Josef Bílý

Měření životnosti věcí za provozních podmínek

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 1, 14--18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137156

JOSEF BÍLÝ

MĚŘENÍ ŽIVOTNOSTI VĚCÍ ZA PROVOZNÍCH PODMÍNEK

Ve velkých provozech [výrobních, komunikačních, při poskytování služeb — jako na př. stravování a četných jiných] se často užívá velkého počtu věcí téže funkce, na př. vypinače, žárovky, kondensátory, sklenice, příbory a pod., a je k disposici několik typů této věci, na př. výrobky různých závodů. Je účelné zařadit do provozu věci toho typu, který má nejdelší střední délku života při jinak stejných technických a ekonomických podmínkách. Aby se zjistila střední délka života věcí jednotlivých typů, buď se výběr věcí jednotlivých typů podrobuje zkouškám napodobujícím nebo realisujícím provozní podmínky a na základě výsledku těchto zkoušek je dána přednost jednomu typu věcí; nebo jsou věci všech příslušných typů zařazeny do provozu a vedou se záznamy o době zařazení, míře používání a době vyřazení jednotlivých věcí a ze záznamů za dostatečně dlouhou dobu se vypočte střední délka života věcí jako podklad pro rozhodnutí pro určitý typ. Ale vedení takových záznamů zatěžuje provoz, v němž po případě ani není třeba znát střední délku života věcí jednotlivých typů, nýbrž stačí znát toliko, který z typů má střední délku života nejdelší. Proto byla odvozena methoda umožňující bez vedení záznamů o době zařazení, míře používání a o době vyřazení věcí podle typů rozhodnout jen na základě složení souboru věcí podle typů, který typ má nejdelší střední délku života. Souborně o této methodě pojednal Goodman v [1], při čemž podrobně probral případ, kdy jde o dva typy věcí. V tomto případě spočívá methoda v tom, že se do provozu zařadí věci obou typů v libovolném poměru (nejčastěji polovinou od každého typu) a zvolí se pevný, t. j. během doby se neměnící postup nahrazování vyřazených věcí věcmi téhož nebo druhého typu, načež se po jisté dosti dlouhé době prozkoumá složení souboru věcí podle typů. Aby provádění postupu bylo v praxi jednoduché, dává se přednost postupům souměrným, t. j. postupům, při kterých pravidlo o použití věci stejného nebo druhého typu k nahrazení vyřazené věci nezávisí na typu vyřazené věci. Důležité jsou dva postupy; při jednom z nich se vyřazená věc nahradí věcí typu druhého — t. zv. výměna typů (*switch*) — nebo se vyřazená věc nahradí věcí typu náhodově vybraného, při čemž oba typy mohou být vybrány se stejnou pravděpodobností — t. zv. systém rovnoměrného užití obou typů (*fifty-fifty*). Goodman vyšel z předpokladu, že pravděpodobnost setrvání věci v provozu v době t od počátku sledování procesu nahrazování ($t > 0$) je dána exponenciální funkcí a odvodil vzorce pro pravděpodobnost, že na určitém místě bude v čase t věc určitého typu (1 nebo 2); dokázal, že při obou hořejších postupech tato pravděpodobnost se pro určitý typ při $t \to \infty$ blíží poměru střední délky života tohoto typu k součtu středních délek života obou typů. To znamená, že při užití uvedených pravidel bude typ s delší střední délkou života ve velkém souboru četněji zastoupen. Ukázal též, že konvergence k tomuto rovnovážnému stavu je nejrychlejší při systému výměny typů. Těchto výsledků Goodman použil k testu hypothesy, že střední délka života věcí jednoho typu je delší než střední délka života věcí druhého typu. Odvodil dále, že přibrání údajů o počtu vyřazených věcí odděleně podle typů umožňuje odhadnout střední délky života věcí obou typů. Zabýval se konečně i rovnovážnými stavy v procesu nahrazování vyřazených věcí, je-li k disposici $k > 2$ typů věcí téže funkce, a ukázal na konec, že odvozených výsledků lze za jistých předpokladů užít, i když pravděpodobnost setrvání věcí v provozu není vyjádřena exponenciální funkcí.

Právě popsaný proces vyřazování a nahrazování věcí je zvláštním případem vícerozměrného procesu obnovy. Lze jej studovat pomocí theorie Markovových řetězců, jsou-li vyřazené věci nahrazovány jen v určitých obdobích, nebo pomocí theorie Markovových procesů, jsou-li věci vyřazovány v čase spojitě a hned nahrazovány. Při tom se sleduje historie vyřazování a nahrazování na jednom místě; systém je ve stavu i, je-li na pozorovaném místě věc typu i. Goodman užívá postupu obojího.

Účelem tohoto příspěvku je upozornit na tento významný způsob zkoumání životnosti věcí bez vedení záznamů a ukázat na případu tří typů věcí některé postupy při nahrazování vyřazovaných věcí, jež jsou zobecněním uvedených dvou pravidel, a srovnat je navzájem, jakož i naznačit obdobné postupy, jde-li o více než tři typy věcí. Bude při tom předpokládáno spojité vyřazování věcí.

Nechť je čas měřen od počátku procesu obnovy, jemuž přísluší čas $t = 0$. Označme f_i intensitu vyřazení věci typu i ($i = 1, 2, \ldots, n$), při čemž $f_i > 0$ a f_i nezávisí na čase t. Předpokládáme, že f_i jsou na počátku procesu obnovy neznámá. Pak $\frac{1}{f_i} = L_i$ je střední délka života věci typu i. Věc typu i je při vyřazení nahrazena s pravděpodobností π_{ik} věcí typu k. O matici pravděpodobností π_{ik}, jež je maticí stochastickou (viz Truksa, [2], str. 22), předpokládáme, že je nerozložitelná. Sledujme historii věci instalované na určitém místě a označme $p_k(t)$ pravděpodobnost, že na pozorovaném místě je v čase t věc typu k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Pro intensity přechodu ze stavu i do stavu k platí

$$\mu_{ik} = f_i \pi_{ik} \quad \text{pro} \quad i \neq k,$$
$$\mu_{ii} = -f_i + f_i \pi_{ii}.$$

Matice (μ_{ik}) je quasistochastická (Truksa, [2], str. 161); pro pravděpodobnosti $p_k(t)$ platí (Truksa, [2], str. 167)

$$\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} = -f_k p_k(t) + \sum_{i=1}^{n}{}' f_i \pi_{ik} p_i(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

Pro $n = 3$ dostaneme z (1) diferenciální rovnice

$$p_i''(t) + S_1 p_i'(t) + S_2 p_i(t) = A_i, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

při čemž

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3}{}' f_i (1 - \pi_{ii}),$$
$$A_1 = f_2 f_3 [(1 - \pi_{22})(1 - \pi_{33}) - \pi_{23} \pi_{32}],$$
$$A_2 \text{ a } A_3 \text{ se dostane z } A_1 \text{ cyklickou záměnou indexů,} \tag{3}$$
$$S_2 = A_1 + A_2 + A_3.$$

Řešení těchto rovnic je

$$p_i(t) = \frac{A_i}{S_2} + C_{1i} \exp\left[-\frac{S_1 - \sqrt{S_1^2 - 4S_2}}{2} t\right] + C_{2i} \exp\left[-\frac{S_1 + \sqrt{S_1^2 - 4S_2}}{2} t\right],$$
$$(i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

při čemž integrační konstanty se určí z počátečních podmínek, t. j. z daných $p_i(0)$, ($i = 1, 2, 3$). Snadno se nahlédne, že existují $\lim\limits_{t \to \infty} p_i(t) = p_i = \frac{A_i}{S_2}$, charakterisující

t. zv. rovnovážný stav, a že rychlost konvergence k němu je určována výrazem exp $\left[-\frac{S_1-\sqrt{S_1^2-4S_2}}{2}t\right]$, je-li $S_1^2 > 4S_2$ resp. výrazem $\exp\left[-\frac{S_1}{2}t\right]$, je-li $S_1^2 < 4S_2$ resp. výrazem $t\exp\left[-\frac{S_1}{2}t\right]$ je-li $S_1^2 = 4S_2$.

Zkoumejme rychlost konvergence v těchto třech případech:

1. Cyklická záměna typů

Zobecněním pravidla záměny typů při dvou typech se jeví při třech (a více) typech cyklická záměna typů.

$$\begin{aligned}&\text{Nechť a) buď } \pi_{12} = \pi_{23} = \pi_{31} = 1, \quad \text{ostatní } \pi_{ik} = 0\,,\\ &\qquad\text{b) nebo } \pi_{32} = \pi_{21} = \pi_{13} = 1, \quad \text{ostatní } \pi_{ik} = 0\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Pak (1) nabývá tvaru

$$p_i''(t) + (f_1+f_2+f_3)\,p'(t) + (f_2f_3+f_3f_1+f_1f_2)\,p_i(t) = f_1f_2f_3L_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + (f_1+f_2+f_3)\,\lambda + f_2f_3 + f_3f_1 + f_1f_2 = 0 \tag{7}$$

má komplexní kořeny, když $1/2 \max\limits_i f_i$ je menší než součet aritmetického a geometrického průměru ostatních dvou f_i, což bude v praxi zpravidla splněno, neboť střední délky života konkurujících si typů se nemohou mnoho lišit. Předpokládejme dále, že tato podmínka je splněna. Rychlost konvergence v tomto případě je udávána výrazem $\exp\left[-\frac{f_1+f_2+f_3}{2}t\right]$.

Pro rovnovážný stav platí

$$p_i = \frac{L_i}{L_1+L_2+L_3} \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{8}$$

Pravidla cyklické záměny, jež jsou zobecněním pravidla záměny při dvou typech, jsou nesouměrná vzhledem k typům. Uveďme níže dvě souměrná pravidla.

2. Rovnoměrné užití ostatních typů

Užijeme-li při nahrazování vyřazené věci s pravděpodobností 1/2 pravidla 5 a) a s touž pravděpodobností pravidla 5 b), dostaneme pravidlo v názvu uvedené, pro něž

$$\pi_{ik} = \frac{1}{2} \qquad \text{pro } i \neq k\,,\ \pi_{ii} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)\,. \tag{9}$$

V tomto případě nabývá (2) tvaru

$$p''(t) + (f_1+f_2+f_3)\,p_i'(t) + \frac{3}{4}(f_2f_3+f_3f_1+f_1f_2)\,p_i(t) = \frac{3}{4}f_1f_2f_3L_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

a charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + (f_1 + f_2 + f_3)\lambda + \frac{3}{4}(f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2) = 0 \tag{11}$$

má pro libovolná f_i oba kořeny vždy reálné. Pro rovnovážný stav platí opět (8), rychlost konvergence k němu je určována výrazem

$$\exp\left[-\left(f_1 + f_2 + f_3 - \sqrt{(f_1 + f_2 + f_3)^2 - 3(f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2)}\right)\frac{t}{2}\right],$$

a jsou-li f_1, f_2, f_3 táž, jakých bylo použito při postupu 1, je konvergence pomalejší než při pravidle 1.

3. Rovnoměrné použití všech typů

Jestliže nevyloučíme při nahrazování typ, k němuž náležela věc vyřazená, dostaneme při rovnoměrném použití všech typů postup charakterisovaný vztahy

$$\pi_{ik} = \frac{1}{3} \quad \text{pro všechna } i, k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Zde nabývá (2) tvaru

$$p_i''(t) + \frac{2}{3}(f_1 + f_2 + f_3)p_i(t) + \frac{1}{3}(f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2)p_i(t) = \frac{1}{3} f_1 f_2 f_3 L_i,$$
$$(i = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Charakteristická rovnice

$$3\lambda^2 + 2(f_1 + f_2 + f_3)\lambda + f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2 = 0 \tag{14}$$

má pro libovolná f_i reálné kořeny, rovné dvěma třetinám kořenů rovnice (11). Pro rovnovážný stav platí opět (8), ale konvergence k němu je pomalejší než u postupu 2. Je zajímavé si všimnout, že derivováním (6) dostaneme diferenciální rovnici, jejíž charakteristická rovnice je

$$\lambda^3 + (f_1 + f_2 + f_3)\lambda^2 + (f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2)\lambda = 0, \tag{15}$$

již lze psát ve tvaru

$$(\lambda + f_1)(\lambda + f_2)(\lambda + f_3) = f_1 f_2 f_3; \tag{15'}$$

pak pravá strana rovnice (14) je derivací pravé strany rovnice (15).

Jde-li o n typů, jsou obdobou pravidel (5), (9) a (12) tato pravidla:

a) cyklická záměna:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \pi_{i,i+1} = 1 \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n-1, \ \pi_{n,1} = 1, \quad \text{ostatní } \pi_{i,k} = 0, \\ \text{b)} & \pi_{i,i-1} = 1 \quad \text{pro } i = 2, 3, \ldots, n, \ \pi_{1,n} = 1, \quad \text{ostatní } \pi_{i,k} = 0,\end{array}\right\} \tag{16}$$

b) rovnoměrné užití ostatních typů

$$\pi_{i,k} = \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } i \neq k, \tag{17}$$
$$\pi_{i,i} = 0,$$

c) rovnoměrné užití všech typů

$$\pi_{i,k} = \frac{1}{n} \quad \text{pro všechna } i, k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{18}$$

Pro $n = 2$ splývají pravidla (16) a (17).

Obdobným postupem dostaneme diferenciální rovnice pro $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Charakteristické rovnice příslušných diferenciálních rovnic jsou snadným zobecněním rovnic (7), (11) a (14).

Literatura

[1] Leo A. Goodman, *Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions*, Journal of the American Statistical Association, roč. 48 (1953), str. 503 až 530.

[2] Dr Ladislav Truksa, *Statistická dynamika* (skripta), Praha 1955.

FAKTOROVÉ EXPERIMENTY V PRŮMYSLOVÉM VÝZKUMU

Ing. MILAN BENEŠ (Ústav pro výzkum rud. Praha),

Ing. JIŘÍ LIKEŠ (Ocelářský výzkumný ústav, Praha)

V článku jsou přehledně shrnuty nejdůležitější methody a theorie pro navrhování a uspořádání faktorových průmyslových experimentů a jejich analysy. V prvých dvou částech jsou ukázány některé charakteristické znaky a zvláštnosti průmyslových experimentů, především ve srovnání se zemědělským výzkumem, a uvedeny výhody faktorových experimentů proti klasickému uspořádání pokusů, které se ve výzkumu dosud běžně provádějí. Po zavedení některých základních pojmů jsou v dalších částech článku osvětleny principy úplných faktorových experimentů, methody spřažení a neúplné faktorové experimenty. Hlavní důraz je při tom kladen na experimenty typu 2^n, které mají v praxi největší význam, a zde jsou vysvětleny obecně pro n faktorů. Dále jsou uvedeny některé jednodušší experimenty typu 3^n. Vlastní analysa těchto experimentů je naznačena velmi stručně, neboť se v podstatě zakládá na určitých aplikacích analysy rozptylu. V závěru práce jsou ukázány nejdůležitější nevýhody dosavadních uspořádání faktorových experimentů a naznačeny cesty k jejich odstranění, což bude předmětem dalšího článku. Matematický výklad method faktorové analysy vyžaduje určitých znalostí z obecné theorie analysy rozptylu.

Úvod

Theoretická i experimentální výzkumná práce je převážně založena na pokusech, kterými se mají ověřit předpoklady, jež jsme o zkoumaných jevech (na př. fysikální, chemické, biologické a jiné povahy) provedli. Účelem pokusů je zpravidla stanovit, které vlivy významě působí na výsledek pokusu, který je možno kvantitativně stanovit, a jakým způsobem tyto vlivy výsledek pokusu ovlivňují.

Prakticky se při provádění pokusů postupuje tak, že se na základě určitých theoretických předpokladů o zkoumaném jevu nebo na základě předcházejících zkušeností vymezí zpravidla z velkého počtu vlivů pouze takové, které působí na zkoumaný výsledek pokusu nejpodstatněji. V technické praxi těchto vlivů je zpravidla více a při jejich zkoumání