136115

Math. Slov., 26, 1976, No. 2, 139—152

О КОЛЕБЛЕМОСТИ И МОНОТОННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

ПАВОЛ МАРУШИАК (PAVOL MARUŠIAK)

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$[r(t)y^{(n-1)}(t)]' + F(t, y[h_0(t)], \ldots, y^{(n-1)}[h_{n-1}(t)]) = 0, \ n \geq 2, \tag{1}$$

где

$$r \in C[R_+ \equiv (0, \infty), (0, \infty)], \ \int^{\infty} \mathrm{d}s/r(s) = \infty \tag{2}$$

$$h_i \in C[R_+, R], \ h_i(t) \leq t \text{ для } \forall\, t \in R_+, \ i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3}$$

$$F \in C[D = R_+ \times R^n, R], \ x_1F(t, x_1, \ldots, x_n) > 0 \text{ для } \forall(t, x_1, \ldots, x_n) \in D, \ x_1 \neq 0 \tag{4}$$

Обозначим через $\mathbf{W}$ множество решений д. уравнения (1), существующих при всех $t \geq t_0$ и такое, что $y(t) \not\equiv 0$ при $t \geq \bar{t}$, $t_0 \leq \bar{t} < \infty$.

Решение $y(t) \in \mathbf{W}$ будем называть колеблющимся, если множество нулей неограничено справа. Решение $y(t) \in \mathbf{W}$, необладающее таким свойством, будем называть — неколеблющимся.

Определение 1. *Скажем, что д. уравнение* (1) *обладает свойством* A_0, *если каждое решение* $y(t) \in \mathbf{W}$ *при четном* n *является колеблющимся, и при нечетном* n — *либо колеблющимся, либо*

$$y^{(i)}(t), \ (i = 0, \ldots, n-2), \ r(t)y^{(n-1)}(t)$$

монотонно стремятся к нулю, когда $t \to \infty$.

Определение 2. *Скажем, что д. уравнение* (1) *обладает свойством* A_m ($m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$), *если каждое решение* $y(t) \in \mathbf{W}$ *является либо колеблющимся, либо*

$$y^{(i)}(t) \ (i = m, m+1, \ldots, n-2), \ r(t)y^{(n-1)}(t) \tag{5}$$

монотонно стремятся к нулю, когда $t \to \infty$.

Обозначим

$$R_k[t, u] = \int\limits_u^t \frac{(x - u)^k}{r(x)}\,\mathrm{d}x, \; k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

$$R_k[t] = \int\limits_T^t \frac{x^k}{r(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{для } \forall\; T \in R_+$$

В этой работе устанавливаются некоторые достаточные условия для того, чтобы уравнение (1) обладало свойством $A_m(m \in \{0, 1, \ldots, n - 1\})$. Упомянутая работа обобщает результаты в статьях [4, 8] и некоторые результаты из статей (1—3, 5—7, 9].

Лемма 1. *Пусть $y(t), \ldots, y^{(n-1)}t)$ абсолютно непрерывные на каждом конечном отрезке промежутка $< T_0, \infty)$ и пусть $y(t) \neq 0$, $t \geq T_0$ и такое, что*

(6) $$y(t)[r(t)y^{(n-1)}(t)]' \leq 0 \text{ при } t \geq T_0,$$

где $r(t)$ выполняет условие (2).

Тогда существуют $t_0 \geq T_0$, $к \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, $n + к$ нечетное число, такие, что соблюдаются неравенства

(7) $$y^{(i)}(t)y(t) \geq 0, \; i = 0, 1, \ldots, k, \; t \geq t_0$$

(8) $$(-1)^{k+i}\, y^{(i)}(t)y(t) \geq 0, \; i = k + 1, \ldots, n - 1, \; t \geq t_0.$$

Для $к = n - 1$ имеет силу

(9) $$|y^{(i)}(t)| \geq \frac{r(t)|y^{(n-1)}(t)|}{(n - i - 2)!} \int\limits_{t_0}^t \frac{(t - s)^{n-i-2}}{r(s)}\,\mathrm{d}s, \quad i = 0, 1, \ldots, n - 2$$

Если $к \in \{0, 1, \ldots, n - 3\}$, то

(10) $$|y^{(i)}(t)| \geq \bar{\mathrm{L}}_i\, t^{n-i-3}\, |y^{(n-3)}(t)|, \; t \geq 2^{n-k-2}\, t_0, \mathrm{L}_i = \frac{2^{-(n-2)^2}}{(n-i-3)\ldots(n-k-2)}$$
$$i = 0, 1, \ldots, k - 1$$

(11) $$|y^{(k)}(t)| \geq t^{n-k-3}\, |y^{(n-3)}(2^{n-k-3}\, t)], \; t \geq t_0$$

Доказательство. Обозначим $v(t) = r(t)y^{(n-1)}(t)$. Без ограничения общности можем сказать, что $y(t) > 0$ при $t \geq \bar{t}_0$. Потом ввиду (6) следует $v'(t) \leq 0$. Сперва докажем, что $y'^{n-1)}(t) \geq 0$ при $t \geq \bar{t}_0$. Допустим противное. Пусть существует $t_1 > \bar{t}_0$, такое, что $v(t_1) < 0$. В силу $v'(t) \leq \leq 0$ при $t \geq \bar{t}_0$ имеем:

$$y^{(n-1)}(t) \leq v(t_1)\frac{1}{r(t)} < 0 \qquad \text{при } t \geq t_1$$

Проинтегрировав последнее неравенство от t_1 до t, мы получим

$$y^{(n-2)}(t) \leq y^{(n-2)}(t_1) + v(t_1)R_0(t, t_1) \to -\infty \text{ пои } t \to \infty$$

из чего следует $y(t) < 0$ для достаточно больших t. Это противоречит $y(t) > 0$, $t > t_0$. Этим мы доказали $y^{(n-1)}(t) \geq 0$ при $t \geq \bar{t}_0$.

Для $y^{(n-2)}(t)$ возможны два случая:
Либо a, $y^{(n-2)}(t) \geq 0$, $t \geq \bar{T}_1 \geq \bar{t}_0$,
либо b, $y^{(n-2)}(t) \leq 0$, $t \geq \bar{t}_0$, $n \geq 3$.

a) Из неравенств $y^{(n-1)}(t) \geq 0$, $y^{(n-2)}(t) \geq 0$ при $t \geq \bar{T}_1$ следует $y^{(i)}(t) \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-3$, $t \geq T_1 \geq \bar{T}_1$. Используя формулу Тейлора, получим

$$(12)\quad y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{n-i-2} y^{(i+j)}(T_1)\frac{(t-T_1)^j}{j\,!} + \int_{T_1}^{t} y^{(n-1)}(s)\frac{(t-s)^{n-i-2}}{(n-i-2)\,!}\,\mathrm{d}s \geq$$

$$\geq \int_{T_1}^{t} \frac{v(s)}{(n-i-2)!}\,\frac{(t-s)^{n-i-2}}{r(s)}\,\mathrm{d}s,\ t \geq T_1$$

Если мы используем монотонность функции $v(t)$, имеем (9).

b) Пусть $y^{(n-2)}(t) \leq 0$, $y(t) > 0$ при $t \geq \bar{t}_0$. Потом существует такое число $T_2 \geq \bar{t}_0$, что $y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ сохраняют постоянные знаки при $t \geq T_2$. Согласно лемме 2 [7] существует такое число $k \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$, $n + k$ нечетное число, что при $t \geq T_2$ соблюдаются неравенства (7), (10), (11) и $(-1)^{k+i}\, y^{(i)}(t) \geq 0$, $i = k+1, \ldots, n-3$. Из последнего неравенства, в силу $y^{(n-1)}(t) \geq 0$, $y^{(n-2)}(t) \leq 0$, получаем (8), но при $t \geq T_2$.

Если мы обозначим $t_0 = \max\{T_1, T_2\}$, потом очевидно, что (7)—(11) имеют место тоже при $t \geq t_0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* 1, *выполнены условия леммы* 1; 2, *функции* $y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$ *сохраняют постоянные знаки при* $t \geq t_0 \geq T_0$; 3, *существует* $r'(t)$ *при* $t \geq t_0$, *причём либо* a, $r'(t) \geq 0$ *при* $t \geq t_0$, *либо* b, $r'(t) \leq 0$ *и* $\inf_{t > t_0} \dfrac{r(t)}{r(\nu t)} = a_0 > 0$, $0 < \nu < 1$.

Тогда существует такое число $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n + k$ *нечетное, что кроме* (7), (8) *имеет силу*

$$(13)\qquad |y^{(i)}(t)| \geq B_i t^{n-i-1}\, |y^{(n-1)}(t)|,\ t \geq 2^{n-k}\, t_0,\ B_i = a_0\, \frac{2^{-n^2}}{(n-i-1)!}$$

$$k \in \{1, \ldots, n-1\},\ i = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$(14)\qquad |y^{(k)}(t)| \geq \bar{B}_k t^{n-k-1}\, |y^{(n-1)}(2^{n-k-1}\, t)|,\ t \geq t_0,\ \bar{B}_k = a_0,$$

$$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Доказательство. Без ограничения общности можем предполагать, что $y(t) > 0$ при $t \geq t_0$. Из леммы 1 непосредственно следуют неравенства (7), (8).

I. Пусть $k = n-1$. Тогда из (12), применением формулы о среднем значении, получим

$$(15)\qquad y^{(i)}(t) \geq y^{(n-1)}(\nu t)\, \frac{(t-t_0)^{n-i-1}}{(n-i-1)!},\ 0 \leq t_0 < \nu t < t,$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Пусть имеет место условие 3a, леммы 2. Из условий $r'(t) \geq 0$ $[r(t)y^{(n-1)}(t)]' \leq 0$, $y^{(n-1)}(t) \geq 0$ при $t \geq t_0$ получаем, что $y^{(n-1)}(t)$ — не возрастающая в промежутке $\langle t_0, \infty)$ функция. Тогда из (15) следует

$$(13')\qquad y^{(i)}(t) \geq L_i\, t^{n-i-1}\, y^{(n-1)}(t),\ t \geq 2t_0,\ L_i = \frac{2^{-(n-i-1)}}{(n-i-1)!}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Если имеет место условие 3b, леммы 2, то из (15), принимая во внимание монотонность $r(t)y^{(n-1)}(t)$, вытекает

$$(13'')\qquad y^{(i)}(t) \geq \left[\inf_{t \geq t_0} \frac{r(t)}{r(\nu t)}\right] y^{(n-1)}(t)\, \frac{(t-t_0)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \geq$$

$$\geq a_0 L_i\, t^{n-i-1}\, y^{(n-1)}(t),\ t \geq 2t_0,\ i = 0, 1, \ldots, n-2$$

Тогда из (13′), (13″) получим (13), для $k = n-1$.

Ясно, что соблюдается неравенство (14) для $k = n-1$.

II. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$. Тогда в силу (8) получим

$$(16)\qquad y^{(n-1)}(t) \geq 0,\ y^{(n-2)}(t) \leq 0,\ y^{(n-3)}(t) \geq 0 \text{ при } t \geq t_0$$

i) Пусть имеет место условие 3a, леммы 2. Тогда в силу (16) и монотонности функции $y^{(n-1)}(t)$ получим

$$(17)\qquad y^{(n-3)}(t) \geq -\int_t^{2t} y^{(n-2)}(x)\mathrm{d}x \geq \int_t^{2t} x y^{(n-1)}(2x)\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq t^2\, y^{(n-1)}(4t), \quad t \geq t_0$$

Из (10), (11), ввиду (17) следует

$$y^{(i)}(t) \geq y^{(i)}(t/4) \geq L_i \frac{t^{n-i-1}}{4^{n-i-1}}\, y^{(n-1)}(t), \quad t \geq 2^{n-k}\, t_0$$

$$i = 0, 1, \ldots, k-1$$

$$y^{(k)}(t) \geq t^{n-k-1}\, y^{(n-1)}\, (2^{n-k-1}t), \quad t \geq t_0$$

чем мы доказали (13), (14).

ii) Пусть имеет силу 3b, леммы 2. Тогда ввиду (16) и монотонности фунцции $r(t)$ получаем

$$-\, r(t)y^{(n-2)}(t) \geq \int_t^{2t} (r(x)y^{(n-2)}(x))'\mathrm{d}x \geq \int_t^{2t} r(x)y^{(n-1)}\,(x)\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq t\, r(2t)\, y^{(n-1)}\,(2t),$$

$$r(t)y^{(n-3)}(t) \geq -\int_t^{2t} (r(x)y^{(n-3)}\,(x))'\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \int_t^{2t} xr(2x)y^{(n-1)}(2x)\mathrm{d}x \geq t^2\, r(4t)y^{(n-1)}\,(4t)$$

Из последнего неравенства вытекает

$$y^{(n-3)}(t) \geq \left(\inf_{4t\geq t_0} \frac{r(4t)}{r(t)}\right) t^2\, y^{(n-1)}(4t) = a_0 t^2\, y^{(n-1)}(4t)$$

После подстановки последнего неравенства в (10), (11) и преобразова нием его, мы получим (13), (14).

Лемма доказана.

Следствие леммы 2. *Пусть выполнены условия леммы 2 и пусть* $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(k)}(t) \neq 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $n + k$ *нечетное число.*

Тогда

(18) $$|y^{(k)}(t)| \geq B_k\, t^{n-k-1}\, |y^{(n-1)}\,(t)|, \quad t \geq 2^{n-k}\, t_0, \quad 0 < B_k < 1$$

Доказательство. Из (14) вытекает неравенство

$$|y^{(k)}(2^{k+1-n}\, t)| \geq \bar{B}_k\, 2^{-(n-k-1)^2} t^{n-k-1} |y^{(n-1)}(t)|, t \geq 2^{n-k-1} t_0$$

а из него мы получим

$$|y^{(k)}(t)| \geq \bar{B}_k [y^{(k)}(t)/y^{(k)}(2^{k-n+1}\, t)] 2^{-(n-k-1)^2} t^{n-k-1}\, |y^{(n-1)}(t)| \geq$$

$$\geq B_k\, t^{n-k-1}\, |y^{(n-1)}(t)|, \; t \geq 2^{n-k}\, t_0,$$

где $B_k = \inf\limits_{t>t_0} [y^{(k)}(t)/y^{(k)}(2^{k+1-n}\, t)]\bar{B}_k 2^{-(n-k-1)^2} > 0$

Этим мы доказали (18).

Теорема 1. *Пусть функции* F, h_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *выполняют условие* (3), (4), *и пусть*

(19) *i)* $$r \in C^1[R_+, (0, \infty)], \; \int^{\infty} \mathrm{d}s/r(s) = \infty; \textit{ либо } r'(t) \geq 0,$$

$$\textit{либо } r'(t) \leq 0, \; \inf_{t>t_0} \frac{r(t)}{r(\nu t)} > 0, \; 0 < \nu < 1, \; t \geq t_0 \in R_+$$

ii) существуют функции p_m, f_m $(m \in \{0, 1, \ldots, n-1\})$ *и вещественное число* $\alpha : 0 < \alpha < 1$ *такое, что имеет место*

(20) $$p_m \in C[R_+, (0, \infty)],$$

(21) $$f_m \in C[R, R], \; xf_m(x) > 0 \text{ при } x \neq 0$$

(22) $$\liminf_{|x| \to \infty} \frac{|f_m(x)|}{|x|^\alpha} > 0$$

(23) $$F(t, x_1, \ldots, x_n) \geq p_m(t) f_m(x_{m+1}) \quad \textit{при} \quad x_1 > 0, \; x_{m+1} > 0;$$
$$F(t, x_1, \ldots, x_n) \leq p_m(t) f_m(x_{m+1}) \quad \textit{при} \quad x_1 < 0, \; x_{m+1} < 0;$$
$$(t, x_1, \ldots, x_n) \in D.$$

Если

(24) $$\int^{\infty} \left(\frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]}\right)^{\alpha} p_m(t)\, \mathrm{d}t = \infty$$

тогда д. уравнение (1) *обладает свойством* A_m, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Доказательство. Предположим, что д. уравнение (1) имеет неколеблющее решение $y(t) \in \mathbf{W}$ и такое, что

(25) $$\liminf_{t \to \infty} y^{(m)}(t) = C, \; m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \; 0 < C \leq \infty$$

Из (25) получаем

(26) $$y^{(i)}(t) > 0, \; i = 0, 1, \ldots, m, \; t \geq t_1 \geq t_0 \in R_+$$

Потом в силу условия (3) существует $t_2 > t_1$ такое, что имеет место

(27) $$y^{(i)}[h_i(t)] > 0, \; t \geq t_2, \; i = 0, 1, \ldots, m.$$

Принимая во внимание (4), (23) и (27), из д. уравнения (1) вытекает

$$(28) \qquad [r(t)y^{(n-1)}(t)]' \le -p_m(t)f_m(y^{(m)}[h_m(t)]) \le 0, \ t \ge t_2$$

Проинтегрировав (28) от $t(\ge t_2)$ до ∞, получим

$$(29) \qquad \infty > r(t)y^{(n-1)}(t) \ge \int_t^\infty p_m(s)f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\mathrm{d}s$$

Ввиду монотонности функции $r(t)y^{(n-1)}(t)$, из (29) имеем

$$(30) \qquad r[h_m(t)]y^{(n-1)}[h_m(t)] \ge \int_t^\infty p_m(s)f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\,\mathrm{d}s$$

Из (28), в силу (27) и (19), очевидно, что выполнены условия леммы 2 и так соблюдается (7), (8), (13) при $t \ge t_3 \ge t_2$. Учитывая (27), из (7), (8) следует $m \le k$. Для $m = k$ выполнены условия следствия леммы 2 и поэтому имеет силу (18).

Из (13) для $i = m < k$, и из (18), для $k = m$, получим неравенство

$$y^{(m)}(t) \ge B_m t^{n-m-1} y^{(n-1)}(t), \ t \ge 2^{n-k}t_3 = \bar{t}_3,$$

и из него имеем

$$(31) \qquad y^{(m)}[h_m(t)] \ge B_m[h_m(t)]^{n-m-1} y^{(n-1)}[h_m(t)], \ t \ge t_4 \ge \bar{t}_3$$

В силу (31), из (30) вытекает

$$y^{(m)}[h_m(t)] \ge B_m \frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]} \int_t^\infty p_m(s)f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\mathrm{d}s$$

После возведения последнего неравенства в степень $-\alpha$ и после преобразования, получим

$$(32) \qquad (y^{(m)}[h_m(t)])^{-\alpha} \left(\frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]}\right)^\alpha \le (B_m \int_t^\infty p_m(s)f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\mathrm{d}s)^{-\alpha}$$

Если умножим (32) на $p_m(t)f_m(y^{(m)}[h_m(t)])$ и потом будем интегрировать от t_4 до $t_5(t_4 < t_5)$, то получим

$$(33) \qquad \int_{t_4}^{t_5} \left(\frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]}\right)^\alpha \frac{f_m(y^{(m)}[h_m(t)])}{(y^{(m)}[h_m(t)])^\alpha} p_m(t)\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le B_m^{-\alpha} \frac{1}{1-\alpha} \{ \int_{t_4}^{t_5} p_m(s)f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\,\mathrm{d}s\}^{1-\alpha}$$

Из (33), ввиду (29), вытекает

$$\int_{t_4}^{\infty} \left(\frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]}\right)^{\alpha} \frac{f_m(y^{(m)}[h_m(t)])}{(y^{(m)}[h_m(t)])^{\alpha}}\, p_m(t)\, \mathrm{d}t < \infty \tag{34}$$

В силу (21), (22), (25) существует такое число $T \geq t_4$, что имеет место

$$\frac{f_m(y^{(m)}[h_m(t)])}{(y^{(m)}[h_m(t)])^{\alpha}} \geq d > 0, \quad t \geq T$$

Принимая во внимание последнее неравенство, из (34) получим

$$0 < d \int_{T}^{\infty} \left(\frac{[h_m(t)]^{n-m-1}}{r[h_m(t)]}\right)^{\alpha} p_m(t)\, \mathrm{d}t < \infty,$$

что противоречит условию (24).

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $m = n - 1$ и условие (19) заменим более слабым условием (2), то заключение теоремы 1 тоже имеет место.

Доказательство. Пусть $m = n - 1$. После возведения (3) в степень $-\alpha$, получим

$$(y^{(n-1)}[h_{n-1}(t)])^{-\alpha} \frac{1}{(r[h_{n-1}(t)])^{\alpha}} \leq \left(\int_{t}^{\infty} p_{n-1}(s) f_{n-1}(y^{n-1}[h_{n-1}(s)])\, \mathrm{d}s\right)^{-\alpha}$$

Далее одинаковым методом как в (32), получим

$$\int_{T}^{\infty} \frac{p_{n-1}(s)\, \mathrm{d}s}{(r[h_{n-1}(s)])^{\alpha}} < \infty,$$

что противоречит (24), для $m = n - 1$.

Замечание 2. Пусть $n = 2$, $m = 0$. Если условия (19), (24) заменим (2) и

$$\int^{\infty} (R_0[h_0(t)])^{\alpha}\, p_0(s)\mathrm{d}s = \infty \tag{$\overline{24}$}$$

тогда заключение теоремы 1 имеет место.

Доказательство. Одинаковым методом как в доказательстве теоремы 1 получим (25)—(30). Из (28), учитывая (27) и (2), очевидно, что выполнены условия леммы 1 и поэтому соблюдается (7)—(9). Из (9), для $i = 0$, вытекает

$$y(t) \geq r(t)\acute{y}(t)R_0[t, t_2]$$

Ввиду (3) имеем

$$y[h_0(t)] \geq r[h_0(t)]\acute{y}[h_0(t)]R_0[h_0(t), t_3], \; h_0(t) \geq t_3 \geq t_2$$

Из (30), для $n = 2$, $m = 0$, после применения последнего соотношения и после возведения в степень — α, следует

$$(y[h_0(t)])^{-\alpha}(R_0[h_0(t), t_3])^{\alpha} \leq \left(\int_t^{\infty} p_0(s)f_0(y[h_0(s)])\,\mathrm{d}s\right)^{-\alpha}, \; t \geq t_3$$

Далее одинаковым методом как в (32), получим неравенство

$$\int_T^{\infty} (R_0[h_0(t)])^{\alpha}\, p_0(t)\,\mathrm{d}t < \infty,$$

противоречащее условию (24).

Замечание 2 доказано.

Теорема 2. *Пусть a, функции* r, h_i $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$ F *выподняют условия* (19), (3), (4); *b, существуют функции* g_m, p_m, f_m, φ_m $(m \in \{0, 1 \ldots, n - 2\})$, *которые соблюдают следующим условиям:*

(35) 1. $g_m \in C^1[R_+, R]$, $g_m'(t) \geq 0$, $g_m(t) \leq h_m(t)$, $t \in R_+$

$$\lim_{t \to \infty} g_m(t) = \infty, \; m = 0, 1, \ldots, n - 2,$$

2. p_m, f_m *выполняют* (20), (21), (23)

3. $\varphi_m \in C[\mathrm{I}_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon\rangle \cup \langle\varepsilon, \infty), R]$, $x\varphi_m(x) > 0$ *при* $x \in \mathrm{I}_\varepsilon$,

$0 < \varepsilon \in R$, φ_m *неубывающая на интервалях* $\langle -\infty, \varepsilon\rangle$,

$\langle\varepsilon, \infty)$ *и имеет силу*

(36) $$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\varphi_m(x)} < \infty, \qquad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\varphi_m(x)} < \infty$$

(37) $$\liminf_{|x| \to \infty} \frac{|f_m(x)|}{|\varphi_m(x)|} > 0$$

Если

(38) $$\int^{\infty} R_{n-m-2}\,[g_m(t)]p_m(t)\,\mathrm{d}t = \infty$$

тогда д. уравнение (1) *обладает свойством* A_m, $m \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$.

Доказательство. Предположим, что д. уравнение (1) имеет неколеблющее решение $y(t) \in \mathbf{W}$, которое выполняет (25). Далее одинаковым методом как в доказательстве теоремы 1 получим (26)—(30) и тоже определим, что имеет силу (7), (8), (13), (18), $m \leq k$, $(m \in \{0, 1, \ldots, n-2\})$.

I. Пусть $m < k$. Из (13), для $i = m + 1 < k$ и из (18), для $i = m + 1 = k$ вытекает

$$y^{(m+1)}(t) \geq B_{m+1} t^{n-m-2} y^{(n-1)}(t), \ t \geq 2^{n-k} t_3 \quad \bar{t}_3,$$

Из последнего неравенства получаем

$$(39) \qquad y^{(m+1)}[g_m(t)] \geq B_{m+1}[g_m(t)]^{n-m-2} y^{(n-1)}[g_m(t)], \ g_m(t) \geq t_4 \geq \bar{t}_3$$

Учитывая монотонность фунцции $r(t)y^{(n-1)}(t)$ и (39), из (30) следует

$$y^{(m+1)}[g_m(t)] \geq B_{m+1} \frac{[g_m(t)]^{n-m-2}}{r[g_m(t)]} \int_t^\infty p_m(s) f_m(y^{(m)}[h_m(s)] \, \mathrm{d}s$$

Если умножим последнее неравенство выражением $g_m'(t)/\varphi_m(y^{(m)}[g_m(t)])$ и интегрируем от t_4 до t, получим

$$(40) \qquad \infty > \int_{y^{(m)}[g_m(t_4)]}^\infty \frac{\mathrm{d}z}{\varphi_m(z)} \geq \int_{t_4}^t \frac{y^{(m+1)}[g_m(s)] g_m'(s) \, \mathrm{d}s}{\varphi_m(y^{(m)}[g_m(s)])} \geq$$

$$\geq B_{m+1} \int_{t_4}^t \left(\frac{[g_m(x))^{n-m-2} g_m'(x)}{r[g_m(x)] \varphi_m(y^{(m)}[g_m(x)])} \int_x^\infty p_m(s) f_m(y^{(m)}[h_m(s)]) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x \geq$$

$$\geq B_{m+1} \int_{t_4}^t \left(\frac{[g_m(x))^{n-m-2} g_m'(x)}{r[g_m(x)]} \int_x^\infty p_m(s) \frac{f_m(y^{(m)}[h_m(s)])}{\varphi_m(y^{(m)}[h_m(s)])} \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x$$

При преобразовании последнего неравенства мы использовали (35) и монотонность функций $\varphi_m(z)$, $y^{(m)}(t)$.

Согласно (25) могут наступить два случая. Либо а, $\lim\limits_{t \to \infty} y^{(m)}(t) \quad L$ $(0 < L < \infty)$, либо, $\lim\limits_{t \to \infty} y^{(m)}(t) - \infty$. В случае а, существует такое число $T \geq t_4$, что имеет место

$$\frac{f_m(y^{(m)}[h_m(t)])}{\varphi_m(y^{(m)}[h_m(t)])} \geq \frac{f_m(L)}{2\varphi_m(L)} = d_1 > 0, \ t > T$$

Тогда из (40) получим

$$\infty > B_{m+1}\, d_1 \int\limits_{T}^{\infty} \left(\frac{[g_m(x)]^{n-m-2}}{r[g_m(x)]}\, g'_m(x) \int\limits_{x}^{\infty} p_m(s)\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x =$$

$$= B_{m+1}\, d_1 \int\limits_{T}^{\infty} R_{n-m-2}[g_m(s)]p_m(s)\, \mathrm{d}s,$$

что противоречит (38).

b) Если $\lim\limits_{t\to\infty} y^{(m)}(t) = \infty$, потом ввиду (37) существует такое число $d_2 > 0$, что имеет силу

$$\frac{f_m(y^{(m)}[h_m(t)])}{\varphi_m(y^{(m)}[h_m(t)])} \geq d_2 > 0,\ t \geq T_1 \geq t_4$$

Одинаковым методом как в случае a) получим из (40) противоречие с (38).

II. Пусть $m = k$ ($m + k$ нечетное число). Тогда из (8) следует

$$(-1)^{m+i}\, y^{(i)}(t) \geq 0,\ i = m + 1, \ldots, n - 1,\ t \geq t_4$$

Из последнего неравенства получим, что $y^{(m)}(t)$ убывающая функция и так в силу (25) имеет место $y^{(m)}[h_m(t)] \geq C > 0$ при $t \geq t_4$). Пусть t_5 ($\geq t_4$) большое число такое, что имеет силу

$$f_m(y^{(m)}[h_m(t)]) \geq \frac{1}{2}\, f_m(C) = A,\ t \geq t_5 \tag{41}$$

Учитывая монотонность функции $r(t)y^{(n-1)}(t)$, из (29) следует

$$y^{(n-1)}[g_m(t)] \geq \frac{1}{r[g_m(t)]} \int\limits_{t}^{\infty} p_m(s) f_m(y^{(m)}[h_m(s)])\, \mathrm{d}s,\ t \geq t_4 \tag{42}$$

Если умножим (42) выражением $g'_m(t)$, интегрируем от t до ∞ и используем (41), получим

$$-y^{(n-2)}[g_m(t)] \geq A \int\limits_{t}^{\infty} R_0[g_m(s), g_m(t)]p_m(s)\, \mathrm{d}s,\ t \geq t_5$$

Повторением этого процесса $\overline{n - m - 3}$ раза, получим

$$-y^{(m+1)}[g_m(t)] \geq \frac{A}{(n-m-3)!} \int\limits_{t}^{\infty} R_{n-m-3}[g_m(s), g_m(t)]\, p_m(s)\, \mathrm{d}s \tag{43}$$

После умножения (43) на $g'_m(t)$ и интегрирования от t_5 до ∞, имеем

$$y^{(m)}[g_m(t_5)] \geq y^{(m)}[g_m(t_5)] - C \geq \frac{A}{(n-m-2)!} \int\limits_{t_5}^{\infty} R_{n-m-2}[g_m(s), g_m(t_5)]\, p_m(s)\, \mathrm{d}s,$$

что противоречит (38).

Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть $n = 2$, $m = 0$. Если условия (19), (38) заменим (2) и

$$(\bar{3}8) \qquad \int^{\infty} R_0[g_0(t)]p_0(t)\, \mathrm{d}t = \infty$$

тогда заключение теоремы 2 имеет место.

Доказательство. Одинаковым методом как в доказательстве теоремы 2 мы получили (42), тут имеем

$$(44) \qquad y'[g_0(t)] \geq \frac{1}{r[g_0(t)[} \int\limits_{t}^{\infty} p_0(s) f_0(y[h_0(s)])\, \mathrm{d}s,\ t \geq t_4$$

Если умножим (44) выражением $g'_0(t)/\varphi_0(y[h_0(t)])$ и интегрируем от t_4 до ∞, получим

$$\infty > \int\limits_{t_4}^{\infty} \frac{y'[g_0(s)]g'_0(s)}{\varphi_0(y[g_0(s)])}\, \mathrm{d}s \geq \int\limits_{t_4}^{\infty} \left(\frac{g'_0(x)}{r[g_0(x)]\varphi_0(y[g_0(x)])} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{x}^{\infty} p_0(s) f_0(y[h_0(s)])\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x$$

Далее одним и тем же методом как в (40), получим противоречие с (38). Замечание доказано.

Если в теореме 2 поставим $\varphi_m(x) = x^{\alpha}$, $1 < \alpha \in R$, тогда получим

Следствие 1. *Пусть a, функции* r, h_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, F *имеют силу* (19), (3), (4); *b) существуют функции* g_m, p_m, f_m $(m \in \{0, 1, \ldots, n-2\})$, *которые выполняют условия* (35), (20), (21) *и* (23).

$$c) \qquad \liminf_{|x| \to \infty} \frac{|f_m(x)|}{|x|^{\alpha}} > 0,\ 1 < \alpha \in R$$

Если соблюдается (38) *тогда д. уравнение* (1) *обладает свойством* A_m, $m \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

Следствие 1 обобщает первые теоремы в работах [4, 8, 9], для $\alpha > 1$.
Если в теореме 2 поставим $\varphi_m(x) = f_m(x)$, тогда получим

Следсвие 2. *Пусть* 1, *выполнены условия* a, b, *следствия* 1.; 2, *функция* f_m *неубывающая на* R *и имеет силу*

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f_m(x)} < \infty, \qquad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f_m(x)} < \infty \tag{45}$$

для любых $\varepsilon > 0$.

Если соблюдается (38), *тогда д. уравнение* (1) *обладает свойством* A_m, $m \in \{0, 1, \ldots, n - 2\}$.

Следствие 2 обобщает теорему 2 [4] и теорему 4 [6].

Если в замечании 3 поставим $\varphi_0(x) = f_0(x)$, получим

Следствие 3. *Пусть* 1, r, h_0, F *выполняют* (2), (3), (4); 2, *существуют функции* g_0, p_0, *которые для* $m = 0$ *имеют силу* (35), (20); 3, *сущесщвует неубывающая на* R *функция* f_0, *которая для* $m = 0$ *соблюдает условия* (21) (23) и (45).

Если имеет место ($\overline{\overline{38}}$), *тогда д. уравнение* (1), *для* $n = 2$ *обладает свойством* A_0.

Следствие 3 обобщает теорему 4 [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] БЫКОВ Я. В., БЫКОВА Л. Я., ШЕВЦОВ Е. И.: Достаточные условия осцилляторности решений нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Дифф. Уравнения 9, 1973, 1555—1560.

[2] БЫКОВ Я. В., МЕРЗЛЯКОВА Г. Д.: Об осцилляторности решений нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Дифф. Уравнения 2, 1974, 210—220.

[3] КИГУРАДЗЕ И. Т.: Об условиях колеблемости решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. I. Дифф. Уравнения 8, 1974, 1387—1399.

[4] KUSANO T. and ONOSE H.: Oscillation Theorems for Delay Equations of Arbitrary Order. Hiroshima Math. J. 2, 1972, 1—13.

[5] KUSANO T. and ONOSE H.: Oscillation Theorems for Second Order Differential Equations with Retarded Argument. Proc. Japan Acad. 50, 1974, 342—346.

[6] MARUŠIAK P.: Oscillation of Solutions of the Delay Differential Equation $y^{(2n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t) f_i(y[h_i(t)]) = 0$, $n \geq 1$. Čas. Pěst. Mat. 99, 1974, 131—141.

[7] MARUŠIAK P.: Oscillation of Solutions of Nonlinear Delay Differential Equations Mat. čas. 4, 1974, 371—380.

[8] MARUŠIAK P.: Sufficient Conditions for the Oscillation of Nonlinear Delay Differential Equations. Colloquium v Keszthely (V tlači). 1974.

[9] ШЕВЕЛО В. Н., ВАРЕХ Н. В.: О некоторых свойствах решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Украинский Мат. Журнал, 24, 1972, 807—813.

Поступило 6. 3. 1975

Katedra matematiky fakulty SET
Vysokej školy dopravnej
Marxa—Engelsa 25
010 88 Žilina