Miloš Lánský

Základní pojmy teorie distribucí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 9 (1964), No. 3, 143--156

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137027`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IX—ČÍSLO 3

ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE DISTRIBUCÍ

MILOŠ LÁNSKÝ, Karlovy Vary

ÚVOD

Cílem tohoto informačního článku je seznámit čtenáře, který má znalosti na úrovni základního kursu vysokoškolské analýzy, s hlavními myšlenkami teorie distribucí. Proto důkazy naznačujeme jen v hlavních rysech, některé výsledky jsou uvedeny vůbec bez důkazu. Jde o to, aby čtenář získal určitou orientaci v základech tohoto oboru, odborné poučení musí hledat v původní literatuře.

Východiskem našich úvah bude pojem funkce.

V analýze reálných funkcí jedné reálné proměnné se pojem funkce zavádí jako jednoznačné zobrazení jisté množiny reálných čísel (definičního nebo existenčního oboru funkce) na (eventuálně jinou) množinu reálných čísel (obor funkčních hodnot).

Z hlediska aplikací této teorie v technických a přírodních vědách hrají zde nejdůležitější roli pojmy derivace a integrálu, opírající se o klíčový pojem limity, který má sám o sobě v aplikacích spíše druhořadý význam. Protože potřeby praxe si vyžadují práci s nespojitými nebo i se spojitými funkcemi, které nemusí mít všude derivaci, je potřebí užívat pravidel o derivování a integrování s největší opatrností a respektovat při tom někdy dosti složité předpoklady platnosti příslušných vět.

Takový postup je často pro nematematika zdlouhavý a neúnosný, ať již z toho důvodu, že příslušné matematické finesy bezpečně nezná, nebo proto, že ho takové úvahy zdržují od rozvíjení vlastní myšlenky, kterou matematicky pouze modeluje.

Seriózní vědečtí a výzkumní pracovníci — nematematici postupují proto zpravidla tak, že daný problém řeší matematicky na základě zjednodušených a formálních matematických obratů, u nichž do jisté míry nesledují podmínky platnosti. Práci pak předloží matematikovi, který ji kriticky prozkoumá po stránce matematické správnosti.

Při takové prověrce může vyjít najevo, že doplněné matematické předpoklady v rámci matematické teorie jsou sporné nebo interpretovány nazpět do modelované disciplíny jsou v rozporu s teoretickými předpoklady. Potom uvádíme v pochybnost správnost celé práce.

Avšak jsou známy z historie případy, které, viděny z hlediska své doby, je možno označit jako „záhadné". Je všeobecně známo, že diferenciální a integrální počet fundovaný v LEIBNIZOVĚ pojetí na pojmu nekonečně malé veličiny se rozvinul do značných rozměrů, i když, jak ukázalo období revize spojené se jmény RIEMANNA, CACHYHO, WEIERSTRASSE, BOLZANA aj., výchozí úvahy byly chybné a protikladné. Jen málo metod bylo popřeno, většina z nich byla zachována, doplněna, zpřesněna, hlouběji zdůvodněna.

Jiným, poněkud mladším „záhadným" případem je operátorový počet založený inž. HEAVISIDEM; tento počet se ukázal být užitečným nástrojem např. při řešení diferenciálních rovnic; tím, že formálně algebraizoval operace analýzy, zkracoval prakticky dobu potřebnou k řešení. Také operátorový počet, který při svém vzniku stál na nevysvětlitelných základech, našel svou matematickou teorii a zařadil se do vědecké matematiky dosti dlouho po tom, co osvědčil své přednosti v praxi. Dnešní teorie Laplaceovy, Fourierovy a jiných transformací tvoří zvláštní matematickou disciplínu.

Tyto dva historické příklady, k nimž by bylo možno připojit řadu dalších, nás vedou k myšlence (označované dříve jako „princip permanence"), že některé algoritmy obrážejí obecnější vlastnosti objektivní reality než pojmy, z nichž byly historicky odvozeny.

Zcela moderním dokladem této myšlenky je teorie distribucí. Má své počátky v pracích J. HADAMARDA [1] a M. RIESZA [2], uzrála v pracích S. L. SOBOLEVA [3], [4] a našla svou vlastní podobu i jméno ve známé dvoudílné monografii L. SCHWARTZE [5] v letech 1950—51.

Teorie distribucí tím, že postuluje neomezenou proveditelnost některých operací, jako je především derivování, byla nucena nahradit dosavadní pojem funkce v určitém smyslu obecnějším pojmem tzv. distribuce. Název distribuce se odvozuje od zvláštního typu funkcí, které v této teorii hrají zásadní úlohu a jsou v úzkém příbuzenském vztahu k distribučním funkcím známých z matematické statistiky. V sovětské literatuře se distribucím celkem vhodněji říká zobecněné funkce.

Teorie distribucí řeší vedle řady jiných otázek také existenci tzv. nevlastních funkcí, z nichž nejznámější je Diracova δ-funkce, kterou zavedl P. A. M. DIRAC ve své knize [6] o principech kvantové mechaniky; δ-funkce se od té doby stala nedílnou součástí např. elektroinženýrských úvah jako impulsová funkce.

Jde o tento problém: Podle Diraca má δ-funkce tu vlastnost, že pro všechny funkce φ z jisté široké třídy funkcí platí vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(0)\,. \tag{1}$$

Kdybychom chtěli tuto funkci popsat jako zobrazení množiny všech reálných čísel, musili bychom si představit, že pro $x \neq 0$ je $\delta(x) = 0$ a pro $x = 0$ je $\delta(0) = +\infty$, při čemž je $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Avšak taková funkce v dosavadním smyslu neexistuje. Přitom všechny výpočty se s její pomocí značně zjednodušovaly a teoretické závěry prováděné formálním užitím vzorce (1) byly v souhlase se zkušeností. Této funkce se však nikdy nepoužívalo v souvislosti s jejími funkčními hodnotami „bod po bodu", ale pouze za integračním znakem ve smyslu (1). Funkce δ a jiné tvrdošíjné „nevlastní" útvary byly předmětem kritiky ze strany matematiků, jako např. J. von NEUMANNA [7]. Teprve teorie distribucí ukázala oprávněnost Diracových úvah v tom smyslu, že δ-funkci zavádí nikoli jako funkci, ale jako distribuci. Ukazuje se, že tato distribuce je derivací Heavidideovy funkce a sama má derivace všech řádů, které jsou opět distribucemi.

Pojem distribuce čili zobecněné funkce představuje jednu z plodných etap v zajímavé historii vývoje pojmu funkce v matematice. Na novém základě bylo možno v posledních letech přeformulovat celou řadu základních vět matematické analýzy, které v novém pojetí lépe slouží potřebám aplikované matematiky a v některých případech i ospravedlňují známou tzv. „nedbalost" a „lehkomyslnost" teoretických fyziků a techniků užívajících matematického aparátu při své práci.

V dalším výkladu se seznámíme s elementárními základy teorie distribucí, při čemž se v symbolice odchýlíme od Schwartzovy knihy a přidržíme se symboliky užívané v čtyřdílné monografii J. M. GELFANDA a G. E. ŠILOVA [8].

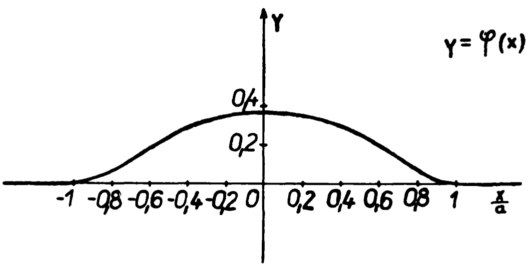
PROSTOR ZÁKLADNÍCH FUNKCÍ

V tomto odstavci se budeme zabývat reálnými funkcemi jedné reálné proměnné definovanými v množině všech reálných čísel. Funkci nazveme *nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou*, má-li v celém svém definičním oboru spojité derivace všech řádů. Funkci nazveme *finitní*, existuje-li konečný interval, vně něhož funkce nabývá pouze hodnoty nula. *Základní funkcí* pak rozumíme nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou finitní funkci. Že taková funkce existuje, ukazuje příklad:

Příklad. Nechť $a > 0$ a funkce φ je dána takto:

$$\varphi(x) = e^{-a^2/(a^2-x^2)} \quad \text{pro} \quad |x| < a\,,$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pro} \quad |x| \geqq a\,.$$

Dá se dokázat, že funkce φ je základní. Graf této funkce je na obr. 1.



Obr. 1.

Definujeme-li běžným způsobem součet funkcí a násobení funkce reálným číslem, snadno nahlédneme, že platí tato věta:

Věta. *Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ základní funkce. Pak také lineární kombinace $\varphi = a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ je základní funkcí.*

Tvoří tedy všechny základní funkce ve smyslu uvedených operací lineární prostor. V tomto lineárním prostoru zavádíme tzv. K – konvergenci takto:

Definice. *Říkáme, že posloupnost*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

základních funkcí konverguje k nule ve smyslu K – konvergence

$$\varphi_n \xrightarrow{K} 0 ,$$

platí-li, že

a) *existuje pevný interval, vně něhož všechny funkce φ_n nabývají pouze nulové hodnoty*;

b) *posloupnost $\{\varphi_n\}$ konverguje stejnoměrně k nule spolu se všemi svými derivacemi.*

Lineární prostor základních funkcí s takto definovanou konvergencí nazveme K-prostorem (prostorem základních funkcí).

Příklad. Posloupnost $\{\varphi_n\}$ daná předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-a^2/(a^2-x^2)} , \quad |x| < a ,$$

$$\varphi_n(x) = 0 , \quad |x| \geqq a$$

konverguje k nule ve smyslu K – konvergence.

Příklad. Posloupnost $\{\varphi_n\}$ daná předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-n^2a^2/(n^2a^2-x^2)} , \quad |x| < na$$

$$\varphi_n(x) = 0 , \quad |x| \geqq na$$

sice konverguje k nule stejnoměrně se všemi svými derivacemi, ale není splněna podmínka a), takže neplatí $\varphi_n \xrightarrow{K} 0$.

PROSTOR DISTRIBUCÍ

Funkcionálem (f, φ) v prostoru K rozumíme jednoznačné zobrazení f prostoru K základních funkcí φ do množiny reálných čísel. Funkcionál nazveme lineární, platí-li pro libovolnou lineární kombinaci základních funkcí vztah

$$(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2) .$$

Funkcionál nazýváme spojitý, platí-li

$$\varphi_n \to 0 \Rightarrow (f, \varphi_n) \xrightarrow{K} 0 .$$

Každý lineární spojitý funkcionál nazýváme *distribuce.*

Příklad: Budiž $f(x)$ lokálně integrovatelná funkce. Pak této funkci můžeme přiřadit funkcionál

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x .$$

Tento funkcionál existuje pro $\varphi \in K$, protože součin $f(x)\,g(x)$ je také lokálně integrovatelná funkce a protože je tento součin finitní funkcí, jde v podstatě o vlastní integrál. Tento funkcionál je lineární a spojitý, je to tedy distribuce. Dá se ukázat, že touto distribucí je funkce $f(x)$ určena až na množinu míry nula. Dá-li se distribuce vytvořit uvedeným integrálním předpisem, říkáme, že je *regulární.*

Příklad. Konstantní distribuce

$$(C, \varphi) = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, dx$$

je regulární distribucí.

Příklad. Definujeme funkcionál

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in K .$$

Tento funkcionál je zřejmě lineární a spojitý, je to tedy distribuce. Jde o tzv. Diracovu δ-funkci. Ukážeme si, že tato distribuce není regulární.

Kdyby totiž existovala lokálně integrovatelná funkce $\delta(x)$, pro niž by platilo

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, \varphi(x) \, dx ,$$

musilo by být

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, \varphi(x) \, dx = \varphi(0)$$

také pro funkci

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= e^{-a^2/(a^2 - x^2)} , \quad |x| < a , \\ \varphi(x) &= 0 \qquad\qquad\quad , \quad |x| \geqq a , \end{aligned}$$

a tedy

$$\int_{-a}^{+a} \delta(x) \, e^{-a^2/(a^2 - x^2)} \, dx = e^{-1} .$$

Se zmenšujícím se a se však levá strana blíží k nule a v tom je spor.

Distribuci, která není regulární, nazveme *singulární.* Diracova „funkce" je tedy singulární distribucí. Součet dvou distribucí f, g definujeme vztahem

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi) .$$

Protože pravá strana je zřejmě opět lineárním spojitým funkcionálem, jde o distribuci.

Příklad. Nechť f, g jsou regulární, tj.

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \varphi(x) \, dx$$

$$(g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \varphi(x) \, dx .$$

Potom

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + g(x)]\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

a platí, že součet dvou regulárních distribucí je regulární distribuce.

Součin nekonečněkrát spojitě diferencovatelné funkce $a(x)$ s distribucí f definujeme vztahem

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi)\,.$$

Protože pravá strana je zřejmě opět lineárním spojitým funkcionálem nad K, jde o distribuci.

Příklad. Nechť f je regulární. Potom

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[a(x)\,\varphi(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(x) f(x)]\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

af je opět regulární. Je-li a číslo (konstantní funkce), platí speciálně vzhledem k lineárnosti

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi) = a(f, \varphi)\,.$$

Pro lineární kombinaci distribucí

$$a_1 f + a_2 g$$

platí tedy

$$(a_1 f + a_2 g, \varphi) = (a_1 f, \varphi) + (a_2 g, \varphi) = (f, a_1\varphi) + (g, a_2\varphi) =$$
$$= a_1(f, \varphi) + a_2(g, \varphi)\,.$$

Je to opět distribuce (lineárnost, spojitost).

Příklad. Jsou-li f, g regulární, a_1, a_2 reálná čísla, platí

$$(a_1 f + a_2 g, \varphi) = a_1(f, \varphi) + a_2(g, \varphi) =$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f(x) + a_2 g(x)]\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

je tedy i lineární kombinace regulární.

Protože lineární kombinace distribucí je opět distribuce, tvoří všechny distribuce lineární prostor.

Mějme posloupnost distribucí $\{f_n\}$. Platí-li pro všechny funkce $\varphi \in K$ vztah

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)\,,$$

píšeme též

$$f_n \xrightarrow{K'} f\,.$$

Tím je v lineárním prostoru distribucí definována konvergence.

Lineární prostor distribucí s takto definovanou konvergencí nazýváme stručně prostorem K'. Dají se dokázat věty analogické známým větám z analýzy, které zapisujeme vztahy:

$$\lim_{n\to\infty} af_n = a \lim_{n\to\infty} f_n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n\,.$$

Příklad. Konverguje-li posloupnost lokálně integrovatelných funkcí $\{f_n(x)\}$ stejnoměrně k lokálně integrovatelné funkci $f(x)$ v každém konečném intervalu, platí zřejmě

$$\lim_{u\to\infty} (f_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (f, \varphi)\,,$$

a tedy $f_n \xrightarrow{K'} f$.

Pokud jde o vztah mezi regulárními a singulárními distribucemi, dá se dokázat, že každá singulární distribuce je limitou posloupnosti regulárních distribucí.

Je zajímavé, že prostor K' je úplný.

DERIVOVÁNÍ A INTEGROVÁNÍ DISTRIBUCÍ

Ke každé distribuci $f(x)$ je možno utvořit distribuci $f(ax + b)$ $(a \neq 0,\ b$ konstanty), tzv. lineární substitucí pomocí předpisu

$$(f(ax + b), \varphi(x)) = \left(f(x), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{x - b}{a}\right)\right).$$

Příklad. Je-li $f(x)$ regulární, platí

$$(f(ax + b), \varphi(x)) = \left(f(x), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{a - b}{a}\right)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{x - b}{a}\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax + b)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

a tedy $f(ax + b)$ je opět regulární.

Věta. *Ke každé distribuci $f(x)$ existuje limita*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\,,$$

která je opět distribucí a platí

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi')\,.$$

Důkaz této věty se opírá o úvahy, které můžeme sledovat z těchto vztahů:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \varphi(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)-f(x), \frac{1}{h}\varphi(x)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(f(x+h), \frac{1}{h}\varphi(x)\right) - \left(f(x), \frac{1}{h}\varphi(x)\right)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(f(x), \frac{1}{h}\varphi(x-h)\right) - \left(f(x), \frac{1}{h}\varphi(x)\right)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x), -\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}\right) = (f, -\varphi').$$

Jde zřejmě opět o lineární a spojitý funkcionál.

Definice. *Distribuci f' určenou vztahem $(f', \varphi) = (f, -\varphi')$ nazýváme derivací distribuce f.*

Příklad. Je-li $f(x)$ spojitá a má spojitou derivaci, pak

$$(f', \varphi) = (f, -\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \underbrace{-\Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

a $f'(x)$ je opět regulární distribuce.

Věta. *Zcela obecně platí*

$$(f+g)' = f' + g'\,.$$

Důkaz plyne z této úvahy:

$$((f+g)', \varphi) = (f+g, -\varphi') = (f, -\varphi') + (g, -\varphi') =$$
$$= (f', \varphi) + (g', \varphi) = (f' + g', \varphi)\,.$$

Věta. *Je-li a nekonečněkrát spojitě diferencovatelná funkce a f distribuce, platí*

$$(af)' = a'f + af'\,.$$

Důkaz této věty se opírá o tuto myšlenku:

$$((af)', \varphi) = (af, -\varphi') = (f, -a\varphi') = (f, -(a\varphi)' + a'\varphi) =$$
$$= (f, -(a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (f', a\varphi) + (a'f, \varphi) =$$
$$= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi)\,.$$

Speciálně je-li a konstanta, pak

$$(af)' = af'\,.$$

Snadno se dokáže následující věta.

Věta. *Každá distribuce má derivace všech řádů, které lze definovat vztahem:*

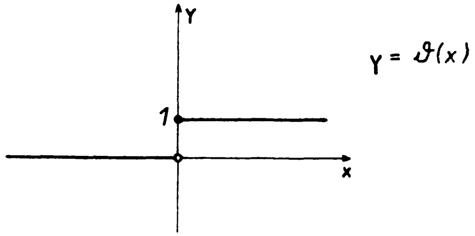
$$(f^{(n)}, \varphi) = (f, \varphi^{(n)} (-1)^n)\,.$$

Tak je možno hovořit o derivacích u funkcí (jimž odpovídají distribuce), které derivace v klasickém slova smyslu nemají.

Příklad. Heavisideova funkce je definována takto:

$$\vartheta(x) = 0\,,\ x < 0\,,$$
$$\vartheta(x) = 1\,,\ x \geqq 1$$

(viz obr. 2). Derivováním příslušné distribuce dostaneme



Obr. 2.

$$(\vartheta', \varphi) = (\vartheta, -\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x =$$
$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[-\varphi(x)\Big]_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta, \varphi)\,.$$

Je tedy Diracova funkce v tomto smyslu derivací Heavisideovy funkce:

$$\vartheta' = \delta\,.$$

Věta. *Je-li*

$$f_n \xrightarrow{K'} f\,, \quad pak \quad f_n' \xrightarrow{K'} f'\,.$$

Důkaz plyne z této úvahy:

$$(f_n', \varphi) = (f_n, -\varphi') \to (f, -\varphi') = (f', \varphi)\,.$$

S pomocí této věty, která nemá klasickou analogii, můžeme snadno odvodit např. možnost derivování řady distribucí člen po členu. Kdybychom sledovali tyto úvahy dále, dostali bychom celou řadu velmi jednoduchých a zajímavých vět, např. o Fourierových řadách apod. Pro zajímavost uvádíme, že při zobecnění na distribuce více proměnných je možno zavést parciální derivace a pro každou distribuci platí věta o rovnosti smíšených parciálních derivací druhého řádu.

Všimněme si ještě problematiky integrálu v teorii distribucí. Základem integrálního počtu je stanovení všech primitivních funkcí k 0. Jde o řešení diferenciální rovnice $y' = 0$, kterou je možno zapsat pomocí distribucí takto:

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0\,.$$

Tím je funkcionál y určen pouze na podmnožině $K_0 \subset K$ těch funkcí, které mohou být vyjádřeny jako derivace jiných základních funkcí.

Pomocná věta. *Nechť* $\varphi \in K$. *Pak*

$$\varphi \in K_0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Důkaz. a) Je-li $\varphi \in K_0$, pak existuje $\psi \in K$, takže

$$\varphi = \psi' \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Je-li

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

pak

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

je základní funkce, c. b. d.

Věta: *Je-li $y' = 0$, pak $y = C$, kde C je konstantní distribuce.*

Důkaz: Normováním funkce z K, která nepatří do K_0, lze dosáhnout toho, že platí

$$\varphi_1(x) \in K, \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Ke každé funkci $\varphi \in K$ pak existuje

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což je základní funkce a patří do K_0.
Ze vztahu

$$(y, -\varphi') = 0$$

plyne

$$\underbrace{(y, \varphi_0)}_{o} = (y, \varphi) - (y, \varphi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x)\,,$$

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = (C, \varphi)\,.$$

Je tedy

$$y = C, \text{ c. b. d.}$$

Věta: *Ke každé distribuci f existuje primitivní distribuce F, takže je*

$$F' = f\,.$$

Důkaz: Položme

$$(F, \varphi) = (f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t)\,.$$

Protože argument funkcionálu na pravé straně patří zřejmě do K a jsou splněny požadavky lineárnosti a spojitosti, má tato rovnost smysl. Poněvadž platí

$$(F', \varphi) = (F, -\varphi'),$$

je

$$(F', \varphi) = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Protože musí být

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

plyne odtud

$$(F', \varphi) = (f, \varphi), \quad \text{c. b. d.}$$

Věta. *Rozdíl dvou primitivních distribucí je konstantní distribuce:*

$$F' = G' \Rightarrow F - G = C.$$

Důkaz.

$$(F', \varphi) = (G', \varphi), (F' - G', \varphi) = 0,$$
$$((F - G)', \varphi) = 0, F - G = C.$$

V integrálním počtu teorie distribucí postaveném na těchto základech je možno sledovat podobně jako v klasickém integrálním počtu problém integrace lineární kombinace funkcí a možnosti tzv. metod per partes a substituce.

Abychom ukázali, že pojem primitivní distribuce odpovídá pojmu primitivní funkce, probereme si tento příklad:

Příklad. Nechť $n > -1$ je reálné číslo a $f(x) = x^n$ je funkce, které odpovídá distribuce f určená předpisem

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in K.$$

Protože $f(x)$ je lokálně integrovatelná, má tento předpis smysl a distribuce f je regulární. Podle dokázané věty existuje k distribuci f primitivní distribuce F určená vztahem

$$(F, \varphi) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right),$$

kde $\varphi_1(t)$ je jistá pevná základní funkce z K, která má vlastnost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Odtud plyne, že je

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \left[-\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}x.$$

Užijeme-li zde věty o integraci per partes a o derivaci integrálu podle horní meze, dostaneme

$$(F, \varphi) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(-\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(-\varphi(x) + \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \,.$$

Vzhledem k finitnosti základních funkcí je první závorka na pravé straně rovna nule. Položíme-li dále

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = C \,,$$

dostaneme

$$(F, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} C\varphi(x)\,\mathrm{d}x \,.$$

Odtud plyne, že primitivní distribuce F je regulární a odpovídá funkci

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \,.$$

To je v souladu se známým vzorcem z integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné.

ZÁVĚR

Pojem distribuce je možno rozšířit na komplexní funkce komplexní proměnné a také na funkce více proměnných. Místo prostoru K, o němž zde byla řeč, je možno vzít za prostory základních funkcí obecnější třídy funkcí charakterizované určitými topologickými vlastnostmi a tím přizpůsobit definici distribuce povaze studovaného problému, např. v teorii diferenciálních rovnic. Při interepretaci výsledků hraje roli pojem regularizace distribuce, tj. v určitém smyslu vyjádření distribuce pomocí integrálů.

Jednoduchost a obecnost výsledků dosažených teorií distribucí je vykoupena tím, že ve srovnání s funkcemi je u distribuce poměrně obtížné definovat její hodnotu v určitém bodě. Existuje-li limita

$$\lim_{\lambda \to 0} (f(x_0 + \lambda x), \varphi(x)) = \lim_{\lambda \to 0} \left(f(x), \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\lambda}\right)\right),$$

nazveme tuto konstantní distribuci *hodnotou* distribuce f v bodě x_0 a značíme ji $f(x_0)$. Existují však distribuce, které hodnotu v bodě nemají. Jinou takovou nepříjemností je, že součin dvou distribucí nemusí být obecně distribuce.

V našich úvahách jsme se zabývali pouze primitivní distribucí, o niž se opírá pojem tzv. neurčitého integrálu (jako distribuce). Omezený (určitý) integrál je možno zavést s pomocí primitivní distribuce definičním vztahem

$$\int_a^b f(x+t)\,\mathrm{d}t = F(x+b) - F(x+a)\,.$$

Existuje-li hodnota této distribuce pro $x = 0$, dostáváme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Definice distribucí pomocí lineárních funkcionálů není jediná, kterou lze uplatnit; v literatuře se vyskytují i jiné definice. Tak např. utvoříme-li uspořádané dvojice $(F(x), k)$, kde na prvém místě je spojitá funkce a na druhém místě přirozené číslo k, můžeme mezi takovými dvojicemi zavést relaci ekvivalence takto:
Klademe

$$(F(x), k) \sim (G(x), l)\,,$$

platí-li buď

1. $$k \leqq l \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}^{l-k}G(x)}{\mathrm{d}x^{l-k}} - F(x)$$

je polynom stupně $< k$,
nebo

2. $$l \geqq k \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}^{k-l}F(x)}{\mathrm{d}x^{k-l}} - G(x)$$

je polynom stupně $< l$.
Třídy ekvivalentních dvojic identifikujeme s distribucemi.

Zajímavá je Mikusińského definice, která připomíná Cantorovu konstrukci reálných čísel pomocí fundamentálních posloupností racionálních čísel. Za základ svých úvah bere posloupnosti spojitých funkcí $\{f_n(x)\}$, které mají tu vlastnost, že ke každé posloupnosti existuje nezáporné celé číslo k a skoro stejnoměrně konvergentní posloupnost

$$\{F_n(x)\}\,,$$

takže platí

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$$

pro všechna přirozená n.
Dvě posloupnosti

$$\{f_n(x)\} \quad \text{a} \quad \{g_n(x)\}$$

prohlásí za ekvivalentní, jestliže

$$\{F_n^{(k)}(x) - G_n^{(k)}(x)\}$$

konverguje skoro stejnoměrně k nule.

Třídy ekvivalentních posloupností nazýváme distribuce.

Všechny dosud známé definice distribucí vedou ke konstrukci nových matematických objektů, zobecněných funkcí, které je možno bez omezení „derivovat".

Teorie distribucí aplikována na klasické integrální transformace, např. Fourierovu, vede k novým výsledkům a umožňuje studovat zobecněná řešení některých diferenciálních rovnic, která mají přímý význam v aplikacích matematiky.

Literatura

[1] J. Hadamard: *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris 1932.

[2] M. Riesz: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. *81* (1949), 1.

[3] S. L. Sobolev: Methode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. Matemat. sb., *1* (43) (1936), 39.

[4] S. L. Sobolev: *Někotoryje primenenija funkcionalnogo analiza v matematičeskoj fizike*. Leningrad 1950.

[5] L. Schwartz: *Théorie des distributions* I, II. Paris 1950—51.

[6] P. A. M. Dirac: *Principles of quantum mechanics*. Oxford-University Press.

[7] J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.

[8] I. M. Gelfand, G. E. Šilov: *Obobščennyje funkcii i dejstvija nad nimi*. Moskva 1958, vypusk 1—4.

AUTOMATIZACE PROGRAMOVÁNÍ

Jiří Kopřiva, Brno

1. Z článku J. Hořejše [1] se mohl čtenář poučit o základních principech programování pro samočinné počítače. Při způsobu tam popsaném musí programátor vypracovat celý program výpočtu v *operačním kódu* počítače, na němž má být výpočet proveden. To znamená, že smí užít pouze těch operací, které počítač provádí na základě jednotlivých *instrukcí* svého operačního kódu. Výpočet musí být tedy zpravidla rozložen na elementární *aritmetické*, *logické* a *řadicí operace*.

Tento způsob programování je sice dosud nejběžnější, má však řadu nevýhod. Nehledě na to, že pro velmi rychlé počítače nemá tato metoda prakticky smysl, souvisí tyto nevýhody také s tím, že operační kód běžných samočinných počítačů je někdy velmi omezený. Obsahuje zpravidla instrukce pro elementární aritmetické operace, několik logických instrukcí (pro srovnávání čísel co do rovnosti či nerovnosti, logické násobení a sčítání) a několik řadicích instrukcí (pro porušení přirozené posloupnosti plnění instrukcí apod.). Např. cyklické výpočty, které se při iteračních i jiných numerických metodách velmi často vyskytují, musí být někdy dosti pracně sestavovány s použitím výše uvedených instrukcí. Při takovém způsobu programování