Math. Slovaca 29, 1979, No. 1, 49—56

KOMPOSITIONSIDEALE IN RINGEN FORMALER POTENZREIHEN

HERMANN KAUTSCHITSCH

1. Einleitung

Es bezeichne im folgende $\mathfrak{R}$ einen kommutativen Ring mit Einselement, R den Ring der formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten über $\mathfrak{R}$ und R_+ den Unterring der Potenzreihen positiver Ordnung, wobei die Ordnung einer Potenzreihe $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ der kleinste Index i mit $a_i \neq 0$ ist. In R_+ ist neben den beiden Operationen Addition und Multiplikation noch eine weitere Operation auf natürliche Weise gegeben, nämlich die Komposition $\circ$, definiert durch $f\circ g = f(g(x))$. Diese Operation ist assoziativ, rechtsdistributiv gegenüber $+$ und $.$, und hat die Potenzreihe x als Einselement. Man kann daher den Potenzreihenring R_+ als Algebra $\mathscr{R} = \langle R_+, +, ., \circ \rangle$ auffassen und alle homomorphen Bilder, oder, was damit äquivalent ist, alle Kongruenzrelationen dieser Algebra zu bestimmen versuchen. Da $\mathscr{R}$ eine Multioperatorgruppe ist, ist diese Aufgabe gleichbedeutend mit der Bestimmung aller Ideale dieser Algebra. Das sind also alle jene Ringideale A, deren zugehörige Kongruenzrelation mit der Komposition verträglich ist. Solche Ideal heißen Kompositionsideale.

2. Kompositionsideale

Man kann die Kompositionsideale A von $\mathscr{R} = \langle R_+, +, ., \circ \rangle$ folgend charakterisieren:

Satz 1. *Ein Ringideal $A \subseteq R_+$ ist genau dann ein Kompositionsideal, wenn mit $u \in A$, $g \in R_+$, $c \in \mathfrak{R}$ stets gilt:*

(1) $$u \circ g \in A$$

(2) $$c \, . \, u \in A$$

Beweis. Sei A Kompositionsideal, $u \in A$, $f, g \in R_+$, $c \in \mathfrak{R}$, dann ist: $f \equiv$

$f+u \bmod A$, also auch $f \circ g \equiv (f+u) \circ g \bmod A$ und daher ist $u \circ g \equiv \bmod A$. Aus $cx \equiv cx \bmod A$ und $u \equiv 0 \bmod A$ folgt $cu = cx \circ u \equiv cx \circ 0 = 0 \bmod A$.

Seien umgekehrt die Bedingungen (1) und (2) für ein Ringideal A erfüllt. Aus $f_1 \equiv g_1 \bmod A$ und $f_2 \equiv g_2 \bmod A$ folgt $f_1 = g_1 + u$ und $f_2 = g_2 + v$ mit $u, v \in A$, also

$$f_1 \circ f_2 = (g_1 + u) \circ (g_2 + v) = g_1 \circ (g_2 + v) + u \circ (g_2 + v) \equiv g_1 \circ (g_2 + v) = \\ = g_1 \circ g_2 + v \, . p \text{ mit } p \in R \, .$$

Nun ist $p \, . v = (p_0 + p_1 x + \ldots) . v = p_0 v + \bar{p} \, . v$ mit $p_0 \in \mathfrak{R}$, $\bar{p} \in R_+$, also ist $p \, . v \in A$ und daher $f_1 \circ f_2 \equiv g_1 \circ g_2 \bmod A$, das heißt, A ist Kompositionsideal.

Bemerkung: Ideale A R_+, die nur (1) erfüllen, heißen nach [1] Vollideale. Eigenschaften von Vollidealen habe ich in [1], [2] untersucht. In Polynomringen fällt der Begriff Kompositionsideal mit dem des Vollideals zusammen (siehe dazu [3]).

Da mit $c \in \mathfrak{R}$ und $f \in R_+$ auch $cf \in R_+$ und die Beziehung

$$c(fg) = (cf)g = f(cg), \quad c \in \mathfrak{R}, \quad f, g \in R_+$$

gilt, kann man R_+ als $\mathfrak{R}$-Operatorring auffassen und es gilt dann nach Satz 1:

Satz 2. *Ein Vollideal $A \subseteq R_+$ ist genau dann ein Kompositionsideal, wenn A ein $\mathfrak{R}$-zulässiges Ringideal ist.*

In einem $\mathfrak{R}$-Operatorring mit Einselement wären sämtliche Ideale $\mathfrak{R}$-zulässig, R_+ als Ring der formalen Potenzreihen positiver Ordnung besitzt jedoch kein Einselement bezüglich $\cdot$.

Beispiele für Kompositionsideale:

1. Jedes Vollideal A, das alle Potenzreihen der Form rx, $r \in \mathfrak{R}$ enthält, ist ein Kompositionsideal, denn:

Aus $c \in \mathfrak{R}$ und $u \in A$ folgt $cu = cx \circ u \in A$ nach (1).

2. Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$, dann sind ersichtlich

$$(\mathfrak{A}) = \{f \mid f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i, \ a_i \in \mathfrak{A}\}$$

und

$$\{\mathfrak{A}\} = \{f \mid f'(0) \in \mathfrak{A}\}$$

(f' sei die formale Ableitung fon f) Kompositionsideale.

3. $W = \{0, f = \sum_{i \geqq n}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in \mathfrak{R}\}$ ist ein Kompositionsideal, das für $n > 1$ heine Potenzreihen erster Ordnung enthält.

Man kann nun aus einem gegebenen Kompositionsideal $A \subseteq R_+$ weitere Kompositionsideale erhalten. Durch das folgende Verfahren erhält man übrigens einen Zusammenhang zwischen den Kompositionsidealen von R_+ und der Differentiation in R_+.

Ist $f=\sum_{i\geqslant 2}^{\infty} c_i x^i$, dann sei $f'=\sum_{i\geqslant 2}^{\infty} i c_i x^{i-1}$ die formale Ableitung der Potenzreihe f.

Satz 3. *Ist A ein Kompositionsideal in R_+, dann ist die Menge $A'=\{f\,|\,f\in A$ und $f'\in A\}$ ebenfalls ein Kompositionsideal in R_+.*
A' heiße die Ableitung von A.

Beweis. $0\in A'$, also ist $A'\neq\emptyset$. Ersichtlich liegt mit f und g auch $f-g\in A'$.
Ist $f\in A'$ und $r=r_1x+r_2x^2+\ldots\in R_+$, dann ist $r.f\in A$ und $(rf)' = r'.f+f'.r\in A$, denn wegen (2) ist auch $r'f = (r_1+2r_2x+\ldots).f = r_1 f+\bar{r}.f\in A$ mit $r_1\in\mathfrak{R}$, $\bar{r}\in R_+$.
Ist $f\in A'$ und $r\in R_+$, dann ist $f\circ r\in A$ und $(f\circ r)' = (f'\circ r).r'\in A$. Schließlich ist mit $f\in A$ und $c\in\mathfrak{R}$ auch $cf\in A$ und $(cf)' = c.f'\in A$.

Bemerkung. Damit die Definition von A' sinnvoll ist, darf A nur Potenzreihen mit einer Ordnung größer als 1 enthalten. Solche Ideale gibt es nach Beispiel 3.
Durch $A^{(n)}:=[A^{(n-1)}]'$ kann man rekursiv höhere Ableitungen von A definieren. $A^{(n)}$ kann, analog wie im Polynomring, auch so charakterisiert werden:
$A^{(n)}$ ist die Menge aller jener Potenzreihen, deren sämtliche Ableitungen von einer Ordnung $\geqslant n$ in A einthalten sind. Nach Beispiel 3 gibt es zu jedem n. Kompositionsideale, die nur Potenzreihen von einer Ordnung $\geqslant n$ enthalten.
Im folgenden Beispiel, das wir später noch benötigen werden, wollen wir die Ableitung eines Kompositionsideals berechnen: Sei $\mathfrak{A}(x)$ ein Ideal in $\mathfrak{R}[x]$ und $\mathfrak{A}^*(x)$ die Menge aller Potenzreihen der Form $a_i\circ g$ mit $a_i\in\mathfrak{A}(x)$ und $g\in R_+.(\mathfrak{A}(x))$ sei das von $\mathfrak{A}^*(x)$ in R erzeugte Ideal, dann ist

$$(\mathfrak{A}(x))=\left\{f\,|\,f=\sum_{i=1}^{n} f_i.r_i \text{ mit } f_i\in a^*(x),\ r_i\in R\right\}$$

Es gilt: 1. $(\mathfrak{A}(x))\subseteq R_+$
2. $(\mathfrak{A}(x))$ ist ein Kompositionsideal, denn Sei $r\in R_+$ und $f\in(\mathfrak{A}(x))$, dann ist

$$f\circ r=\sum_{i=1}^{n}(f_i\circ r).(r_i\circ r)=\sum_{i=1}^{n}[(a_i\circ g_i)\circ r].s_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[a_i\circ(g_i\circ r)].s_i\in(\mathfrak{A}(x)),\ s_i\in R$$

Ist $c\in\mathfrak{R}$ und $f\in(\mathfrak{A}(x))$, dann ist

$$cf=\sum_{i=1}^{n}c.(f_i.r_i)=\sum_{i=1}^{n}f_i.(cr_i)\in(\mathfrak{A}(x))\,.$$

Nach [3] heißt ein Vollideal $\mathfrak{A}(x)$ aus dem Polynomring $\mathfrak{R}[x]$, das mit seiner Ableitung übereinstimmt, ein D-Vollideal. Die Gesamtheit aller D-Vollideale in $\mathfrak{R}[x]$ ist für gewisse Ringe bekannt (siehe dazu [3]).

3. Es sei nun $\mathfrak{A}(x)$ ein D-Vollideal in $\mathfrak{R}(x)$ und $f \in (\mathfrak{A}(x))$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} f_i . r_i$ mit $f_i \in \mathfrak{A}^*(x)$, $r_i \in R$ und

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f'_i . r_i + \sum_{i=1}^{n} f_i . r'_i .$$

Dabei ist $\sum_{i=1}^{n} f'_i . r_i = \sum_{i=1}^{n} (a'_i \circ g_i)\,(g'_i . r_i) \in (\mathfrak{A}(x))$, denn $a'_i \in \mathfrak{A}(x)$ und ersichtlich ist $\sum_{i=1}^{n} f_i . r'_i \in (\mathfrak{A}(x))$. Es ist also $(\mathfrak{A}(x)) \subseteq (\mathfrak{A}(x))'$ und nach Definition der Ableitung ist $(\mathfrak{A}(x))' \subseteq (\mathfrak{A}(x))$, also ist

$$(\mathfrak{A}(x))' = (\mathfrak{A}(x)) .$$

Wir definieren daher:

Definition. *Ein D-Kompositionsideal A ist ein Kompositionsideal aus R_+, das mit seiner Ableitung übereinstimmt, also $A = A'$.*

Mit diesem Begriff kann der oben erwähnte Zusammenhang zwischen den Kompositionsidealen und der Differentiation in R_+ hergestellt werden. Man kann nämlich R_+ als eine Algebra mit den drei 2-stelligen Operationen $+, ., \circ$ und der einstelligen Operation der Ableitung ($'$), also als eine Algebra vom Typ (2,2,2,1) auffassen. Da diese Algebra wieder eine Multioperator gruppe ist, kennt man alle homomorphen Bilder, wenn man alle Kongruenzrelationen bestimmt. Es gilt dazu folgender Satz, der die Bedeutung der D-Kompositionsideale erkennen läßt:

Satz 4. *Die Kongruenzrelationen der Algebra $\mathcal{R}' = \langle R_+, +, ., \circ, ' \rangle$ sind genau die Kongruenzrelationen des Ringes R_+ nach den D-Kompositionsidealen $A \subseteq R_+$.*

Beweis. Sei ϑ eine Kongruenzrelation in $\mathcal{R}'$. Die Menge A aller $f \in R_+$ mit $f\vartheta 0$ bildet nach [1] ein Vollideal. Aus $f\vartheta 0$ und $cx\vartheta cx$ folgt $(cx \circ f)\vartheta(cx \circ 0)$, also $(cf)\vartheta 0$, Weiters folgt aus $f\vartheta g$, daß $f'\vartheta g'$ und insbesondere aus $f\vartheta 0$ folgt $f'\vartheta 0$, also ist $A \subseteq A'$ und damit $A = A'$.

Nun sei A ein D-Kompositionsideal. Wir erklären eine Äquivalenzrelation ϑ in $\mathcal{R}'$ durch $f\vartheta g \Leftrightarrow f \equiv g \bmod A$. Ersichtlich ist bezüglich $+$ und . eine Kongruenzrelation.

Aus $f\vartheta g$ und $r\vartheta s$ folgt $f \equiv g \bmod A$ und $r \equiv s \bmod A$, also auch $f \circ r \equiv s \bmod A$, das heißt $(f \circ r)\alpha(g \circ s)$. Schließlich folgt aus $f\vartheta g$, daß $f \equiv g \bmod A$, also auch $f' \equiv g' \bmod A$ oder $f'\vartheta g'$. ϑ ist also eine Kongruenzrelation in $\mathcal{R}'$.

In [1] hatten wir gesehen, daß die Menge der Vollideale von $\mathfrak{R}$ eine Teilalgebra in der Idealalgebra von R_+ bezüglich der Bildung des größten gemeinsamen Teilers ($+$), des kleinsten gemeinsamen Vielfachten ($\cap$) und bezüglich der Multiplikation (.) und des Einsetzens ($\circ$) von Idealen bildet. Dabei ist $A \circ B$, A, B Kompositionsideale, das von $S = \{a \circ b \mid a \in A,\ b \in B\} \subseteq R_+$ in R erzeugte Ideal.

Satz 5. *Die Kompositionsideale bilden eine Teilalgebra $\mathcal{R}$ der Algebra aller Vollideale und die D-Kompositionsideale eine Teilalgebra $\mathcal{D}$ von $\mathcal{R}$ bezüglich der oben erwähnten Operationen.*

Beweis. A, B seien Kompositions-bzw. D-Kompositionsideale.

a) Sei $f \in A+B$, dann ist $f=a+b$ mit $a \in A$ und $b \in B$. Daher ist $cf = ca+cb \in A+B$ für alle $c \in \mathfrak{R}$ und $f' = a'+b' \in A+B$, also ist $(A+B)' = A+B$.

b) Sei $f \in A \cap B$, dann ist auch $cf \in A \cap B$ und $(A \cap B)' = A' \cap B' = A \cap B$.

c) Sei $f \in A\,.B$, dann ist $f=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ mit $a_i \in A$, $b_i \in B$. $cf = \sum_{i=1}^{n}(ca_i)b_i$ mit $ca_i \in A$, $b_i \in B$, also $cf \in A\,.B$ für alle $c \in \mathfrak{R}$. $f' = \sum_{i=1}^{n} a'_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i \in A\,.B$, denn $a'_i \in A$, $b'_i \in B$ und daher ist $(A\,.B)' = A\,.B$.

d) Sei $f \in A \circ B$, dann ist $f=\sum_{i=1}^{n}(a_i \circ b_i).r_i$ mit $a_i \in A$, $b_i \in B$, $r_i \in R$.

$$cf=\sum_{i=1}^{n}(a_i \circ b_i).(cr_i) \in A \circ B$$

und

$$f' = \sum_{i=1}^{n}(a'_i \circ b_i).(b'_i.r_i)+\sum_{i=1}^{n}(a_i \circ b_i).r'_i \in A \circ B,$$

denn $a'_i \in A$ und $b'_i.r_i \in R$, $r'_i \in R$.

Insbesondere bildet die Menge der Kompositionsideale einen Teilverband im Idealverband von R. Einen gewissen überblick über diesen Verband der Kompositionsideale erlangt man durch die folgenden zwei Sätze (dazu setzen wir $\{\mathfrak{A}(x)\} = \mathfrak{A}(x) \cup R \backslash \mathfrak{R}[x]$ für ein Vollideal $\mathfrak{A}(x) \subseteq \mathfrak{R}[x]$).

Satz 6. *Zu jedem Kompositionsideal $A \subseteq R_+$ gibt es genau ein Vollideal $\mathfrak{A}(x)$ aus dem Polynomring $\mathfrak{R}[x]$ mit der Eigenschaft:*

$$(\mathfrak{A}(x)) \subseteq A \subseteq \{\mathfrak{A}(x)\}$$

$\mathfrak{A}(x)$ heiße das Umschließungsideal von A.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{A}(x)=A \cap \mathfrak{R}[x]$. Aus $\mathfrak{A}(x) \subseteq A$ folgt wegen (1) $\mathfrak{A}^*(x) \subseteq A$ und daher auch $f=\sum_{i=1}^{n} f_i r_i \in A$ mit $f_i \in \mathfrak{A}^*(x)$, $r_i \in R$ wegen (2), also ist $(\mathfrak{A}(x)) \subseteq A$. Die zweite Relation ist offensichtlich. Gilt auch für ein Vollideal $b(x) \subseteq \mathfrak{R}[x]:(b(x)) \subseteq A \subseteq b(x) \cup R \backslash \mathfrak{R}[x]$, dann ist $(\mathfrak{A}(x)) \subseteq b(x) \cup R \backslash \mathfrak{R}[x]$, also auch $a_i \circ x = a_i \in b(x) \cup R \backslash \mathfrak{R}[x]$ für alle $a_i \in \mathfrak{A}(x) \subseteq b(x)$ und analog folgt $b(x) \subseteq \mathfrak{A}(x)$.

Satz 7. *Der Verband der Kompositionsideale bzw. D-Kompositionsideale ist ein $\cap$-homomorphes Bild des Verbandes der Vollideale bzw. der D-Vollideale des Polynomringes.*

Beweis: Die Abbildung σ ordne jedem Kompositionsideal A sein Umschließungsideal $\mathfrak{A}(x) = A \cap \mathfrak{R}[x]$ zu. Es gilt:

1. $\sigma(A)$ ist nach Satz 6 ein eindeutig bestimmtes Vollideal beziehungsweise D-Vollideal aus $\mathfrak{R}[x]$, denn ist $f \in \sigma(A)$, dann ist $f' \in A$ und $f' \in \mathfrak{R}[x]$, das heißt, $f' \in \sigma(A)$.

2. Jedes Vollideal bzw. D-Vollideal tritt als Bild bei σ auf: Sei $\mathfrak{A}(x)$ ein Vollideal aus $\mathfrak{A}[x]$, dann gilt: $(\mathfrak{A}(x)) \subseteq (\mathfrak{A}(x)) \subseteq \mathfrak{A}(x) \cup R \backslash \mathfrak{R}[x]$, also ist nach Satz 6 $\sigma[(a(x))] = \mathfrak{A}(x)$. Ist dabei $\mathfrak{A}(x)$ ein D-Vollideal, dann ist nach dem vorhergehenden Beispiel $(\mathfrak{A}(x))$ ein D-Kompositionsideal.

3. σ ist offensichtlich ein $\cap$-Homomorphismus.

3. Vollständige Kompositionsideale

Definition. *Ein vollständiges Kompositionsideal ist ein Kompositionsideal, das mit jeder Potenzreihe $a_1x + a_2x^2 + \ldots$ auch a_1x enthält.*

Beispiele. 1. Alle oben erwähnten Ideale $(\mathfrak{A})$, $\{\mathfrak{A}\}$ und W sind vollständige Kompositionsideale.

2. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}$ ein Ideal. $\mathfrak{A}(x) = \{a_ix \circ g \mid g \in R_+,\ a_i \in \mathfrak{A}\}$ und $[\mathfrak{A}]$ sei das von $\mathfrak{A}(x)$ in R erzeugte Ideal. Es gilt: $[\mathfrak{A}] \subseteq R_+$. Sei $f \in [a]$ und $r \in R_+$, dann ist

$$f = \sum_{i-1}^{n} (a_ix \circ g_i).h_i, \quad \text{also} \quad f \circ r = \Sigma[a_ix \circ (g_i \circ r)].(h_i \circ g) \in [a]$$

und ebenso $cf \in [\mathfrak{A}]$ für alle $c \in \mathfrak{R}$.

Ist außerdem f eine Potenzreihe erster Ordnung, die in $[\mathfrak{A}]$ liegt, also

$$f = \sum_{i=1}^{n} (a_ix \circ g_i).c_i, \quad c_i \in \mathfrak{R}, \quad g_i = g_1^ix + g_2^ix^2 + \ldots, \quad \text{also} \quad f = \sum_{i\ 1}^{n} a_ig_1^ic_ix + \ldots,$$

dann liegt aber auch

$$\sum_{i-1}^{n} a_ig_1^ic_ix = \sum_{i=1}^{n} (a_ix \circ x).(g_1^ic_i) \quad \text{in} \quad [\mathfrak{A}].$$

3. Weiters gilt: In desr oben erwähnten Idealalgebra von $\mathscr{R}$ bildet die Menge aller vollständigen Kompositionsideale eine Teilalgebra.

Beweis. Der Durchschnitt von zwei vollständigen Kompositionsidealen A, B ist offensichtlich wieder vollständig, jedes Produkt $A.B$ von zwei Kompositionsidealen ist vollständig, da es keine Potenzreihen erster Ordnung enthält.

Sei nun

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i \in A + B,$$

dan ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i' x^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i'' x^i ,$$

daher ist

$$a_1 x = (a_1' + a_1'') x = a_1' x + a_1'' x \in A + B .$$

Ist

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in A \circ B ,$$

dann ist

$$f = \sum_{i=1}^{n} (c_i \circ d_i) . h_i$$

mit

$$c_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_i^{(j)} x^j \in A , \quad d_i = \sum_{j=1}^{\infty} d_i^{(j)} x^j \in B$$

und

$$h_i = \sum_{j=0}^{\infty} h_i^{(j)} x^x \in R$$

und

$$a_1 x = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)} d_i^{(1)} . h_i^{(0)} \Big) x = \sum_{i=1}^{n} (c_i^{(1)} x \circ d_i^{(1)} x) . h_i^{(0)} \in A \circ B .$$

Satz 8. *Zu jedem vollständigen Kompositionsideal A gibt es genau ein Ideal $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}$ mit*

$$[\mathfrak{A}] \subseteq A \subseteq \{\mathfrak{A}\} .$$

Beweis: Wir setzen $\mathfrak{A} = \{f'(0) \mid f \in A\}$. $\mathfrak{A}$ heiße das *Ableitungsideal* von A. Ersichtlich ist $A \subseteq \{\mathfrak{A}\}$. Sei nun $f \in [\mathfrak{A}]$, also $f = \sum_{i=1}^{n} (a_i x \circ g_i) . h_i$. Wegen der Vollständigkeit von A ist $a_i x \in A$ für alle $a_i \in \mathfrak{A}$. Dann ist auch $a_i x \circ g_i \in A$ und damit $f \in A$.

Sei nun $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}$ ein weiteres Ideal mit

$$[\mathfrak{B}] \subseteq A \subseteq \{\mathfrak{B}\} .$$

Ist $b \in \mathfrak{B}$, dann ist $bx \in [\mathfrak{B}] \subseteq A \subseteq \{\mathfrak{A}\}$, also $b \in \mathfrak{A}$ und analog gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Damit können wir zeigen:

Satz 9. *Ordnet man jedem vollständigen Kompositionsideal A sein Ableitungsideal $\mathfrak{A}$ zu, so erhält man eine homomorphe Abbildung der Algebra der vollständigen Kompositionsideale auf die Idealalgebra von $\mathfrak{R}$.*

Beweis: Es sei $\sigma(A) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ Ableitungsideal von A.

1. $\sigma(A)$ ist nach Satz 8 eideutig bestimmt.

2. Jedes Ideal $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}$ tritt als Bild bei σ auf, denn wegen $[\mathfrak{A}] \subseteq [\mathfrak{A}] \subseteq \{\mathfrak{A}\}$ ist wegen der Eidendutigkeit $\sigma([\mathfrak{A}]) = \mathfrak{A}$.

3. Seien A, B vollständige Kompositionsideale und $\sigma(A) = \mathfrak{A}$, $\sigma(B) = \mathfrak{B}$.

Ist $f \in [\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}]$, dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} (c_i x \circ g_i) . h_i$ mit $c_i \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, das heißt, $c_i x \in A \cap B$ und damit auch $f \in A \cap B$.

Ist $f \in A \cap B$, dann ist $f \in \{\mathfrak{A}\} \cap \{\mathfrak{B}\} = \{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\}$, also ist $\sigma(A \cap B) = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \sigma(A) \cap \sigma(B)$.

4. Ist $f \in [\mathfrak{A} + \mathfrak{B}]$, dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} (c_i x \circ g_i) . h_i$ mit $c_i \in \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. und damit $c_i x \in A + B$, also auch $f \in A + B$.

Ist $f \in A + B$, dann ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in A$, $f_2 \in B$, also ist $f'(0) = f_1'(0) + f_2'(0) \in \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, daher ist $f \in \{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\}$. $\sigma(A + B) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \sigma(A) + \sigma(B)$.

5. Ist $f \in [\mathfrak{A} . \mathfrak{B}]$, dann ist $f = \sum_{i=1}^{n} (c_i x \circ g_i) h_i$ mit $c_i \in \mathfrak{A} . \mathfrak{B}$, also $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ mit $a_j \in \mathfrak{A}$, $b_j \in \mathfrak{B}$.

Dann ist $c_i x = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right) x = \sum_{j=1}^{n} (a_j x \circ b_j x) \in A \circ B$ und damit $f \in A \circ B$.

Ist $f \in A \circ B$, das heißt, $f = \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ b_i) . h_i$ mit $a_i \in A$, $b_i \in B$, $h_i \in R$, dann ist

$$f'(0) = \sum_{i=1}^{n} (a_i'(0) . b_i'(0)) h_i(0) \in \mathfrak{A} . \mathfrak{B}, \text{ also ist } f \in \{\mathfrak{A} . \mathfrak{B}\}.$$

Insbesondere gilt: Der Verband der vollständigen Kompositionsideale ist ein homomorphes Bild des Idealverbandes von $\mathfrak{R}$.

LITERATUR

[1] KAUTSCHITSCH, H.: Über Vollideale in Potenzreihenringen. Period. Math. hung., 7 (3), 1976.

[2] KAUTSCHITSCH, H.: Zur Theorie der Vollideale in Ringen formaler Potenzreihen. Glasnik matemat., 11, 1976, 209—215.

[3] NÖBAUER, W.—LAUSCH, H.: Algebra of polynomials. Amsterdam—London 1973.

Eingegangen am 19. 4. 1977

Universität für Bildungswissenschaften
Universitätsstrasse 67
A – 9010 Klagenfurt
Österreich