Mathematica Slovaca

Zbigniew Grande

Quelques remarques sur les classes de Baire des fonctions de deux variables

*Mathematica Slovaca*, Vol. 26 (1976), No. 3, 241--246

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136122

Math. Slovaca 26, 1976, No. 3, 241—246

# QUELQUES REMARQUES SUR LES CLASSES DE BAIRE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

ZBIGNIEW GRANDE

Soit $f: R^2 \to R$ la fonction réelle définie sur le plan $R^2$. Etant fixés $x_0$ et $y_0$, les fonctions d'une variable $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ et $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$ s'appellent les coupes de la fonction $f$ relativement à $x_0$ et $y_0$ respectivement.

On sait que:

(1) Si toutes les coupes $f_x$ sont continues à droite et toutes les coupes $f^y$ sont de classe de Baire $\alpha$, alors la fonction $f$ est de classe de Baire $\alpha + 1$ (voir [4]).

(2) Si toutes les coupes $f_x$ sont équicontinues et toutes les coupes $f^y$ sont de classe de Baire $\alpha$, alors la fonction $f$ est de classe de Baire $\alpha$.

(3) Si toutes les coupes $f_x$ et $f^y$ sont approximativement continues, alors la fonction $f$ est de deuxième classe de Baire (voir [1], th. 2).

(4) Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ telle que toutes ses coupes $f_x$ et $f^y$ sont approximativement continues et qui n'est pas de première classe de Baire (voir [1], th. 3).

**Définition 1.** *Soit $\{h_i\}_{i \in J}$ ($J$ — un ensemble d'indices) une famille de fonctions réelles d'une variable réelle. On dit que les fonctions de la famille $\{h_i\}_{i \in J}$ sont approximativement équicontinues s'il existe pour tout point $x \in R$ un ensemble $F(x)$ du type $F_\sigma$ tel que $x$ est un point d'épaisseur de l'ensemble $F(x)$ et les fonctions partielles $h_i/F(x)$ sont équicontinues au point $x$.*

**Théorème 1.** *Si toutes les coupes $f^y$ sont approximativement continues et toutes les coupes $f_x$ sont approximativement équicontinues, alors la fonction $f: R^2 \to R$ est approximativement continue.*

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in R^2$. D'après la définition 1, il existe un ensemble $F(y_0) \subset R$ du type $F_\sigma$ tel que $y_0$ est un point d'épaisseur de cet ensemble et les fonctions partielles $f_x(F(y_0)$ sont équicontinues au point $y_0$.

D'autre part la coupe $f^{y_0}$ est approximativement continue au point $x_0$. Il en résulte qu'il existe un ensemble $F(x_0) \subset R$ du type $F_\sigma$ tel que $x_0$ est un point d'épaisseur de cet ensemble et la fonction partielle $f^{y_0}/F(x_0)$ est continue au point $x_0$. Posons $F = F(x_0) \times F(y_0)$. L'ensemble $F \subset R^2$ est du type $F_\sigma$ et $(x_0, y_0)$ est un point d'épaisseur de l'ensemble $F$. Il reste à voir que la fonction partielle $f/F$ est continue au point $(x_0, y_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de la continuité de la fonction $f^{y_0}/F(x_0)$ au point $x_0$ qu'il existe un nombre $\delta_1 > 0$ tel que

$$|f^{y_0}(x) - f^{y_0}(x_0)| < \varepsilon/2 \text{ pour } x \in F(x_0) \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1).$$

En outre, il existe un nombre $\delta_2 > 0$ tel que

$$|f_x(y) - f_x(y_0)| < \varepsilon/2 \text{ pour } y \in F(y_0) \cap (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$$

et pour tout $x \in R$.
Soit $(x_1, y_1) \in F \cap \{(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)\}$
Remarquons que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)| + \\ + |f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Notre théorème est démontré.

**Définition 2** *(voir* [5], *Df.* 2*) Une fonction $f: X \to R$ ($X$ — l'espace métrique) est dite fonction step-like lorsque pour tout ensemble $A \subset X$ ($A \neq \emptyset$) il existe un ensemble ouvert $U \subset X$ tel que $A \cap U \neq \emptyset$ et la fonction partielle $f/A \cap U$ est* constante.

**Théorème 2.** *Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ qui n'est pas de première classe de Baire et qui est telle que toutes les coupes $f_x$ sont continues et toutes les coupes $f^y$ sont step-like.*

Démonstration. Soit $P$ l'ensemble de Cantor dans le segment $Q$ aux extrémités $(0,0)$ et $(1,1)$. L'ensemble $P$ est parfait et non-dense dans le segment $Q$. Le complémentaire $P' = Q - P$ est la somme d'une suite d'intervalles ouverts, qui s'appellent de ses constituantes. Alors $P' = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, où $Q_n$ désigne l'intervalle ouvert aux extrémités $(\alpha_n, \alpha_n)$ et $(\beta_n, \beta_n)$ $(\alpha_n < \beta_n)$. Admettons que $d(Q_n) \geq d(Q_{n+1})$, où $d(Q_i)$ désigne le diamètre de l'intervalle $Q_i$.

Désignons par $R_n$ l'intervalle fermé aux extrémités $(\alpha_n, \alpha_n - d(Q_n)/2\sqrt{2})$ et $(\alpha_n, \alpha_n + d(Q_n)/2\sqrt{2})$. Soit $f_n: R_n \to [0,1]$ une fonction continue et telle que $f_n(\alpha_n, \alpha_n) = 1$ et $f_n(\alpha_n, \alpha_n - d(Q_n)/2\sqrt{2}) = f_n(\alpha_n, \alpha_n + d(Q_n)/2\sqrt{2}) = 0$
Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} f_n(x, y) & \text{pour } (x, y) \in R_n \\ 0 \quad \text{pour } (x, y) \in R^2 - \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \end{cases}$$

On remarque sans peine que toutes les coupes $f_x$ de la fonction $f$ sont continues et que la fonction $f$ n'est pas de première classe de Baire.

Démontrons encore que toutes les coupes $f^y$ de cette fonction sont step-like.

Etant donné un nombre $y \in R$, soit $A \subset R$ un ensemble contenant au moins deux nombres $a_1$ et $a_2$ tels que $f^y(a_1) \neq 0$ et $f^y(a_2) \neq 0$. Admettons que $a_1 < a_2$.

Il résulte de la définition de la fonction $f$ que

1. il existe au plus un nombre fini de points $\{b_k\}_{k=1}^N$, tels que $b_k > a_1$ et $f^y(b_k) \neq 0$.

Si l'ensemble $A$ contient un nombre $c > a_1$ qui n'appartient pas à l'ensemble $\{a_2, b_1, b_2, \ldots, b_N\}$, alors il existe un intervalle ouvert $U$ contenant $c$ et ne contenant aucun nombre de l'ensemble $\{a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_N\}$. On vérifie facilement que la fonction partielle $f^y/U$ est constante. Dans le cas contraire il existe un intervalle ouvert qui contient $a_2$ et ne contient aucun point de l'ensemble $\{a_1, b_1, b_2, \ldots, b_N\}$

Dans le cas, où l'ensemble $A$ ne contient pas deux nombres $a_1$ et $a_2$ tels que $f^y(a_1) \neq 0$ et $f^y(a_2) \neq 0$ la démonstration est triviale et le théorème 2 est démontré.

**Théorème 3.** *Il existe une fonction $g: R^2 \to R$ qui n'est pas de première classe de Baire et telle que toutes ses coupes $g_x$ sont continues et toutes ses coupes $g^y$ ont la propriété de Darboux et sont de première classe de Baire.*

Démonstration. Admettons toutes les désignations de la démonstration du théorème 2.

Désignons par $\{A_n\}$ une suite d'ensembles linéaires fermés et non-denses pour lesquels:

(a) $$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\beta_i\}\right) \cap A_n = \emptyset$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

(b) $$1/n > d(A_n) > d(A_{n+1}) \ (n = 1, 2, \ldots)$$

(c) $\alpha_n$ est un point d'épaisseur de l'ensemble $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Soit $\{B_n\}$ une suite d'ensembles de classe $M_5$ de Zahorski (voir [6]; c'est-à-dire tout ensemble $B_n$ est du type $F_\sigma$ et si $x \in B_n$, alors $x$ est un point d'épaisseur de l'ensemble $B_n$) telle que $B_n \subset A_n$ et $\alpha_n \in B_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

D'après le lemme 11 du travail [6] il existe pour tout ensemble $B_n$ une fonction $g_n: R \to R$ approximativement continue et telle que

$$g_n(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \notin B_n \quad \text{et}$$
$$0 < g_n(x) \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \in B_n.$$

De plus, il résulte de la démonstration du lemme 11 qu'on peut construire les fonctions $g_n$ telles que $g_n(\alpha_n) = 1$, pour tout $n$.

Définissons par la suite les fonctions $K_n: R^2 \to R$ de la manière suivante:

$$K_n(x, y) = g_n(x)$$

Soit, en outre, $L_n$: $R^2 \to R$ des fonctions continues telles que:

(d) toutes les coupes $L_n^y$ sont constantes

(e) $L_n(\alpha_n, \alpha_n) = 1$

(f) $L_n(x, y) = 0$ pour $y \notin [\alpha_n - d(Q_n)/2\sqrt{2}, \alpha_n + d(Q_n)/2\sqrt{2}]$

Désignons par $E_n$ l'ensemble

$$B_n \times [\alpha_n - d(Q_n)/2\sqrt{2}, \alpha_n + d(Q_n)/2\sqrt{2}]$$

Posons

$$g(x, y) = \begin{cases} K_n(x, y) \cdot L_n(x, y) & \text{pour} \quad (x, y) \in E_n \\ 0 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in R^2 - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \end{cases}$$

On vérifie facilement que toutes les coupes $g_x$ de cette fonction sont continues et que la fonction $g$ n'est pas de première classe de Baire.

Il reste à prouver que toutes ses coupes $g^y$ sont de première classe de Baire et qu'elles ont la propriété de Darboux. Etant fixé $y \in R$, on voit sans peine que si la coupe $g^y$ n'est pas approximativement continue au point $x_0$, alors il existe une sous-suite $\{\alpha_{n_k}\}$ de la suite $\{\alpha_n\}$ telle que $x_0 = \lim_{k \to \infty} \alpha_{n_k}$.

Considérant comme dans I. de la démonstration du théorème 2 on a que celui point $x_0$ peut exister seulement un. Alors la coupe $g^y$ n'est pas approximativement continue au plus en un point et elle est de première classe de Baire. Montrons encore que la coupe $g^y$ a la propriété de Darboux. Soit $x_1 \in R$, $x_2 \in R$, $x_1 < x_2$ et $g^y(x_1) \neq g^y(x_2)$. Admettons que $g^y(x_1) < g^y(x_2)$. Soit $\gamma \in (g^y(x_1), g^y(x_2))$. Si $x_0 \notin [x_1, x_2]$, alors la coupe $g^y$ est approximativement continue sur $[x_1, x_2]$ et il existe un point $x_3 \in (x_1, x_2)$ tel que $g^y(x_3) = \gamma$.

Dans le cas contraire, si $x_0 \in [x_1, x_2]$, alors il existe un intervalle $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$ tel que $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}] \subset (x_1, x_2)$. Evidemment $g^y(\alpha_{n_0}) = 1 > \gamma > 0 = g^y(\beta_{n_0})$. En outre la coupe $g^y$ est approximativement continue sur $[\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$ et il existe un point $x_3 \in (\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$ tel que $g^y(x_3) = \gamma$, ce qui termine la démonstration du théorème 3.

Dans mon travail [2] j'ai introduit la définition suivante:

**Définition 3.** *Une fonction $g: R \to R$ a la propriété $(K)$, si pour tout ensemble $A$ mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive, la fonction $g$ est ponctuellement discontinue sur la fermeture de l'ensemble des points d'épaisseur de l'ensemble $A$.*

J'ai aussi démontré que si toutes les coupes $f_x$ de la fonction $f: R^2 \to R$ ont la propriété $(K)$ et toutes ses coupes $f^y$ sont approximativement continues, alors la fonction $f$ est mesurable au sens de Lebesgue.

Le Professeur L. Misik a posé le problème suivant:

Supposons que toutes les coupes $f_x$ de la fonction $f: R^2 \to R$ ont la propriété $(K)$ et sont de classe de Baire $\alpha$ et que toutes ses coupes $f^y$ sont approximativement continues. Alors la fonction $f$ est-elle borélienne?

Je montre que la réponse est négative.

**Théorème 4.** *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ non-borélienne et telle que toutes ses coupes $f_x$ ont la propriété $(K)$ et sont de deuxième classe de Baire et toutes ses coupes $f^y$ sont approximativement continues.*

Démonstration. Soit $A \subset [0,1]$ l'ensemble de Cantor. Soit

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega$$

($\Omega$ désigne le plus petit nombre transfini qui correspondent à la puissance du continu) une suite transfinie des nombres de l'ensemble $A$ telle que $a_\alpha \neq a_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$.

Soit

$$(2) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_\alpha, \ldots \qquad \alpha < \Omega$$

une suite transfinie des nombres réels telle que $b_\alpha \neq b_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$. Etant fixé $\alpha < \Omega$ désignons par $B_\alpha \subset R$ l'ensemble de tous les nombres $b_\beta$ de la suite (2) pour lesquels $\beta < \alpha$. Chaque ensemble $B_\alpha$ est dénombrable. Il existe donc un ensemble $G_\alpha \subset R$ du type $G_\delta$ qui est de mesure lebesguienne zéro et qui contient l'ensemble $B_\alpha$.

D'après le lemme 11 du travail [6] il existe une fonction $g_\alpha: R \to R$ approximativement continue et telle que

$$g_\alpha(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in G_\alpha$$

et

$$0 < g_\alpha(x) \leq 1 \quad \text{pour} \quad x \notin G_\alpha$$

Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} g_\alpha(x) & \text{pour} \quad y \in A \quad \text{et} \quad y = a_\alpha \\ 0 & \text{pour} \quad y \notin A \end{cases}$$

On voit sans peine que toutes les coupes $f^y$ de la fonction $f$ sont approximativement continues.

Soit $x_0 \in R$. Il existe un nombre transfini $\alpha_0 < \Omega$ tel que $x_0 = b_{\alpha_0}$. Alors $x_0 \in B_\alpha$ pour tout $\alpha > \alpha_0$. Il en résulte que l'ensemble $\{y \in R\,;\, f_{x_0}(y) \neq 0\}$ est dénombrable. D'autre part $\{y \in R\,;\, f_{x_0}(y) \neq 0\} \subset A$.

Alors la coupe $f_{x_0}$ est de deuxième classe de Baire et elle a la propriété $(K)$.

Démontrons encore que l'ensemble $C = \{(x, y) \in R^2;\ f(x, y) \neq 0\}$ n'est pas borélien.

Remarquons que $C \subset R \times A$ et que toutes les coupes $C_x = \{y \in R; (x, y) \in C\}$ sont dénombrables et que les complémentaires de toutes les coupes $C^y = \{x \in R; (x, y) \in C\}$ sont de mesure zéro.

Soit $h: R \to R$ le homéomorphisme tel que $h(A)$ est de mesure lebesguienne positive. Alors la fonction $H: R^2 \to R^2$ définie par la formule

$$H(x, y) = (x, h(y))$$

est aussi le homéomorphisme.

Il résulte du théorème de Fubini que l'ensemble $H(C)$ n'est pas mesurable au sens de Lebesgue. Il en résulte que $H(C)$ n'est pas borélien et par conséquence l'ensemble $C$ n'est pas borélien. Théorème 4 est donc démontré.

## OUVRAGES CITÉS


[1] DAVIES, R. O.: Separate approximate continuity implies measurability. Proc. Camb. Phil. Soc., 73, 1973, 461—465.

[2] GRANDE, Z.: Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 21, 1973, 813—816.

[3] KURATOWSKI, C.: Topologie I. Wars. awa 1958.

[4] MARCZEWSKI, E.—RYLL-NARDZEWSKI, C.: Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables. Ann. Soc. Pol. Math., 25, 1953, 145—154.

[5] PEEK, D. E.: Baire functions and their restrictions to special sets. Proc. Amer. math. Soc., 30, 1971, 303—307.

[6] ZAHORSKI, Z.: Sur la première dérivé. Trans. Amer. Math. Soc., 69, 1960, 1—54.



Reçu le 25 novembre 1974



*Institut Mathématique*
*Université*
*80-216 Gdansk*