Jaroslav Janko

O některých problémech matematické statistiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 4, 378--385

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137009

MATEMATIKA

O NĚKTERÝCH PROBLÉMECH MATEMATICKÉ STATISTIKY

PROF. JAROSLAV JANKO

Časopis Pokroky matematiky, fysiky a astronomie je určen[1]) co nejširšímu okruhu matematiků a fysiků a to především členům Jednoty československých matematiků a fysiků, jejichž značnou částí jsou učitelé matematiky, fysiky a deskriptivní geometrie na středních školách 2. a 3. stupně. Do toho nejširšího okruhu matematiků jsou zahrnuty zajisté také desítky matematických statistiků, kteří v tomto časopise očekávají články o pokrocích v matematické statistice a jsou s to čísti články vyšší úrovně. Kromě toho nelze dnes popírat, že učitelé matematiky a fysiky na středních školách mají se seznámit se základy počtu pravděpodobnosti i se základy matematické statistiky. Snahy o opětovné zavedení základů matematické statistiky do vyučování matematice na středních školách nebyly sice dosud realisovány, není však daleka doba, kdy se bude vyučovat statistickému myšlení na středních školách, poněvadž je toho pro praktický život naléhavě třeba. Autor proto soudí, že článek o některých zásadních otázkách moderní matematické statistiky má v tomto časopise plné oprávnění; doufá, že obsahem i formou podání bude přístupný všem čtenářům. Všimněme si nejprve některých zvláštních rysů matematické statistiky.

Jestliže do počátku tohoto století byla většina pokusů o vědecké teorie povahy deterministické, kde bylo snahou stanovit matematické výrazy, pomocí nichž by se mohla vypočítat hodnota jedné veličiny ze známých hodnot jiných veličin, vyskytly se v tomto století obory, v nichž deterministické řešení nemohlo přinést žádoucí výsledky a bylo proto nahrazeno řešením indeterministickým.

Zvláště úspěšným se ukázalo indeterministické řešení v jaderné fysice, astronomii, biologii, lékařství, v průmyslovém výzkumu, kde všude poskytlo vynikající výsledky. Matematický nástroj pro indeterministické řešení jevů je opatřen počtem pravděpodobnosti. Mluví-li dnes matematik o základech počtu pravděpodobnosti, má zpravidla na mysli Kolmogorovův systém axiomů.

---

[1]) Byla přijata resoluce o informativním úkolu tohoto časopisu, jemuž „musí být věnována největší péče, jak co do náplně, tak pokud jde o náročnost podání, aby naprostá většina článků spadajících pod body a), b), c) resoluce byla přístupná svým obsahem a formou podání učitelům středních škol 3. stupně a zčásti i učitelům 2. stupně, aby se tak především systematicky a postupně zvyšovala úroveň jejich znalostí z moderních úseků matematiky a fysiky. Tím se současně sleduje, aby „Pokroky" plnily svůj informativní úkol i vůči vědeckým pracovníkům v těch oborech, v nichž nemají speciální znalosti". (Pokroky matematiky, fysiky a astronomie, III. č. 6, str. 753).

Ovšem věty počtu pravděpodobnosti o ničem reálném nejednají a nic nepopisují; jsou ryze logického původu. Axiomatika počtu pravděpodobnosti dovoluje z daných pravděpodobností určitých jevů odvodit pravděpodobnosti jiných jevů. Je pak třeba ryze abstraktní pojmy teorie míry uvésti do vztahu se světem zkušenosti, aby se tato teorie naplnila obsahem, kterého se v zájmu formální přesnosti vzdala. Tak se teprve počet pravděpodobnosti stává teorií pravděpodobnosti. Stoupenci názoru, že počet pravděpodobnosti je formálně jen speciální teorií míry, připojují skutečně takové vztahové postuláty k světu zkušenosti, jak je možno čísti v Kolmogorovově spise *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, str. 4.

Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika jsou nepochybně matematickými disciplinami; postavení matematické statistiky je však zcela zvláštní. Lze to nahlédnout, uvážíme-li, co je základním problémem statistiky ve světle snah o vědecké stanovení zásad statistického myšlení.

Kdežto ryzí matematika se zabývá dedukcemi ze speciálních premis a také matematika v počtu pravděpodobnosti postupuje od pravděpodobností, předpokládaných jako známých, a počítá s předpokládanou jistotou pravděpodobnosti jiných jevů, stojí statistik před obrácenými problémy. Statistik neusuzuje nikdy s úplnou jistotou z pozorování zpět na příčinné vztahy, o nichž se předpokládá, že vedly k těmto pozorováním. Jeho postup spočívá v závěrech o všech pravděpodobnostech, které mohou spolupůsobit při vytváření volného spojení mezi příčinou a výsledkem.

Pro daný úkol v určitém úseku existuje objektivně jistý pravdivý stav světa. Statistik však si není jist o tom, jaký je ten pravdivý stav a vychází tudíž z určitého množství možných stavů. Má pak rozhodnout pro jeden z nich. K tomu je třeba najít obecná pravidla, která mají statistika vésti k správnému rozhodnutí v té nejistotě. Osvětlení nám může dát příklad s nejjednodušším problémem dvou stavů a dvou rozhodnutí. První stav nechť znamená, že dodávka výrobků určitého druhu je vyhovující a druhý stav nechť znamená, že je dodávka nevyhovující. Jedno rozhodnutí, které statistik může učinit, je jednat tak, jako kdyby byl pravdivý stav první, a druhé rozhodnutí je jednat tak, jako kdyby byl pravdivý stav druhý. Jde nyní o vyšetření, jaká obecná pravidla mají vésti statistika při jeho rozhodování. Vynoří se otázka po původu těchto pravidel, která se podle Walda nazývají statistické rozhodovací funkce a po tom, je-li nějak odůvodněno dávat přednost jednomu druhu pravidel před druhým. Je přirozeno, že původ těchto pravidel nutno hledat ve filosofické základně. Věda hledá objektivní pravdu, ale nemůže se vyhnout subjektivním prvkům, neboť závěry, které výzkumník činí z výsledků pozorování, jsou určovány také jeho subjektivními názory, jejichž součástí jsou názory ideologické. Někteří badatelé vycházejí z myšlenky, že je možno odvodit všeobecně platnou formuli, která může normativně řídit naše přesvědčení. Liší se však v názoru na povahu vhodné formule. Někteří za takovou považují formuli Bayesovu. V čem spočívá pomoc, kterou tato formule poskytuje při rozhodování např. o odhadu nějakého parametru rozdělení pravděpodobností? Předveďme tedy její odvození [1]. Vyjdeme ze známé definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \text{čili} \quad P(B|A) \,.\, P(A) = P(AB)\,. \tag{1}$$

Předpokládejme, že jev B nastává současně s jedním a jen s jedním z n neslučitelných jevů A_1, A_2, ..., A_n, čili položme

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i \,, \tag{2}$$

kde jevy BA_i a BA_j při $i \neq j$ jsou neslučitelné (disjunktní). Pak podle známé věty o sčítání pravděpodobností je

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) \,, \tag{3}$$

a tedy

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B/A_i) \,. \tag{4}$$

Chceme najít pravděpodobnost jevu A_i, je-li známo, že nastal jev B. Podle vztahu (1) můžeme psát

$$P(A_iB) = P(B)\, P(A_i|B) = P(A_i)\, P(B|A_i) \,,$$

odkud

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{P(B)} \,,$$

čili vzhledem k (3)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)} \,, \tag{5}$$

kterážto rovnice vyjadřuje formuli Bayesovu. Naznačme nyní odvození jisté spojité analogie formule Bayesovy.

Nechť ξ, η jsou spojité náhodné veličiny; označme jako $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ jejich hustoty, jako $p_\xi(x|y)$, $p_\eta(y|x)$ jejich podmíněné hustoty. To znamená: $p_\xi(x)\,\mathrm{d}x = P(x < \xi < x + \mathrm{d}x)$; $p_\xi(x|y)\,\mathrm{d}x = P(x < \xi < x + \mathrm{d}x | y < \eta < y + \mathrm{d}y)$ a podobně pro η.

Nechť nyní značí B jev $y < \eta < y + \mathrm{d}y$ a nechť A_i značí jev $x < \xi < x + \mathrm{d}x$; dosaďme do vzorce (5) a zaměňme součet podle j integrálem podle x dostaneme

$$p_\xi(x|y)\,\mathrm{d}x = \frac{p_\xi(x)\,\mathrm{d}x \,.\, p_\eta(y|x)\,\mathrm{d}y}{\int\limits_{(x)} p_\eta(y|x)\,\mathrm{d}y \,.\, p_\xi(x)\,\mathrm{d}x} \tag{6}$$

Krátíme-li zlomek diferenciálem dy a dělíme-li obě strany rovnice diferenciálem $\mathrm{d}x$, dostaneme

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_\xi(x)\, p_\eta(y|x)}{\int p_\eta(y|x)\, p_\xi(x)\,\mathrm{d}x} \tag{7}$$

Klasická metoda odhadu neznámých parametrů rozdělení náhodné veličiny ξ záleží v tom, že před pozorováním veličiny odhadované se považují za náhodné s některým apriorním zákonem rozdělení pravděpodobností. Předpokládáme-li, že toto apriorní rozdělení je známé, můžeme pomocí věty Bayesovy vyčíslit aposteriorní rozdělení parametrů za podmínky, že výsledky pozorování veličiny ξ jsou $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zabývejme se tedy stanovením neznámých parametrů a, σ normálního rozdělení pozorované náhodné veličiny ξ.

$$p(x|a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Hustota pravděpodobnosti toho, že ve výsledku n nezávislých pozorování veličiny ξ dostaneme hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za podmínky, že neznámé parametry mají hodnoty a, σ je

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|a, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2} \tag{8}$$

Máme nyní za úkol odhadnout průměr a, když je známa směrodatná odchylka σ. Nechť $\varphi_1(a)$ značí apriorní hustotu veličiny a. Pak dostaneme pro podmíněnou hustotu pravděpodobnosti veličiny a při daném σ a zjištěných hodnotách $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\varphi_1(a|x_1, x_2, \ldots, x_n; \sigma) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n|a, \sigma)\, \varphi_1(a)}{\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n|a, \sigma)\, \varphi_1(a)\, \mathrm{d}a} \tag{9}$$

Všimneme si, že aposteriorní pravděpodobnost (pravděpodobnost po pokusu) je úměrna součinu věrohodnosti výsledku pokusu a pravděpodobnosti apriorní (před pokusem). Poněvadž apriorní rozdělení pravděpodobnosti obyčejně není známo, používá se jiných metod, uvedených níže.

Kromě námitek proti normování přesvědčení výzkumníkova určitou dogmatickou formulí třeba uvážit, že naše akce, vyplývající z rozhodování, jsou také ovlivňovány úvahami o jejich důsledcích. Vždyť jsou případy, kdy jedinec jedná nesouhlasně se svým přesvědčením (Neyman). Když např. podniká cestu za rekreací letadlem, je pevně přesvědčen, že tato cesta neskončí nehodou; ale uvažuje-li o důsledcích nehody, je veden k zakoupení pojistky. K hodnocení důsledků rozhodnutí přihlížejí v poslední době navržená určitá pravidla [2]. Jedinec, který se řídí při svém rozhodování těmito pravidly, je „rozumný". Takto definovaný „rozumný" jedinec jedná vždycky tak, jako by znal jednak rozdělení pravděpodobnosti na stavech světa, jednak funkci užitku, která popisuje jeho užitek z každého rozhodnutí v každém stavu. Volí pak své rozhodnutí tak, aby docílil maxima očekávaného užitku.

Obraťme se však nyní k obvyklému řešení odhadu parametru pomocí intervalu spolehlivosti. Tento postup určuje na základě pozorovaných hodnot náhodného výběru interval, v němž neznámý parametr, např. střední hodnota základního souboru, leží s jistou spolehlivostí. Tato spolehlivost se měří koeficientem spolehlivosti. Hranice, které vymezují interval spolehlivosti, jsou tedy čísla, vypočítaná z náhodných výběrů a podléhají tudíž výběrovým změnám. Bereme-li opětovně náhodné výběry z téhož základního souboru, budou se intervaly spolehlivosti měnit od jednoho výběru ke druhému. Parametr, který se má odhadnout pomocí nich, zůstává však pevný. Některé z těch intervalů spolehlivosti jsou správné v tom smyslu, že jejich hranice obsahují tento parametr, kdežto jiné jej neobsahují. Poněvadž neznáme tento parametr, nemůžeme rozhodnout, který interval je správný a který nesprávný. Ale koeficient spolehlivosti nám říká důležitou skutečnost o výběrovém rozdělení intervalů spolehlivosti, neboť udává, jaký zlomek výběrů povede k správným intervalům spolehlivosti. Koeficient spolehlivosti tedy popisuje vlastnost postupu, kterým byl interval spolehlivosti získán, a nepopisuje jednotlivý interval spolehlivosti. Předpokládejme tedy, že výzkumník dostal z pozorování při pokusu n čísel, z nichž mohl sestrojit interval spolehlivosti $(\underline{\Theta}, \overline{\Theta})$ pro parametr Θ, o který mu jde. Může tedy říci s koeficientem spolehlivosti např. 95%, že parametr Θ leží v tom intervalu. Smysl tohoto tvrzení lze pak vyjádřiti takto: kdyby byl pokus opakován bez ustání, tedy nekonečně mnohokrát, a kdyby interval spolehlivosti byl počítán stále týmž způsobem jako interval $(\underline{\Theta}, \overline{\Theta})$, potom by ten interval obsahoval pravdivou hodnotu Θ v 95 procentech případů. Pro nestatistika, který se při aplikaci na reálný svět snaží zhodnotit takový výsledek, to obyčejně znamená, že výzkumník je dostatečně jist, že Θ leží mezi $\underline{\Theta}$ a $\overline{\Theta}$; kdyby chtěl mít větší jistotu o tomto svém tvrzení, mohl by zvýšit koeficient spolehlivosti na 99% nebo výše; tím by se interval rozšířil, ale výzkumník by cítil větší jistotu svého tvrzení.

Pro zjednodušení úvahy vyjádřeme odhad intervalem jen shora ohraničeným a obecně s koeficientem spolehlivosti β; pak můžeme psát pro spolehlivost rovnici

$$\mathrm{sp}\,\{\Theta < a(\beta)\} = \beta\,, \tag{10}$$

kde $a(\beta)$ je hranice vyjádřená funkcí závisící na koeficientu spolehlivosti β, jehož hodnoty jsou mezi 0 a 1, a ovšem na výběrových hodnotách. Kdyby existovalo určité aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti pro Θ, pak by bylo možno najít pro každé β mezi 0 a 1 určitou funkci $b(\beta)$ takovou, že pravděpodobnost

$$p\{\Theta < b(\beta)\} = \beta\,. \tag{11}$$

Podobnost mezi vyjádřením (10) a (11) ukazuje existenci velmi těsného spojení mezi myšlenkami, založenými na pojmu spolehlivosti a myšlenkami bayesovskými. Máme tu dvojí vyjádření jakési formy ujištění o pravdivé hodnotě parametru. Smysl těchto vyjádření však je zcela různý. Jedno spočívá na složité myšlence náhodných intervalů, které pokrývají pravdivou hodnotu, a druhé na myšlence sázek. Ačkoli obě vyjádření mají různý smysl, přece vyhovují praktickému požadavku, aby po provedení pokusu bylo nějaké tvrzení o parametru Θ vysloveno. Ale odpovědi na otázky, kterého vyjádření se má v různých situacích užít, nejsou známé, přes to, že různé názory byly vysloveny; zde tedy naráží statistika na potíže, které musí dalším výzkumem odstranit.

Lze poukázat ještě na další rozdíl mezi přístupem ke statistice cestou intervalů spolehlivosti, kterou lze převést na test významnosti určité hypotézy, a cestou bayesovských pravděpodobností. Objasním jej jedním Lindleyovým příkladem.

Výzkumník provedl n nezávislých pozorování. Výsledkem každého pozorování je buď 0 nebo 1. Pravděpodobnost, že výsledkem bude 1, je táž pro všechna pozorování a je rovna p. Potom pravděpodobnost právě té určité posloupnosti pozorování, kterou dostal výzkumník, je $p^r(1 - p)^{n-r}$, když je v ní r pozorovaných jedniček a $n - r$ nul. Je známo, že celkem $\binom{n}{r}$ různých posloupností mezi nimiž je také ta, kterou dostal výzkumník, dá touž hodnotu r. To však není nyní důležité. Budeme předpokládat, že touž posloupnost dostali nezávisle dva výzkumníci. Jeden z nich si předem stanovil číslo n a vzal n výběrových prvků, mezi nimiž dostal r jedniček. Druhý si předem stanovil číslo r a než dostal r výsledků, které byly jedničky, vzal n výběrových prvků. Tím je řečeno, že druhý výzkumník postupuje při odhadu p Haldanovou inversní binomickou metodou výběru [3].

Jaký bude jejich postup při testu hypotézy $p = p_0$ na hladině významnosti $1 - \alpha$ a alternativních hypotézách $p > p_0$. První výzkumník vypočítá pro pevně stanovené n nejmenší hodnotu r_0 s touto vlastností: je-li $p = p_0$, pak pravděpodobnost, že r přesáhne r_0, není větší než $1 - \alpha$. Za tím účelem vyčíslí součet $\Sigma p_0^r(1 - p_0)^{n-r}$ přes všechny posloupnosti ve všech možných pořádcích při $r > r_0$ a pevném n. Závěr jeho bude, že výsledek je významný na hladině $1 - \alpha$, je-li pozorovaná hodnota r větší než r_0.

Druhý výzkumník vypočítá pro pevně stanovené r největší hodnotu n_0 s touto vlastností: je-li $p = p_0$, pak pravděpodobnost, že n bude menší než n_0, není větší než $1 - \alpha$. Za tím účelem vyčíslí součet $\Sigma p_0^r (1 - p_0)^{n-r}$ přes všechny posloupnosti ve všech možných pořádcích při $n < n_0$ a pevném r. Jeho závěr bude, že výsledek je významný na hladině $1 - \alpha$, je-li pozorovaná hodnota n menší než n_0.

Je zřejmo, že tyto dva testy významnosti jsou zcela různé a tedy také výsledné intervaly spolehlivosti jsou různé.

Srovnejme nyní tento postup s metodou Bayesovou, založenou na apriorních pravděpodobnostech. Při ní vstupují pozorování do výpočtů jen tak, že se dosazují do Bayesovy formule a v ní jen prostřednictvím funkce věrohodnosti. Tato funkce je v našem diskretním případě pravděpodobností skutečně získaných výsledků pozorování, uvažovanou jako funkce neznámých parametrů. Záleží tedy zde jen na pravděpodobnosti skutečně získaných pozorování, a nejde o ta pozorování, která mohla vzniknout. Je tak patrno, že řešení testem významnosti zahrnuje do úvah také výběry jiné, než skutečně pozorované, což bayesovské řešení nečiní.

Kdyby oba výzkumníci užili Bayesova řešení a shodli se na apriorním rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(p)$, pak jejich aposteriorní rozdělení bude $Cf(p)\, p^r(1 - p)^{n-r}$, kde C je konstanta stejná pro oba, ježto věrohodnost je táž pro oba. Ta skutečnost, že Bayesovo řešení potřebuje jen věrohodnost k dosažení svého rozdělení pro Θ a nepotřebuje sumace nebo integrace přes výběrový prostor, má za následek snadné sestrojení výběrových schemat k dosažení žádaných typů konečného tvrzení.

Obraťme se nyní k rozboru obvykle užívaného postupu statistikova při řešení určitého výzkumného úkolu. Na základě znalostí z teorie odhadu a testování hypotéz statistik zná vydatnost metod, spočívajících na kombinování pozorování, takže se snaží při plánování pokusu nebo výběrového šetření uplatnit principy replikace, randomisace a stratifikace. Tyto principy jsou podstatné pro rozvržení pokusů. Stane se někdy, že řešení problému odhadu metodou maximální věrohodnosti není vhodné třeba proto, že neexistují za nulové hypotézy všechny střední hodnoty druhých derivací věrohodnostní funkce. Nebo jsou pokusy, v nichž nemohou býti stanoveny přímo účinky různých zásahů čili ošetření na pokusné jednotky a je třeba dalšího pokusu, aby mohly býti odhadnuty. Pro takové případy mohou být navrženy plány dvoufázové, v nichž není nejlepší metoda rozboru hned zřejmá.

Než navrhne plán pokusu nebo šetření, musí tedy mít statistik představu možných hypotéz, vhodných pro studované jevy. Musí mít představu o tom jak pokus vyzní, jaký význam a upotřebení může mít. Důležitou úlohu má tudíž představivost, která je vůbec podmínkou tvořivé vědecké práce. Statistik musí tedy projít paměť a přehledně prozkoumat různé významné hypotézy. Je to myšlenkový proces, představující práci tvůrčí obrazotvornosti, spojenou s pečlivým probráním informace uložené v paměti výzkumníkově. Aby mohl nabýti představy o tom, jak pokus vyzní, musí odvodit důsledky hypotéz přicházejících v úvahu a srovnat je s pozorovanými daty.

Při zkoumání určité třídy jevů tedy sestrojí statistik pokusný model, který zahrnuje hypotézy, v nichž nespecifikuje určité podrobnosti, jako třeba hodnoty určitých parametrů. Výzkum pak spočívá ve stanovení těchto hodnot parametrů čili ve vyplnění mezer v modelu, nebo ve zkoumání zda model je vhodný k tomu, aby představoval dotyčné jevy. Základem řešení jsou pozorovaná data, která jsou výsledkem pokusů. S nimi se srovnají důsledky plynoucí z uvažovaných hypotéz a přikročí se k rozhodování. Máme-li např. rozhodnout, zda dodávka je vyhovující, pak musíme nejprve rozhodnout, jaké kontrolní metody se má užít. Pak následuje rozhodování na nižší úrovni, je-li dodávka vyhovující, když se užije zvolené metody. Toto poslední rozhodování je procesem skoro automatickým, neboť určitý výběr výrobků se překontroluje a vadné se spočítají. Je-li vadných výrobků víc než určitý počet, je dodávka nevyhovující. V tomto smyslu je rozhodnutí objektivní, neboť je uděláno na základě dat a lidský činitel je z tohoto postupu v podstatě vyloučen. Právě tato objektivnost rozhodnutí získala moderní statistice popularitu ve vědeckém výzkumu.

Tomuto postupu se vytýká dogmatičnost a žádá se obecnější řešení problému závěrečného stadia výzkumu. K tomu směřuje např. teorie Neymanova. Výzkumem se má rozhodnout o provedení určité akce z několika možných, které znamenají různý stupeň užitku, závisící na skutečném parametru Θ_0. Volba akce se má provést ve shodě s výsledkem pozorování a se zřetelem k užitku, který různé akce znamenají. Sestaví se nejprve přehled všech možných akcí. Tím je definována množina akcí A, která se nazývá prostor rozhodnutí. Metoda volby mezi akcemi této množiny ve shodě s výsledkem pozorování X je ekvivalentní definici nějaké funkce $a = f(X)$ na prostoru výběrovém, jejíž hodnoty a jsou v prostoru rozhodnutí. Tato funkce je statistickou rozhodovací funkcí neboli rozhodovacím pravidlem. Aby bylo možno volit mezi všemi možnými rozhodovacími pravidly, hledá Neyman nějakou nedogmatickou metodu, která by charakterisovala vlastnosti každého z těch pravidel zvlášť. Příslušné rozhodovací pravidlo předepíše každou z akcí a s pravděpodobností resp. s četností, kterou lze počítat. Budou pak odpovídat každému parametrickému bodu Θ a každé předpokládané rozhodovací funkci f pravděpodobnosti $P\{a|f, \Theta\}$, že v případě, když pravdivý parametr Θ^* se rovná určité z možných hodnot Θ, užití rozhodovací funkce f povede k specifické akci a. Množina těchto pravděpodobností, které odpovídají všem možným hodnotám Θ, popisuje úplně vlastnosti předpokládaného pravidla f a nazývá se prováděcí charakteristikou rozhodovací funkce f. Znalost prováděcích charakteristik všech možných rozhodovacích pravidel dovolí výzkumníkovi vybrat jedno, které se hodí pro jeho případ nejlépe. Praktické užití tohoto postupu je ovšem různě složité podle povahy problému. Má-li výběrový prostor a prostor rozhodnutí konečný počet prvků, existuje konečný počet možných rozhodovacích pravidel a je tedy zásadně možno prozkoumat prováděcí charakteristiky každého z těchto pravidel. I v tomto případě bývají praktické nesnáze, které se zmnohonásobí, když je výběrový prostor nekonečný a zvláště když je také prostor rozhodnutí nekonečný. Zkoumání prováděcích charakteristik po jedné se stává nesnadným a nemožným; proto se pokusíme řešit problém v jistém smyslu obráceně. Specifikujeme předem vlastnosti žádoucí prováděcí charakteristiky a pokusíme se určit rozhodovací funkci, existuje-li taková, jejíž prováděcí charakteristiky mají naznačené vlastnosti. Z tohoto řešení vyplynulo odvození mnohých dnes běžných pojmů matematické statistiky, jako např. stejnoměrně nejsilnější testy statistických hypotéz nebo systémy nejkratších intervalů spolehlivosti.

Obrátil jsem zde pozornost k některým prakticky důležitým problémům matematické statistiky, které mohou vést i k novým problémům matematickým. Doufám však, že z uvedeného je patrno, že naléhavé a obtížné úkoly matematické statistiky jsou povahy logické a dále, že je třeba řešit problémy spadající do filosofie vědy.

Literatura:

[1] B. V. Gnĕdĕnko: *Kurs tĕorii verojatnostĕj*, 1954, 2. vyd.

[2] L. J. Savage: *The foundations of statistics* (1954).

[3] Haldane: *On a method of estimating frequencies*, Biometrika 33, str. 222.

TŘI PRINCIPY INDUKCE V MATEMATICE

O. Hájek, *katedra mat. a deskr. geom. el. fak. ČVUT* v Praze

V matematice je běžně používán známý princip úplné indukce; v některých partiích moderní matematiky se střetáváme v analogických situacích s tzv. principem transfinitní indukce; konečně v jednom článku o základech analysy A. Ja. Chinčin uvádí „spojitý princip indukce“.

Snad bude zajímavé si tato tvrzení porovnat, a promluvit o jejich významu.

I. Úplná indukce

Tzv. princip úplné (matematické) indukce lze formulovat takto:

A'. *Nechť V je množina (některých) přirozených čísel, která splňuje podmínky*

(a) *obsahuje číslo* 1;

(b) *je-li pro některé přirozené číslo n splněno $n \in V$, je též $n + 1 \in V$.*

Potom V obsahuje všechna přirozená čísla.

Formulace bývá i jiná — např. se mluví o tvrzení T_n závislém na přirozeném čísle n, pravdivém pro $n = 1$, atd., a usuzuje se na pravdivost všech T_n. Jiný tvar, ekvivalentní, formálně však poněkud silnější (má slabší předpoklady), je