Josef Veselka

O přerovnávání řad

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 5-6, 699--721

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137337

4. Na obr. 4 je odstraněno „zatékání" podél *CFD*. Řešení provede se užitím pomocné střechy nad oblastí, ohraničenou orientovanými polopřímkami $A_\infty 1D$, $D2B_\infty$, $A_\infty 4C$, $C3B_\infty$. Podrobnosti zde nebudeme uvádět.

5. Na obr. 5 je odstraněno zatékání podél $CD4F_\infty$. Řešení proveďme nejprve užitím pomocné střechy S_1 nad vypuklým úhlem ω_1, ohraničeným orientovanými polopřímkami $A_\infty 1C$, $C2B_\infty$ (kde $C2 \perp CD$) a posléze užitím pomocné střechy S_2 nad dutým úhlem ω_2, ohraničeným polopřímkami $E_\infty 3C^*$, C^*2B_∞ (kde přímka C^*3 je kolmá k $D4$ a její vzdálenost od bodu D rovná se délce úsečky CD). Je-li S_3 sjednocení střech S_1, S_2, pak odstraňme z S_3 tu část, která leží uvnitř kolmo promítacího hranolového prostoru oblasti ω_2, jejíž orientovanou hranicí je $F_\infty 4DC2B_\infty$. Zbylá část z S_3 je hledaná upravená střecha nad oblastí, ohraničenou polopřímkami $A_\infty 1C$, $D4F_\infty$ a orientovanou úsečkou CD, přičemž podél $CD4F_\infty$ je odstraněno zatékání.

Předchozí řešení bylo provedeno úpravou střechy nad polorovinou, ohraničenou orientovanou přímkou $1C$. Je možné též vyjít od střechy nad vypuklým úhlem, ohraničeným orientovanými polopřímkami $A_\infty 1C$, CDG_∞ (G_∞ je nevlastní bod přímky CD) a provést úpravu obdobně jako v předchozím.

Literatura

G. Scheffers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, I. Band, Berlin, Springer Verlag.

JOSEF VESELKA

O PŘEROVNÁVÁNÍ ŘAD

Pro řady s komplexními čísly (vektory) platí tato velmi úplná věta: Součty konvergentních řad komplexních čísel (vektorů), vzniklých přerovnáním dané konvergentní řady komplexních čísel (vektorů), tvoří množinu, obsahující buď jediné číslo, nebo čísla celé přímky v komplexní rovině, nebo všechna čísla v komplexní rovině.[1])

Obsahem níže uvedeného příspěvku je důkaz věty, že za jistých předpokladů (třetí případ uvedené věty) lze konvergentní řadu komplexních čísel (vektorů) přerovnat k libovolnému předem danému součtu superposicí tří řad z dané řady vybraných.

Budiž $\boldsymbol{A}$ množina všech čísel reálných. Její elementy budeme označovat malými řeckými nebo latinskými písmeny. Dvojici (α, β), $\alpha \in \boldsymbol{A}$, $\beta \in \boldsymbol{A}$ budeme nazývat vektorem, α, β jeho souřadnicemi. Vektory budeme označovat polotučnými stojatými latinskými písmeny. Jsou-li na př. α, β souřadnice vektoru $\mathbf{a}$, je $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$. Číslo $a = |\mathbf{a}| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ nazveme absolutní hodnotou vektoru $\mathbf{a}$. Je-li $a = 1$, budeme $\mathbf{a}$ nazývat jednotkovým vektorem, nebo také směrem. Jednotkové vektory budeme označovat indexem nula napravo nahoře (na místě exponentu), tedy na př. $\mathbf{a}^0$ (je-li $a = 1$). Vektor o nulových souřadnicích budeme nazývat nulovým vektorem a označíme jej znakem $\mathbf{0}$. Množinu všech vektorů budeme nazývat také kartézskou rovinou a budeme ji důsledně označovat písmenem $\boldsymbol{K}$.

V $\boldsymbol{A}$ budiž součet a součin definován v obvyklém smyslu.

Rovnost dvou vektorů definujeme takto: Je-li $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, $\mathbf{b} = (\gamma, \delta)$, je $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

[1]) K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2. vyd., str. 398. Steinitzova práce (E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 143 (1913), 144 (1914), 146 (1915), citovaná na této straně v poznámce, řeší otázku množiny součtů konvergentních řad komplexních čísel zcela obecně pro n-rozměrná komplexní čísla (n-rozměrné vektory).

Součet vektorů $a = (\alpha, \beta)$, $b = (\gamma, \delta)$ definujeme takto: $a \pm b = (\alpha \pm \gamma, \beta \pm \delta)$. Je tedy $(a + b) \in K$.

Součin čísla $\omega \in A$ a vektoru $a = (\alpha, \beta)$ definujeme takto: $\omega a = (\omega \alpha, \omega \beta)$. Je tedy $\omega a \in K$.

Tak zvaný skalární součin dvou vektorů $a = (\alpha, \beta)$, $b = (\gamma, \delta)$ definujeme takto: $ab = \alpha\gamma + \beta\delta$.

Je tedy $ab \in A$. Je-li $ab = 0$, budeme říkat, že vektory a, b jsou k sobě kolmé.

Pro stručnost budeme psát a^2 místo aa.

Zřejmě platí nyní tyto rovnosti:

$$a + b = b + a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c,$$
$$ab = ba, \quad a^2 = a^2,$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$\omega(ba) = (\omega a) b = a(\omega b) = \omega ab.$$

Budiž k^0 libovolný jednotkový vektor (směr). Pak množinu všech vektorů a z K, pro které platí $ak^0 \geq (a \neq 0)$, budeme nazývat půlrovinou směru k^0 a označíme ji $P(k^0)$. Zřejmě půlroviny $P(k^0)$ a $P(-k^0)$ vyplní celou kartézskou rovinu K.

Budiž dána posloupnost vektorů

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Souřadnice vektoru a_n buďtež α_n, β_n ($\alpha_n, \beta_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$).

Definitoricky zavedem pojem konvergence a divergence posloupnosti $\{a_n\}$ takto:

$\{a_n\}$ konverguje, konvergují-li současně posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$. Jinak $\{a_n\}$ diverguje.

V dalším budeme důsledně předpokládat, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ (to jest } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\text{), tedy také } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sestrojíme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

a její částečné součty

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$n = 1, 2, \ldots$ Jestliže posloupnost $\{s_n\}$ konverguje, říkáme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, a obráceně, jestliže posloupnost $\{s_n\}$ diverguje, řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Definice 1.: Budiž $\varepsilon \in A$, $\varepsilon > 0$. Okolí $U_\varepsilon(a^0)$ směru a^0 je množina všech vektorů x z K, pro které platí

$$|x - x a^0| \leqq \varepsilon x.$$

Slovem „dosti (libovolně) malé okolí" rozumíme okolí pro dosti (libovolně) malé ε.

Definice 2: Směr a^0 nazýváme směr konvergentní, jestliže řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}' (a_k a^0)$, $a_k \in P(a^0)$ konverguje. V opačném případě, to jest jestliže řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}' (a_k a^0)$, $a_k \in P(a^0)$ diverguje, nazýváme směr a^0 divergentním.

Definice 3: Směr a^0 nazýváme směr kritický, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in A$ řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}{}' a_k$, $a_k \in U_\varepsilon(a^0)$ diverguje.

Definice 4: Budiž $\{{}^i a_n\}$, ($n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots, m$) m libovolných posloupností vektorů. Budiž $\varphi(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ libovolná posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost ${}^1a_1, {}^1a_2, \ldots, {}^1a_{\varphi(1)}, {}^2a_1, {}^2a_2, \ldots, {}^2a_{\varphi(2)}, \ldots, {}^m a_1, {}^m a_2, \ldots, {}^m a_{\varphi(m)}, {}^1a_{\varphi(1)+1}, {}^1a_{\varphi(1)+2}, \ldots, {}^1a_{\varphi(1)+\varphi(m+1)}, {}^2a_{\varphi(2)+1}, {}^2a_{\varphi(2)+2}, \ldots, {}^2a_{\varphi(2)+\varphi(m+2)}, \ldots, {}^m a_{\varphi(m)+1}, {}^m a_{\varphi(m)+2}, \ldots, \ldots, {}^m a_{\varphi(m)+\varphi(2m)}, \ldots$

(to jest posloupnost, kterou dostaneme tak, že vezmeme nejprve $\varphi(1)$ prvních členů z $\{{}^1a_n\}$, pak $\varphi(2)$ prvních členů z $\{{}^2a_n\}$, atd. až $\varphi(m)$ prvních členů z $\{{}^ma_n\}$, pak $\varphi(m+1)$ dalších členů zase z $\{{}^1a_n\}$, $\varphi(m+2)$ dalších členů z $\{{}^2a_n\}$, atd. až $\varphi(2m)$ dalších členů z $\{{}^ma_n\}$ atd.) nazveme superposicí daných n posloupností $\{{}^ia_n\}$.

Stejně definujeme superposici řad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} {}^ia_k$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ jako součet členů právě definované superposice posloupností $\{{}^ia_n\}$ (v témž pořadí).

Definice 5: Budiž $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ posloupnost vektorů a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Řadu $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ nazýváme zhuštěním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jestliže množinu R všech přirozených čísel lze rozložit v množinový součet[2])

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} R_k$$

vzájemně disjunktních konečných množin R_k tak, že

1. $b_m = \sum\limits_{k \in R_m} a_k$, $m = 1, 2, \ldots,$

2. $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k \in R_m} a_k = 0.$

Zřejmě také $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = 0$.

Poznámka:

1. Je-li $R_m = m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, je $b_m = a_m$ a vzhledem k $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Triviální zhuštění).

2. Je-li na př. $R_m = \{2m - 1, 2m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, je $b_m = a_{2m-1} + a_{2m}$, a vzhledem k $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ také $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m-1} = 0$ a $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = 0$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m-1} = 0$ a $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = 0$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} (a_{2m-1} + a_{2m}) = 0$.

Definice 6: Budiž $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ posloupnost vektorů a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Budiž $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ zhuštěním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak přerovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, příslušným zhuštění $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, budeme nazývat řadu, kterou sestrojíme takto:

Podle definice 5 je $b_m = \sum\limits_{k \in R_m} a_k$, $m = 1, 2, \ldots$ Elementy z R_m označme ${}^mk_i$ $(i = 1, 2, \ldots$ konečné) a seřaďme je do posloupnosti $\{{}^mk_i\}$. Elementu ${}^mk_i$ z $\{{}^mk_i\}$ přiřaďme element $a_{{}^mk_i}$ z $\{a_n\}$ a sestrojme řadu

$$a_{{}^1k_1} + a_{{}^1k_2} + \ldots + a_{{}^2k_1} + a_{{}^2k_2} + \ldots + a_{{}^mk_1} + a_{{}^mk_2} + \ldots$$

Tuto řadu budeme nazývat přerovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$, příslušným zhuštění $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$.

---

[2]) Množinový součet $M + N$ dvou množin M a N je množina všech elementů, které jsou buď v M nebo v N.

Budiž $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ ($\lim_{k\to\infty} \mathrm{a}_k = 0$) řada vektorů. O této řadě platí věty:

Věta a): Jsou-li všechny směry v K konvergentní, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ absolutně a je tedy při libovolném přerovnání konvergentní.

Věta b): Existuje-li alespoň jeden směr konvergentní a^0 a jeden směr divergentní a'^0 takové, že $\mathrm{a}^0 + \mathrm{a}'^0 = 0$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ při libovolném přerovnání divergentní.

Věta c): Předpokládejme, že existuje alespoň jeden směr a^0 konvergentní a alespoň jeden směr b^0 divergentní, ale že nenastane případ věty b). Podle definice 2 je řada $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{a}_k\mathrm{a}^0)$ konvergentní. Budiž $\mathrm{a} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{a}_k\mathrm{a}^0)\,\mathrm{a}^0$. Budiž $\mathrm{s} \in K$ libovolný vektor, splňující podmínku $(\mathrm{a} - \mathrm{s})\,\mathrm{a}^0 = 0$. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ lze přerovnat tak, že přerovnaná řada konverguje k vektoru s.

Věta d): Všechny směry v K buďtež divergentní. Budiž $\mathrm{s} \in K$ libovolný vektor. Pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ lze přerovnat tak, že přerovnaná řada konverguje k s.

Tyto čtyři věty vyčerpávají všechny možné případy. V dalším se budeme zabývat případem věty d), to jest řadou vektorů, pro kterou všechny směry v K jsou divergentní. Přerovnání řady, zmíněné ve větě d), provedeme tak, že elementy dané řady rozdělíme do právě tří posloupností jistým způsobem tak, že k libovolnému vektoru s existuje taková superposice těchto posloupností, že příslušná řada má za součet vektor s. Přesně vyjádříme obsah dalších úvah touto větou:

Věta hlavní: Budiž $\{\mathrm{a}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ posloupnost vektorů taková, že $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$. Všechny směry v K buďtež divergentní. Pak danou posloupnost $\{\mathrm{a}_n\}$ lze přerovnat na posloupnost $\{\mathrm{a}'_n\}$ těchto vlastností: $\{\mathrm{a}'_n\}$ lze rozložit do nejméně tří posloupností $\{{}^i\mathrm{a}_n\}$, $i = 1, 2, 3$ tak, že platí

a) posloupnosti $\{{}^i\mathrm{a}_n\}$, $i = 1, 2, 3$ jsou disjunktní,

b) každý člen z $\{\mathrm{a}'_n\}$ leží v některé z posloupností $\{{}^i\mathrm{a}_n\}$,

c) budiž s libovolný vektor. Pak existuje taková superposice řad (definice 4) $\sum_{n=1}^{\infty} {}^i\mathrm{a}_n$, $i = 1, 2, 3$, že má za součet daný vektor s.

Nejprve dokážeme několik vět pomocných.

Pomocná věta 1: Budiž $\{\mathrm{a}_n\}$ posloupnost vektorů a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$. Budiž $\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{b}_m$ zhuštěním řady $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathrm{a}_n$. Budiž $\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{b}_m$ konvergentní; pak přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$, příslušné zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{b}_m$ je také konvergentní a má stejný součet.

Důkaz: Budiž $\mathrm{a}_{1k_1} + \mathrm{a}_{1k_2} + \ldots + \mathrm{a}_{2k_1} + \mathrm{a}_{2k_2} + \ldots + \mathrm{a}_{mk_1} + \mathrm{a}_{mk_2} + \ldots$ (${}^mk_i \in R_m$; $m = 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots$ konečné, viz definici 6) přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathrm{a}_n$, příslušné zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{b}_m$. Označme konečnou řadu $\mathrm{a}_{mk_1} + \mathrm{a}_{mk_2} + \ldots$ znakem $[\mathrm{B}_m]$ ($m = 1, 2, \ldots$). Zmíněné přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$ lze pak psát ve tvaru $\sum_{m=1}^{\infty} [\mathrm{B}_m]$. Podle definice 5 je $\mathrm{b}_m = \sum_{k \subset R_m} \mathrm{a}_k$. Označme dále $\overline{b}_m = \sum_{k \in R_m} a_k$. Je tedy podle definice 5 $\lim_{m\to\infty} \overline{b}_m = 0$.

Podle předpokladu je $\sum_{m=1}^{\infty}{}' \mathrm{b}_m$ konvergentní. Budiž $\sum_{m=1}^{\infty}{}' \mathrm{b}_m = \mathrm{b}$. Pak lze ke každému $\varepsilon > 0$ najít N celé kladné takové, že pro všechna $j > N$ platí

$$\left| \mathrm{b} - \sum_{i=1}^{j}{}' \mathrm{b}_i \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Budiž s_k k-tý částečný součet přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$. Může nyní nastat buď, že s_k právě vyčerpá všechny vektory z jistého počtu konečných řad $[\mathrm{B}_m]$, nebo že s_k obsahuje ještě několik prvních členů z další konečné řady $[\mathrm{B}_m]$. Zřejmě se můžeme omezit na taková k, aby s_k vyčerpalo alespoň j a nejvýše $j + 1$ konečných řad $[\mathrm{B}_m]$, $(j > N)$. Je tedy

$$\mathrm{s}_k = \sum_{i=1}^{j}{}' [\mathrm{B}_i] + \mathrm{r}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j}{}' \mathrm{b}_i + \mathrm{r}_{j+1},$$

při čemž r_{j+1} je součet nejvýše všech členů z $[\mathrm{B}_{j+1}]$, a je tedy

$$r_{j+1} \leqq \sum_{i \in R_{j+1}} a_i = \overline{b}_{j+1}.$$

Nyní

$$\mathrm{b} - \mathrm{s}_k = \mathrm{b} - \left(\sum_{i=1}^{j}{}' \mathrm{b}_i + \mathrm{r}_{j+1} \right),$$

tedy

$$|\mathrm{b} - \mathrm{s}_k| \leqq \left| \mathrm{b} - \sum_{i=1}^{j}{}' \mathrm{b}_i \right| + r_{j+1} \leqq \left| \mathrm{b} - \sum_{i=1}^{j}{}' \mathrm{b}_i \right| + \overline{b}_{j+1}.$$

Zřejmě nyní $j \to \infty$ když $k \to \infty$. Dále podle předpokladu $\lim_{i\to\infty} \overline{b}_i = 0$, tedy $\overline{b}_{j+1} < \varepsilon$ pro dosti velká j a tedy z (1) plyne

$$|\mathrm{b} - \mathrm{s}_k| < 2\,\varepsilon,$$

což bylo dokázat.

Pomocná věta 2: Budiž $\{\eta_n\}$ posloupnost nerostoucí, $\eta_1 \geqq \eta_2 \geqq \ldots$, a budiž $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Budiž dále $\{u_n\}$ posloupnost taková, že $u_n \geqq 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$ a $u_n \leqq 4\,\eta_n + \frac{1}{2} u_{n-1}$ pro všechna n. Pak $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Důkaz: Zvolme n pevné. Pak platí podle předpokladu věty

$$u_{n+1} \leqq 4\,\eta_{n+1} + \frac{1}{2} u_n \leqq 8\,\eta_{n+1} + \frac{1}{2} u_n \leqq 8\,\eta_n + \frac{1}{2} u_n,$$

$$u_{n+2} \leqq 4\,\eta_{n+2} + \frac{1}{2} u_{n+1} \leqq 4\,\eta_n + \frac{1}{2}\left(8\,\eta_n + \frac{1}{2} u_n\right) = 8\,\eta_n + \frac{1}{2^2} u_n,$$

$$u_{n+3} \leqq 4\,\eta_{n+3} + \frac{1}{2} u_{n+2} \leqq 4\,\eta_n + \frac{1}{2}\left(8\,\eta_n + \frac{1}{2^2} u_n\right) = 8\,\eta_n + \frac{1}{2^3} u_n,$$

$$\ldots$$

$$u_{n+i} \leqq 8\,\eta_n + \frac{1}{2^i} u_n.$$

Odtud dále plyne (m pevné)

$$u_{2m} \leqq 8\,\eta_m + \frac{1}{2m}\,u_m.$$

Avšak

$$u_m = u_{2+(m-2)} \leqq 8\,\eta_2 + \frac{1}{2m-2}\,u_2,$$

tedy

$$u_{2m} \leqq 8\,\eta_m + \frac{1}{2m}\left(8\,\eta_2 + \frac{1}{2m-2}\,u_2\right) = 8\left(\eta_m + \frac{1}{2m}\,\eta_2\right) + \frac{1}{2^2(m-1)}\,u_2,$$

tedy

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m} = 0.$$

Dále

$$u_{2m-1} \leqq 8\,\eta_m + \frac{1}{2m-1}\,u_m \leqq 8\,\eta_m + \frac{1}{2m-1}\left(8\,\eta_2 + \frac{1}{2m-2}\,u_2\right) =$$

$$= 8\left(\eta_m + \frac{1}{2m-1}\,\eta_2\right) + \frac{1}{2^2 m-2}\,u_2,$$

tedy $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m-1} = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

což jsme měli dokázat.

Pomocná věta 3: Budiž $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$ řada divergentní. Pak lze sestrojit nekonečně (spočetně) mnoho řad divergentních takových, že jejich členy jsou vybrány z řady původní a že všechny členy původní řady se vyčerpají.

Důkaz: Vezměme tolik členů dané řady (v daném pořadí), aby jejich součet byl větší než 1. Tuto konečnou řadu označme B_1, její součet $\overline{B}_1$. Pak opět vezměme tolik dalších členů původní řady (v daném pořadí), aby jejich součet byl větší než 1. Tuto konečnou řadu označme B_2, její součet $\overline{B}_2$. Podobně sestrojme B_3, $\overline{B}_3$, B_4, $\overline{B}_4$ atd. Dostaneme tak posloupnost $\{B_n\}$ částečných konečných řad, vybraných z dané řady, a danou řadu lze zřejmě napsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Při tom $\overline{B}_i > 1$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Sestrojme nyní tyto řady:

$$B_1 + B_2 + B_4 + B_7 + B_{11} + \ldots,$$
$$B_3 + B_5 + B_8 + B_{12} + B_{17} + \ldots,$$
$$B_6 + B_9 + B_{13} + B_{18} + B_{24} + \ldots,$$
$$\ldots$$

Je zřejmé, jak tytó řady tvoříme a že vyhovují podmínkám ve větě uvedeným.

Pomocná věta 4: Budiž dána posloupnost vektorů $\{\mathrm{a}_n\}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$. Budiž a^0 divergentní směr. Pak řada $\sum\limits_{\mathrm{a}_k \in \boldsymbol{P}(\mathrm{a}^0)} a_k$ je divergentní.

Důkaz: Podle definice 2 je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\mathrm{a}_k\mathrm{a}^0)$, $\mathrm{a}_k \in \boldsymbol{P}(\mathrm{a}^0)$, divergentní. Pro $\mathrm{a}_k \in \boldsymbol{P}(\mathrm{a}^0)$ platí $\mathrm{a}_k\mathrm{a}^0 \geqq 0$. Dále je $\mathrm{a}^{02}\mathrm{a}_k \geqq (\mathrm{a}^0\mathrm{a}_k)^2$, tedy $a_k \geqq \mathrm{a}_k\mathrm{a}^0$, což bylo dokázat.

Pomocná věta 5: Budiž $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{a}_k$ řada vektorů a $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{a}_k = 0$. Všechny směry v $\boldsymbol{K}$ nechť jsou divergentní. Pak v každé půlrovině existuje alespoň jeden směr kritický.

Důkaz: Jsou-li $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ dvě množiny, pak množinu všech elementů, které leží v $\boldsymbol{M}$ i v $\boldsymbol{N}$ označme $\boldsymbol{MN}$ (průnik množin $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{N}$).

Budiž a^0 libovolný směr. Podle předpokladu jsou všechny směry divergentní, tedy podle pomocné věty 4 je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P(\mathrm{a}^0)$, divergentní. Zvolme nyní směr a_1^0 tak, aby bylo $\mathrm{a}_1^0\mathrm{a}^0 = \cos\frac{\pi}{2}$. Pak je zřejmě buď řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_1$, $P_1 = P(\mathrm{a}^0)\,P(\mathrm{a}_1^0)$, divergentní, nebo řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_1'$, $P_1' = P(\mathrm{a}^0)\,P(-\mathrm{a}_1^0)$, divergentní. Předpokládejme, že jsme zvolili takové označení, že diverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_1$. Zvolme dále směr a_2^0 tak, aby bylo $-\mathrm{a}_1^0\mathrm{a}_2^0 = \mathrm{a}^0\mathrm{a}_2^0 = \cos\frac{\pi}{4}$. Pak opět buď řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_2$, $P_2 = P_1\,P(\mathrm{a}_2^0)$, diverguje, nebo řada $\sum_{k=7}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_2'$, $P_2 = P_1\,P(-\mathrm{a}_2^0)$, diverguje. Předpokládejme opět takové označení, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_2$, diverguje. Zvolme dále směr a_3^0 tak, aby bylo $-\mathrm{a}_1^0\mathrm{a}_3^0 = \mathrm{a}_2^0\mathrm{a}_3^0 = \cos\frac{\pi}{8}$. Je-li $P_3 = P_2\,P(\mathrm{a}_3^0)$, $P_3' = P_2\,P(-\mathrm{a}_3^0)$, pak opět buď řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_3$, nebo řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_3'$, diverguje. Předpokládejme opět, že diverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_3$. Zvolme analogicky a_4^0, a_5^0, ... a sestrojme posloupnost $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$

Pak řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\mathrm{a}_k \in P_i$, $i = 1, 2, \ldots$ jsou divergentní. Sestrojme nyní posloupnost směrů

$$\mathrm{b}_1^0, \mathrm{b}_2^0, \ldots, \mathrm{b}_n^0, \ldots$$

tak, že

$$\mathrm{b}_1^0 \in P_1,\ \mathrm{b}_2^0 \in P_2,\ \ldots,\ \mathrm{b}_n \in P_n, \ldots$$

Zřejmě platí

$$|\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{b}_1^0| \leqq \frac{\pi}{2} a_k \quad \text{pro všechna } \mathrm{a}_k \in P_1,$$

$$|\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{b}_2^0| \leqq \frac{\pi}{2^2} a_k \quad \text{pro všechna } \mathrm{a}_k \in P_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{b}_n^0| \leqq \frac{\pi}{2^n} a_k \quad \text{pro všechna } \mathrm{a}_k \in P_n,$$

$$\cdots\cdots$$

Z konstrukce posloupností $\{P_n\}$ a $\{\mathrm{b}_n^0\}$ je patrno, že b_n leží ve všech P_{n-i}, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Z toho plyne, že

$$|\mathrm{b}_1^0 - \mathrm{b}_2^0| < \frac{\pi}{2},\ |\mathrm{b}_2^0 - \mathrm{b}_3^0| < \frac{\pi}{4},\ \ldots,\ |\mathrm{b}_n^0 - \mathrm{b}_{n+1}^0| < \frac{\pi}{2^n}, \ldots,$$

avšak $\lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$, lze tedy ke každému $\varepsilon > 0$ a i celému najít takové n_0, že pro všechna $n > n_0$ je

$$|\mathrm{b}_n^0 - \mathrm{b}_{n+1}^0| < \frac{\varepsilon}{i},\ |\mathrm{b}_{n+1}^0 - \mathrm{b}_{n+2}^0| < \frac{\varepsilon}{i},\ \ldots,\ |\mathrm{b}_{n+i-1}^0 - \mathrm{b}_{n+i}^0| < \frac{\varepsilon}{i},$$

tedy (sečteme-li všechny nerovnosti)

$$|\mathrm{b}_n^0 - \mathrm{a}_{n+i}^0| < \varepsilon.$$

Existuje tedy $\lim_{n \to \infty} \mathrm{b}_n = \mathrm{b}^0$, a b^0 je zřejmě směr kritický (viz definici 3).

Pomocná věta 6: Budiž dána řada vektorů $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$, a budiž a^0 kritický směr řady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$, b^0 směr kolmý k a^0 (to jest $\mathrm{a}^0\mathrm{b}^0 = 0$). Pak z posloupnosti $\{\mathrm{a}_k\}$ lze vybrat posloupnost $\{\mathrm{a}_{k_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots$ takovou, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ řada $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{a}_{k_i}$, $\mathrm{a}_{k_i} \in \boldsymbol{U}_\varepsilon(\mathrm{a}^0)$, diverguje a řada $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{a}_{k_i}\mathrm{b}^0$, $\mathrm{a}_{k_i} \in \boldsymbol{U}_\varepsilon(\mathrm{a}^0)$, konverguje.

Důkaz: Vzhledem k $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$ se můžeme omezit na ta a_k, pro něž je $a_k < 1$. Pro $\mathrm{a}_k \in \boldsymbol{U}_\varepsilon(\mathrm{a}^0)$ platí podle definice 1

$$|\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{a}^0| \leqq \varepsilon a_k,$$

tedy

$$|b^0(\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{a}^0)| \leqq b^0 |\mathrm{a}_k - a_k \mathrm{a}^0| \leqq \varepsilon a_k,$$

tedy, vzhledem k $\mathrm{a}^0\mathrm{b}^0 = 0$

$$|\mathrm{a}_k\mathrm{b}^0| \leqq \varepsilon a_k. \tag{2}$$

Podle předpokladu je však $a_k < 1$, tedy

$$|\mathrm{a}_k\mathrm{b}^0| \leqq \varepsilon. \tag{3}$$

Budiž nyní $\{\varepsilon_r\}$, $r = 1, 2, \ldots$ posloupnost čísel taková, že $\varepsilon_r > 0$ a řada $\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r$ konverguje. Sestrojme okolí $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_r}(\mathrm{a}^0)$, $r = 1, 2, \ldots$ Budiž $\{{}^1\mathrm{a}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ posloupnost těch vektorů z $\{\mathrm{a}_n\}$, které leží v $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_1}(\mathrm{a}^0)$. Budiž dále i číslo celé takové, že

$$\sum_{k=1}^{i-1} {}^1a_k \leqq 1, \; A_1 = \sum_{k=1}^{i} {}^1a_k > 1,$$

tedy, poněvadž $a_k < 1$, je $A_1 < 2$. Takové i existuje, neboť a^0 je podle předpokladu kritický směr řady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n$. Nyní podle (2) a (3) je

$$s_1 = \sum_{k=1}^{i} |{}^1\mathrm{a}_k \mathrm{b}^0| \leqq \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{i} {}^1a_k \leqq 2\,\varepsilon_1.$$

Budiž dále $\{{}^2\mathrm{a}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ posloupnost těch vektorů z $\{\mathrm{a}_n\}$, které leží v $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_2}(a^0)$, vyjma vektorů ${}^1\mathrm{a}_1, {}^1\mathrm{a}_2, \ldots, {}^1\mathrm{a}_i$. Vektory z $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_1}(\mathrm{a}^0)$ mohou ležet také v dalších okolích $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_2}(\mathrm{a}^0)$, $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_3}(\mathrm{a}^0), \ldots$, a podobně vektory z $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_2}(\mathrm{a}^0)$ mohou ležet v dalších okolích atd. Budiž j číslo celé kladné takové, že

$$\sum_{k=1}^{j-1} {}^2a_k \leqq 1, \; A_2 = \sum_{k=1}^{j} {}^2a_k > 1, \text{ tedy } A_2 < 2,$$

a analogicky

$$s_2 = \sum_{k=1}^{j} |{}^2\mathrm{a}_k \mathrm{b}^0| \leqq 2\,\varepsilon_2.$$

Proveďme totéž postupně v $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_3}(\mathrm{a}^0)$, $\boldsymbol{U}_{\varepsilon_4}(\mathrm{a}^0), \ldots$ (vždy s vynecháním vektorů již uvažovaných). Dostaneme posloupnost $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ takovou, že $A_n > 1$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ diverguje, a posloupnost $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ takovou, že $s_n \leqq 2\,\varepsilon_n$. Avšak $\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r$ konverguje podle předpokladu, tedy také řada $\sum_{r=1}^{\infty}{}' s_r$ konverguje. Tím je věta dokázána, neboť pro $\varepsilon > 0$ libovolné jsou od jistého r počínaje všechna $U_{\varepsilon_r}(\mathrm{a}^0)$ ve zvoleném $U_\varepsilon(\mathrm{a}^0)$, a řady $\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}{}' s_n$ jsou vybrané řady ve větě zmíněné.

Pomocná věta 7: Je-li $\{\mathrm{a}_n^0\}$, $n = 1, 2, \ldots$ posloupnost kritických směrů a existuje-li $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n^0 = \mathrm{a}^0$, pak a^0 je směr kritický.

Důkaz: Podle definice kritického směru existuje pro každé $\varepsilon > 0$ vybraná posloupnost $\{\mathrm{a}_{i_k}\}$ z $\{\mathrm{a}_n\}$, $k = 1, 2, \ldots$ taková, že

$$|\mathrm{a}_{i_k} - a_{i_k}\mathrm{a}_i^0| \leqq \frac{\varepsilon}{2} a_{i_k}$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{i_k}$ diverguje. Podle předpokladu je $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n^0 = \mathrm{a}^0$, existuje tedy takové i_0, že pro všechna $i > i_0$ je $|\mathrm{a}^0 - \mathrm{a}_i^0| < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy

$$|\mathrm{a}_{i_k}(\mathrm{a}^0 - \mathrm{a}_i^0)| \leqq a_{i_k}|\mathrm{a}^0 - \mathrm{a}_i^0| \leqq \frac{\varepsilon}{2} a_{ik}.$$

Dále

$$|\mathrm{a}_{ik} - a_{ik}\mathrm{a}^0| \leqq |\mathrm{a}_{ik} - a_{ik}\mathrm{a}_i^0| + |a_{ik}\mathrm{a}_i^0 - a_{ik}\mathrm{a}^0| \leqq \frac{\varepsilon}{2} a_{ik} + a_{ik}|\mathrm{a}_i^0 - \mathrm{a}^0| \leqq \varepsilon a_{ik}.$$

je tedy a^0 směr kritický, což bylo dokázat.

Pomocná věta 8: Budiž dána řada vektorů $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathrm{a}_k$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{a}_n = 0$. Všechny směry v $\boldsymbol{K}$ buďtež divergentní. Pak nastane jeden z těchto dvou případů:

I. Existují dva kritické směry a^0, b^0 takové, že $\mathrm{a}^0 = -\mathrm{b}^0$;

II. Existují tři směry kritické a^0, b^0, c^0, neležící zároveň v téže půlrovině.

Důkaz:

Geometricky říká věta tóto:

Buď existují dva kritické směry (vektory) antiparalelní, nebo existují tři kritické směry tak, že vyneseme-li příslušné vektory ze společného počátečního bodu, tvoří jejich koncové body trojúhelník, v němž společný počáteční bod všech tří vektorů je bodem vnitřním.

Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme, že nenastane případ I naší věty. Pak existují podle pomocné věty 5 dva kritické směry a^0 a b^0 tak, že $\mathrm{a}^0\mathrm{b}^0 \leqq 0$. Buďtež $\bar{\mathrm{a}}^0$ a $\bar{\mathrm{b}}^0$ takové směry, že $\mathrm{a}^0\bar{\mathrm{a}}^0 = \mathrm{b}^0\bar{\mathrm{b}}^0 = 0$ a $\mathrm{a}^0\bar{\mathrm{b}}^0 < 0$, $\bar{\mathrm{a}}^0\mathrm{b}^0 < 0$.

Předpokládejme dále, že nenastane ani případ II naší věty, to jest že v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{a}}^0)\,\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0)$ není kritických směrů. Pak především nutně existuje kritický směr b_1^0 v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0)\,\boldsymbol{P}(-\mathrm{a}^0)$, různý od b^0 a $-\mathrm{a}^0$, nebo kritický směr a_1^0 v $\boldsymbol{P}(\mathrm{a}^0)\,\boldsymbol{P}(-\bar{\mathrm{b}}^0)$. Zvolíme-li totiž v $\boldsymbol{P}(-\mathrm{b}^0)\boldsymbol{P}(-\mathrm{a}^0)$ směr q^0, různý od $\bar{\mathrm{b}}^0$ a $\bar{\mathrm{a}}^0$, musí v $\boldsymbol{P}(\mathrm{q}^0)$ existovat podle pomocné věty 5 kritický směr, který je vzhledem k volbě q^0 různý od b^0 a a^0, podle předpokladů pak různý od $-\mathrm{a}^0$ a $-\mathrm{b}^0$, a který, rovněž podle předpokladů, nemůže ležet v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{a}}^0)\,\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0)$.

Dále, b_1^0 nutně existuje. Kdyby totiž v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0)\,\boldsymbol{P}(-\bar{\mathrm{a}}^0)$ nebylo kritických směrů (vyjma b^0), pak existuje (nutně, viz výše) a_1^0 tak, že $\mathrm{a}_1^0\mathrm{b}^0 < 0$ ($-\mathrm{b}^0$ nemůže být kritickým směrem podle předpokladu) a v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0) + \boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{a}}_1^0)$[3] ($\bar{\mathrm{a}}_1^0\mathrm{a}_1^0 = 0$, $\bar{\mathrm{a}}_1^0\bar{\mathrm{a}}^0 > 0$) není kritických směrů, vyjma b^0, což podle věty 5 není možné.

Dále, a_1^0 nemůže být v $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}_1^0)$ ($\bar{\mathrm{b}}_1^0\mathrm{b}_1^0 = 0$, $\bar{\mathrm{b}}_1^0\bar{\mathrm{b}}^0 > 0$), neboť by jinak nastal proti předpokladu případ II věty.

Celou úvahu můžeme nyní opakovat krok za krokem s výchozími kritickými směry a^0 a b_1^0 (místo a^0 a b^0). Dostaneme tak další kritický směr b_2^0 týchž vlastností vzhledem k dvojici a^0, b_1^0,

[3]) Sjednocení množin $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{b}}^0)$ a $\boldsymbol{P}(\bar{\mathrm{a}}_1^0)$.

jaké má b_1^0 vzhledem k a^0, b^0. Dalším opakováním úvahy s výchozími směry a^0, b_2^0 dostaneme analogicky $b_3^0, b_4^0, \ldots, b_n^0, \ldots$

Je nyní

$$1 > -b_n^0 a^0 > -b_{n-1}^0 a^0 > 0.$$

Označíme-li totiž $|b_r^0 + a^0| = \varepsilon_r$, je (podle konstrukce $\{b_n^0\}$) zřejmě b_n^0 v $U_{\varepsilon_{n-1}}(-a^0)$, tedy (podle definice okolí)

$$|b_n^0 + a^0| < |b_{n-1}^0 + a^0| \; |b_n^0| = |b_{n-1}^0 + a^0| > 0,$$

odkud

$$0 < |b_n + a^0|^2 = (b_n^0 + a^0)^2 = 2 + 2\, b_n a^0 < |b_{n-1}^0 + a^0|^2 = (b_{n-1}^0 + a^0)^2 = 2 + 2\, b_{n-1}^0 a^0 \leqq 2,$$

tedy

$$-2 < 2\, b_n^0 a^0 < 2\, b_{n-1}^0 a^0 < 0,$$

tedy

$$1 > -b_n^0 a^0 > -b_{n-1}^0 a^0 > 0.$$

Posloupnost $\{-b_n^0 a^0\}$ je tedy monotonní a ohraničená, má proto limitu, kterou vzhledem k $0 < -b_n^0 a^0 \leqq 1$ označíme $\cos \omega$ $\left(0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}\right)$, tedy

$$\lim_{n \to \infty} (-b_n^0 a^0) = \cos \omega,$$

to jest pro libovolné $\varepsilon > 0$ je od jistého n počínaje

$$|-b_n^0 a^0 - \cos \omega| < \varepsilon.$$

Zvolme nyní souřadnicový systém tak, aby bylo $a^0 = (0,1)$, $-b_n^0 = (\cos \beta_n, \sin \beta_n)$, $\beta_n \in \left< 0, \frac{\pi}{2} \right>$ (což je možné vzhledem k tomu, že $|a^0| = |-b_n^0| = 1$). Pak

$$|-b_n^0 a^0 - \cos \omega| = |\sin \beta_n - \cos \omega| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_n\right) - \cos \omega \right| =$$

$$= 2 \left| \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_n + \omega}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_n - \omega}{2} \right| < \varepsilon.$$

Tedy, vzhledem k ohraničenosti a spojitosti funkce sinus je buď

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_n + \omega}{2} = 0,$$

tedy

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = \frac{\pi}{2} + \omega = {}^1\gamma,$$

nebo

$$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \beta_n - \omega}{2} = 0,$$

tedy

$$\lim_{n \to \infty} \beta_n = \frac{\pi}{2} - \omega = \gamma.$$

Úhly ${}^1\gamma$ a γ však vedou k vektorům ${}^1c^0 = (\cos {}^1\gamma, \sin {}^1\gamma)$, $c^0 = (\cos \gamma, \sin \gamma)$ takovým, že $\lim_{n \to \infty} b_n^0 = {}^1c^0$ nebo $\lim_{n \to \infty} b_n^0 = c^0$. Podle pomocné věty 7 jsou ${}^1c^0$ a c^0 kritické směry. Avšak ${}^1c^0$ je zřejmě v $P(\bar{a}^0)\, P(\bar{b}^0)$, což je ve sporu s původním předpokladem (že nenastane případ II věty). Je tedy $\lim_{n \to \infty} b_n^0 = c^0$ kritický směr. Avšak kritické směry a^0 a c^0 ($c^0 \in P(\bar{b}^0)\, P(-\bar{a}^0)$) splňují všechny požadavky, kladené původně na a^0 a b^0, tedy v $P(-\bar{a}^0)$ $P(\bar{c}^0)$, kde $\bar{c}^0 c^0 = 0$ a $\bar{c}^0 a^0 < 0$, musí být kritický měr. Z toho plyne

$$c^0 = -a^0,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $-a^0$ není kritický směr (případ I věty). Předpoklad, že nenastane ani případ I, ani případ II věty, vede tedy ke sporu, což jsme požadovali. Tím je pomocná věta 8 dokázána.

Přistoupíme nyní k důkazu věty hlavní. Důkaz bude pozůstávat z důkazu čtyř vět, které označíme věta 1 až věta 4.

Věta 1. Budiž $\{a_n\}$, ($n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) posloupnost vektorů. Všechny směry v K buďtež divergentní. Buďtež i^0, $-i^0$ dva kritické směry posloupnosti $\{a_n\}$ a j^0, k^0 dva směry těchto vlastností: $i^0 j^0 < 0$, $i^0 k^0 < 0$; směry i^0, j^0, k^0 neleží současně v jedné půlrovině. Budiž $\varepsilon' > 0$. Pak existuje takové zhuštění $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, že řady $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, $b_m \in U_\varepsilon(i^0)$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, $b_m \in U_\varepsilon(j^0)$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$, $b_m \in U_\varepsilon(k^0)$, jsou divergentní.

Důkaz: Budiž a^0 takový směr, že $a^0 i^0 = -a^0 i^0 = 0$. Podle pomocné věty 6 lze z dané posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat částečné posloupnosti $\{c_n\}$, $\{c'_n\}$ takové, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, $c_n \in U_\varepsilon(i^0)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c'_n$, $c'_n \in U_\varepsilon(-i^0)$ divergují, avšak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n a^0|$, $c_n \in U_\varepsilon(i^0)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c'_n a^0|$, $c'_n \in U_\varepsilon(-i^0)$, konvergují. Podle pomocné věty 3 lze z posloupnosti $\{c_n\}$ vybrat nekonečně mnoho posloupností $\{c_{0_n}\}$, $\{c_{1_n}\}$, ..., $n = 1, 2, \ldots$, disjunktních takových, že řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{i_n}$, $i = 1, 2, \ldots$ divergují a každý člen z $\{c_n\}$ leží v některé z posloupností $\{c_{i_n}\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Totéž lze učinit s posloupností $\{c'_n\}$.

Budiž nyní $j^0 \in K$ takový směr, že $j^0 \in P(a^0)$, $j^0 \neq -i^0$, $i^0 j^0 < 0$. Posloupnost členů z $\{a_n\}$, které zůstanou, když vynecháme[4]) $\{c_n\}$ a $\{c'_n\}$, označme $\{z_n\}$ a uvažujme zatím jen ta z_n, která leží v $P(a^0)$.

Existují nyní $\alpha_i, \beta_i \in A$ taková, že

$$z_i = -\alpha_i i^0 + \beta_i j^0.^{5)} \tag{4}$$

Pak je $\beta_i \geqq 0$, neboť z z_i, $j^0 \in P(a^0)$ plyne $z_i a^0 \geqq 0$, $j^0 a^0 > 0$, dále $a^0 i^0 = 0$ podle předpokladu. Násobíme-li (4) skalárně a^0, dostaneme $a^0 z_i = \beta_i j^0 a^0$ a z toho zřejmě $\beta_i \geqq 0$. Nyní může být $\alpha_i \lesseqgtr 0$. Uvažujme nejprve případ $\alpha_i \geqq 0$.

Budiž $\varepsilon' > 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ tak, aby bylo

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad \eta + \varepsilon(\alpha_i + \eta) \leqq \frac{\beta_i}{2}, \\ &\text{b)} \quad 2\varepsilon(\alpha_i + \eta) + 2\eta \leqq \varepsilon'(\beta_i - \eta - \varepsilon(\alpha_i + \eta)), \\ &\text{c)} \quad \eta < z_i. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

To je možné, neboť zvolíme-li $0 < \varepsilon' < 1$ (což lze vždy) a

$$0 < \eta < \min\left(z_i, \frac{\varepsilon' \beta_i}{\varepsilon' + 2}\right),$$

je především splněno (5) c), a dále

[4]) Členy z $\{a_n\}$ o různém indexu pokládáme za různé.

[5]) Tři vektory z K jsou vždy lineárně závislé.

$$\eta < \frac{\varepsilon' \beta_i}{\varepsilon' + 2} \Rightarrow \eta (\varepsilon' + 2) < \varepsilon' \beta_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon' \beta_i - \eta (\varepsilon' + 2) = \varepsilon' (\beta_i - \eta) - 2\eta > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon' (\beta_i - \eta) - 2\eta}{(\alpha_i + \eta)(2 + \varepsilon')} > 0,$$

lze tedy volit

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{\varepsilon' (\beta_i - \eta) - 2\eta}{(\alpha_i + \eta)(2 + \varepsilon')}.$$

Odtud plyne (5) b). Konečně

$$\eta < \frac{\varepsilon' \beta_i}{\varepsilon' + 2} < \frac{\beta_i}{\varepsilon' + 2} < \frac{\beta_i}{2},$$

tedy $\frac{\beta_i}{2} - \eta > 0$, tedy

$$\frac{\frac{\beta_i}{2} - \eta}{\alpha_i + \eta} > 0.$$

Lze tedy volit

$$0 < \varepsilon < \frac{\frac{\beta_i}{2} - \eta}{\alpha_i + \eta},$$

což je (5) a).

Podle pomocné věty 6 je $c_n \in U_\varepsilon(i^0)$, $c'_n \in U_\varepsilon(-i^0)$, $n = 1, 2, \ldots$ (vyjma nejvýše konečný počet) a platí tedy podle definice 3

$$|c_{i_k} - c_{i_k} i^0| \leqq \varepsilon c_{i_k},$$

tedy

$$\left| \sum_{k=1}^{p} c_{i_k} - \sum_{k=1}^{p} c_{i_k} i^0 \right| \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{p} c_{i_k}. \tag{6}$$

Z $\lim_{k \to \infty} c_{i_k} = 0$ a z $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = \infty$ plyne, že lze (ke každému $\eta > 0$, tedy také) ke zvolenému $\eta > 0$ najít takové m, p celé kladné, že

$$\sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}} - \eta \leqq \alpha_i < \sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}}. \tag{7}$$

Vzhledem k $\lim_{k \to \infty} c_{i_k} = 0$, tedy také $\lim_{k \to \infty} c_{i_k} = 0$ je totiž od jistého n_0 počínaje $c_{i_k} < \eta$ pro všechna $i_k > n_0$. Zvolme $i_m > n_0$. Dále, vzhledem k $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} = \infty$ existuje $p > 0$ celé takové, že

$$\sum_{k=1}^{p-1} c_{i_{m+k}} \leqq \alpha_i < \sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}}.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{p-1} c_{i_{m+k}} = \sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}} - \eta < \sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}} - c_{i_{m+p}} = \sum_{k=1}^{p-1} c_{i_{m+k}} \leqq \alpha_i < \sum_{k=1}^{p} c_{i_{m+k}}.$$

Z (4), (6), (7) nyní plyne (všechny sumace podle k od 1 do p)

$$\left| z_i + \sum c_{i_{m+k}} - \left| z_i + \sum c_{i_{m+k}} \right| j^0 \right| \leqq \left| \sum c_{i_{m+k}} - \sum c_{i_{m+k}} i^0 \right| +$$
$$+ \left| \sum c_{i_{m+k}} i^0 - \alpha_i i^0 \right| + \left| \beta_i j^0 - \left| z_i + \sum c_{i_{m+k}} \right| i^0 \right| \leqq$$
$$\leqq \varepsilon \sum c_{i_{m+k}} + \eta + \left| -\alpha_i i^0 + \sum c_{i_{m+k}} \right| \leqq \varepsilon \sum c_{i_{m+k}} + \eta +$$
$$+ \left| -\alpha_i + \sum c_{i_{m+k}} \right| + \left| \sum c_{i_{m+k}} - \sum c_{i_{m+k}} i^0 \right| \leqq$$
$$\leqq 2\varepsilon \sum c_{i_{m+k}} + 2\eta \leqq 2\varepsilon (\alpha_i + \eta) + 2\eta.$$

Dále (všechny sumace podle k od 1 do p)

$$\left|z_i + \sum' c_{i_{m+k}}\right| = \left|-\alpha_i i^0 + \beta_i j^0 + \sum' c_{i_{m+k}}\right| \geqq \beta_i - \left|\alpha_i i^0 - \sum' c_{i_{m+k}}\right| \geqq$$
$$\geqq \beta_i - \left|\sum' c_{i_{m+k}} - \alpha_i\right| - \left|\sum' c_{i_{m+k}} - \sum' c_{i_{m+k}} i^0\right| \geqq \beta_i - \eta - \varepsilon \sum' c_{i_{m+k}} \geqq$$
$$\geqq \beta_i - \eta - \varepsilon(\alpha_i + \eta).$$

Dostáváme tedy

$$\left|z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}} - \left|z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}}\right| j^0\right| \leqq 2\varepsilon(\alpha_i + \eta) + 2\eta, \tag{8}$$

$$\left|z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}}\right| \geqq \beta_i - \eta - \varepsilon(\alpha_i + \eta). \tag{9}$$

Z (5) a), b), (8) a (9) plyne pak

$$z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}} \in U_{\varepsilon'}(j^0), \tag{10}$$

$$\left|z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}}\right| \geqq \frac{\beta_i}{2}. \tag{11}$$

Pro $\alpha_i < 0$ lze celý postup opakovat, stačí jen místo i^0 uvažovat $-i^0$, místo $U_\varepsilon(i^0)$ okolí $U_\varepsilon(-i^0)$, místo posloupností $\{c_n\}$, $\{c_{i_n}\}$ posloupnosti $\{c'_n\}$, $\{c'_{i_n}\}$.

Zvolme nyní směr k^0 tak, že $k^0 \in P(-a^0)$, $k^0 \neq i^0$, $k^0 i^0 < 0$. Pak pro ta z_n, která leží v $P(-a^0)$ (uvažovali jsme dosud jen $z_n \in P(a^0)$) lze opět celý postup opakovat, pouze místo a^0, j^0 musíme brát $-a^0$, k^0.

Směry i^0, j^0, k^0 neleží zároveň v téže půlrovině.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje směr v^0 takový, že $i^0, j^0, k^0 \in P(v^0)$, to jest $i^0 v^0 \geqq 0$, $j^0 v^0 \geqq 0$, $k^0 v^0 \geqq 0$. Pak v^0 leží buď v $P(a^0)$, nebo v $P(-a^0)$. Předpokládejme, že $v^0 \in P(a^0)$. Budiž

$$v^0 = -v_1 a^0 + v_2 i^0, \quad k^0 = -k_1 a^0 + k_2 i^0.$$

Z toho

$$-v^0 a^0 = v_1, \quad v^0 i^0 = v_2, \quad -k^0 a^0 = k_1, \quad k^0 i^0 = k_2.$$

Podle předpokladu je tedy $v_1 \leqq 0$, $k_1 > 0$, $k_2 < 0$.

Předpokládejme $v_2 > 0$. Pak

$$k^0 v^0 = k_1 v_1 + k_2 v_2 \leqq 0,$$

což je ve sporu s předpokladem $k^0 \in P(v^0)$.

Předpokládejme $v_2 < 0$. Pak

$$v^0 i^0 = (-v_1 a^0 + v_2 i^0)(-0\, a^0 + 1\, i^0) = v_2 < 0,$$

což je ve sporu s předpokladem $i^0 \in P(v^0)$. Nemůže být ani $v_2 = 0$, neboť pak by bylo $v^0 = i^0$, avšak $i^0 j^0 < 0$ a $i^0 k^0 < 0$ podle předpokladu.

Analogicky se vyvodí spor z předpokladu, že $v^0 \in P(-a^0)$. Stačí uvažovat a^0 místo $-a^0$ a j^0 místo k^0. Původní tvrzení je tedy správné.

Buďtež nyní a_1^0, a_2^0 takové směry, že $a_1^0 j^0 = 0$, $a_2^0 k^0 = 0$, a budiž $M = \max\left(\frac{1}{|a_1^0 i^0|}, \frac{1}{|a_2^0 i^0|}\right)$. Pak platí

$$z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' c_{i_{m+k}} \leqq z_i + \alpha_i + \eta = z_i(2 + M), \tag{12}$$

neboť z (4) plyne pro $z_i \in P(a^0)$

$$z_i a_1^0 = -\alpha_i i^0 a_1^0, \quad z_i \geqq \alpha_i |i^0 a_1^0|, \quad \alpha_i \leqq \frac{z_i}{|i^0 a_1^0|}.$$

Pro $z_i \in P(-a^0)$ dostaneme analogicky, bereme-li k^0 místo j^0,

$$\alpha_i \leqq \frac{z_i}{|i^0 a_2^0|}.$$

Z (5) c) a (7) pak plyne ihned nerovnost (12).

Sestrojme nyní novou posloupnost $\{b_k\}$ takto:

Označme $z_i' = z_i + \sum_{k=1}^{p} c_{i_m+k}$, a proveďme konstrukci čísel z_i' pro všechna i. Z dané posloupnosti $\{a_n\}$ vynechme ta c_k, kterých jsme použili ke konstrukci čísel z_i' a vektory z_i nahraďme sestrojenými vektory z_i' v tomtéž pořadí. Dostaneme novou posloupnost vektorů, kterou označíme právě $\{b_k\}$. Platí potom:

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je zhuštěním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jak je patrno z definice 5, z (12) a z toho, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je zhuštěním sama sebe. Dále řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(i^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(j^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(k^0)$ divergují, jak je patrno z (10), (11) a další a z předpokladu, že $\sum_{k=1}^{\infty} c_{0k}$ diverguje. Splňuje tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ podmínky naší věty. Tím je věta 1 dokázána.

Věta 2. Budiž dána posloupnost vektorů $\{a_n\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Všechny směry v K buďtež divergentní. Buďtež i^0, j^0, k^0 tři směry neležící zároveň v téže půlrovině, a $\varepsilon > 0$ takové, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in U_\varepsilon(i^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in U_\varepsilon(j^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in U_\varepsilon(k^0)$ divergují. Budiž $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{8}$. Pak existuje zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(i^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(j^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(k^0)$ divergují a každý člen z $\{b_n\}$ leží v některém z okolí $U_{\varepsilon'}(i^0)$, $U_{\varepsilon'}(j^0)$, $U_{\varepsilon'}(k^0)$.

Důkaz: Budiž

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Členy z $\{a_n\}$, které leží v $U_\varepsilon(i^0)$, $U_\varepsilon(j^0)$, $U_\varepsilon(k^0)$ označme ${}^1c_n$, ${}^2c_n$, ${}^3c_n$, (v tomtéž pořádku), $n = 1, 2, \ldots$. Zbývající členy z $\{a_n\}$ označme z_n. Posloupnost $\{{}^1c_n\}$ rozložme podle pomocné věty 3 na nekonečně mnoho částečných posloupností $\{{}^1c_{0n}\}$, $\{{}^1c_{1n}\}, \ldots, \{{}^1c_{in}\}, \ldots, n = 1, 2, \ldots$, disjunktních a takových, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} {}^1c_{in}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ divergují a každý člen leží v některé z posloupností $\{{}^1c_{in}\}$.

Z ${}^1c_n \in U_\varepsilon(i^0)$ plyne nyní

$$\left|{}^1c_{ik} - {}^1c_{ik}\, i^0\right| \leqq \varepsilon\, {}^1c_{ik},$$

tedy

$$\left|\sum_{k=1}^{p} {}^1c_{ik} - \sum_{k=1}^{p} {}^1c_{ik}\, i^0\right| \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{p} {}^1c_{ik}.$$

Budiž nyní $\{\eta_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\eta_n \in A$ posloupnost taková, že $0 < \eta_n < z_n$. Pak z $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ plyne $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Z $\lim_{n\to\infty} {}^1c_{in} = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} {}^1c_{in} = \infty$ plyne, že existuje m, p celé kladné, takové, že

$$\frac{1}{\varepsilon} z_i \leqq \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} < \frac{1}{\varepsilon} z_i + \eta_i. \tag{14}$$

(Důkaz stejně jako důkaz nerovnosti (7) na str. 710).

Pak platí (všechny sumace podle k od 1 do p)

$$\left| \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| - \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| = \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \right| =$$

$$= \left| \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| - \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \, \mathrm{i}^0 \right| \right| \leqq \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \, \mathrm{i}^0 \right| \leqq \varepsilon \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}},$$

tedy tím spíše (sumace podle k od 1 do p)

$$\sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \leqq \varepsilon \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}},$$

tedy

$$\left| \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \geqq (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}}. \tag{15}$$

Dále je podle (14) a (15)

$$\left| \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} + z_i \right| \geqq \left| \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| - z_i \geqq$$

$$\geqq (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - z_i \geqq (1 - 2\,\varepsilon) \sum_{k+1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}}, \tag{16}$$

a dále podle (13), (16) a podle předpokladu $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{8}$ (sumace podle k od 1 do p)

$$\left| z_i + \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \left| z_i + \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \mathrm{i}^0 \right| \leqq z_i + \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \, \mathrm{i}^0 \right| +$$

$$+ \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \right| + \left| \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| - \left| z_i + \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \right| \leqq z_i + \varepsilon \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} +$$

$$+ \varepsilon \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} + z_i \leqq 4\,\varepsilon \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \leqq \frac{4\,\varepsilon}{1 - 2\,\varepsilon} \left| \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} + z_i \right| \leqq$$

$$\leqq 8\,\varepsilon \left| z_i + \sum{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \leqq \varepsilon' \left| z_i + \sum{}' \, {}^1z_{i_{m+k}} \right|.$$

Je tedy

$$\left| z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} - \left| z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right| \mathrm{i}^0 \right| \leqq \varepsilon' \left| z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \right|, \tag{17}$$

tedy

$$z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \in U_{\varepsilon'}(\mathrm{i}^0). \tag{17}$$

Dále

$$z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}} \leqq z_i + \frac{1}{\varepsilon} z_i + \eta_i = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) z_i + \eta_i \leqq \left(2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) z_i. \tag{18}$$

Označme nyní

$$z'_i = z_i + \sum_{k=1}^{p}{}' \, {}^1c_{i_{m+k}}$$

a sestrojme novou posloupnost $\{b_n\}$ takto:

Proveďme konstrukci vektorů z'_i pro všechna i. Vezměme danou posloupnost $\{a_n\}$ a vynechme všechny členy, kterých jsme použili ke konstrukci vektorů z'_i. Dále všechny vektory z_i nahraďme nově sestrojenými vektory z'_i. Tato nová posloupnost budiž $\{b_n\}$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je zhuštěním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, jak je patrno z definice 5 a z (18). Dále řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(\mathrm{i}^0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(\mathrm{j}^0)$,

$\sum_{k=1}^{\infty}{}' b_k$, $b_k \in U_{\varepsilon'}(k^0)$ divergují, neboť podle předpokladu řady $\sum_{k=1}^{\infty}{}' {}^1c_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}{}' {}^2c_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}{}' {}^3c_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}{}' {}^1c_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots$ divergují. Konečně každé b_k leží v některém z okolí $U_{\varepsilon'}(i^0)$, $U_{\varepsilon'}(j^0)$, $U_{\varepsilon'}(k^0)$ podle (17) a podle předpokladu, že

$$ {}^1c_k \in U_\varepsilon(i^0),\ {}^2c_k \in U_\varepsilon(j^0),\ {}^3c_k \in U_\varepsilon(k^0),\ k = 1, 2, \ldots . $$

Tím je věta 2 dokázána.

Věta 3: Budiž $\{a_n\}$ posloupnost vektorů, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Všechny směry v K buďtež divergentní. Budiž $\varepsilon > 0$ a ${}^ik^0$, $i = 1, 2, 3$ tři směry těchto vlastností: neexistuje půlrovina, ve které současně leží; řady $\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_k$, $a_k \in U_\varepsilon({}^ik^0)$, $i = 1, 2, 3$ jsou divergentní; každý člen z $\{a_n\}$ leží v některém z okolí $U_\varepsilon({}^ik^0)$. Buďtež $\{{}^ib_n\}$, $i = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots$ posloupnosti členů z $\{a_n\}$, které leží v $U_\varepsilon({}^ik^0)$. Budiž $s \in K$ libovolný vektor. Pak existuje taková superposice posloupností $\{{}^ib_n\}$, $i = 1, 2, 3$, že příslušná řada má součet s.

Důkaz: i nechť probíhá hodnoty 1, 2, 3. Buďtež ${}^ik'^0$ tři směry takové, že $({}^ik^0)({}^ik'^0) = 0$. Budiž $A = \max \left| \frac{1}{({}^ik^0)({}^jk'^0)} \right|$, $i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$. Budiž

$$ 0 < \varepsilon \leqq \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6A}\right). \tag{19} $$

Podle předpokladu je

$$ |{}^ib_n - {}^ib_n\, {}^ik^0| \leqq \varepsilon\, {}^ib_n. $$

Definujme částečné konečné posloupnosti $\{{}^ib_{nr}\}$ z $\{{}^ib_n\}$ a vektory u_n, $n = 1, 2, \ldots$ takto:

$$ u^0 = s. \tag{20} $$

Předpokládejme, že $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, $\{{}^ib_{1r}\}$, $\{{}^ib_{2r}\}, \ldots, \{{}^ib_{(n-1)r}\}$ je již definováno. Zřejmě existují ${}^i\lambda$, ${}^i\alpha \in A$ taková, že

$$ \sum_{i=1}^{3}{}' {}^i\lambda\, ({}^ik^0) = 0,\ {}^i\lambda > 0,\ u_{n-1} = \sum_{i=1}^{3}{}' {}^i\alpha\, {}^ik^0, $$

${}^i\alpha \geqq 0$ a alespoň jedno z čísel ${}^i\alpha$ je rovno nule[6]).

Je-li nyní ${}^1\alpha = 0$, je $u_{n-1} = {}^2\alpha\, {}^2k^0 + {}^3\alpha\, {}^3k^0$. Odtud $u_{n-1}.\, {}^3k'^0 = {}^2\alpha\, {}^2k^0\, {}^3k'^0$, a dále

$$ 0 \leqq {}^2\alpha \leqq A\, u_{n-1}. $$

Analogicky z $u_{n-1}\, {}^2k'^0 = {}^3\alpha\, {}^3k^0\, {}^2k'^0$ plyne

$$ 0 \leqq {}^3\alpha \leqq A\, u_{n-1}, $$

a zřejmě

$$ 0 \leqq {}^1\alpha \leqq A\, u_{n-1}, $$

tedy

$$ 0 \leqq {}^i\alpha \leqq A\, u_{n-1},\ i = 1, 2, 3. $$

Budiž nyní M_i největší, m_i nejmenší číslo celé kladné, takové, že ${}^ib_{M_i}$ leží ještě v $\{{}^ib_{(n-1)r}\}$ a

$$ \sum_{k=M_i+1}^{m_i}{}' {}^ib_k \geqq {}^i\alpha. $$

(Čísla m_i existují, neboť podle předpokladu jsou řady $\sum_{k=1}^{\infty} {}^ib_k$ divergentní). Posloupnosti $\{{}^ib_{nr}\}$ definujeme potom takto:

$$ \{{}^ib_{nr}\} \text{ budiž posloupnost } {}^ib_{M_i+1}, {}^ib_{M_i+2}, \ldots, {}^ib_{m_i}. $$

---

[6]) Plyne ihned z předpokladu, že ${}^ik^0$ neleží zároveň v téže půlrovině.

Definujme dále u_n takto:

$$u_n = u_{n-1} - \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=M_i+1}^{m_i} {}^i b_k.$$

(To jest: Budiž $u_0 = s = \nu_0\, {}^1k^0 + \varrho_0\, {}^2k^0 + \sigma_0\, {}^3k^0$. Vezmeme nyní tolik prvých členů z $\{{}^1b_n\}$, aby součet jejich absolutních hodnot byl právě větší nebo roven ν_0 a sečteme je. Pak vezmeme tolik prvých členů z $\{{}^2b_n\}$, aby součet jejich absolutních hodnot byl právě větší nebo roven ϱ_0 a sečteme je, a konečně vezmeme tolik prvých členů z $\{{}^3b_n\}$, aby součet jejich absolutních hodnot byl právě větší nebo roven σ_0 a sečteme je. Tři vektory, které takto dostaneme, složíme a odečteme od u_0; dostaneme u_1.

Je-li nyní $u_1 = \nu_1\, {}^1k^0 + \varrho_1\, {}^2k^0 + \sigma_1\, {}^3k^0$, vezmene tolik dalších členů z $\{{}^1b_n\}$ resp. $\{{}^2b_n\}$ resp. $\{{}^3b_n\}$, aby součty jejich absolutních hodnot byly právě větší nebo rovny ν_1, resp. ϱ_1, resp. σ_1 a sečteme. Tři vektory, které takto dostaneme, opět složíme a odečteme od u_1; dostame u_2, atd.).

Z konstrukce posloupností $\{{}^ib_{n_r}\}$ je nyní patrno, že obsahují alespoň jeden element a že $\{{}^ib_{1_r}\}$, $\{{}^ib_{2_r}\}$, ... tvoří právě posloupnost $\{{}^ib_n\}$. Je tedy

$$\begin{aligned} &\sum_{{}^1b_{1_r} \in \{{}^1b_{1_r}\}} {}^1b_{1_r} + \sum_{{}^2b_{1_r} \in \{{}^2b_{1_r}\}} {}^2b_{1_r} + \sum_{{}^3b_{1_r} \in \{{}^3b_{1_r}\}} {}^3b_{1_r} + \\ &+ \sum_{{}^1b_{2_r} \in \{{}^1b_{2_r}\}} {}^1b_{2_r} + \sum_{{}^2b_{2_r} \in \{{}^2b_{2_r}\}} {}^2b_{2_r} + \sum_{{}^3b_{2_r} \in \{{}^3b_{2_r}\}} {}^3b_{2_r} + \dots \end{aligned} \tag{21}$$

superposicí řad $\sum_{k=1}^{\infty} {}^ib_k$ (viz definici 4).

Budiž nyní $\eta_n = \max(|b|)$, kde b probíhá posloupnost $\{{}^ib_{n_r}\}$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Pak (všechny jen naznačené sumace podle k od M_i do m_i)

$$\sum {}^ib_k - \eta_n \leq \sum_{k=M_i+1}^{m_i-1} {}^ib_k \leqq {}^i\alpha \leqq \sum {}^ib_k.$$

Dále (sumace podle k od M_i do m_i)

$$\begin{aligned} &\left|{}^i\alpha\, {}^ik^0 - \sum {}^ib_k\right| \leqq \left|{}^i\alpha\, {}^ik^0 - \sum {}^ib_k\, {}^ik^0\right| + \left|\sum {}^ib_k\, {}^ik^0 - \sum {}^ib_k\right| \leqq \eta_n + \\ &+ \sum \left|{}^ib_k\, {}^ik^0 - {}^ib_k\right| \leqq \eta_n + \varepsilon \sum {}^ib_k \leqq \eta_n + \varepsilon({}^i\alpha + \eta_n) \leqq \eta_n(1+\varepsilon) + \varepsilon A\, u_{n-1}, \end{aligned}$$

tedy

$$u_n = \sum_{i=1}^{3} \left|{}^ia\, {}^ik^0 - \sum_{k=M_i+1}^{m_i} {}^ib_k\right| \leqq 3\,\eta_n(1+\varepsilon) + 3\,\varepsilon A\, u_{n-1},$$

a podle (19)

$$u_n \leqq 4\,\eta_n + \frac{1}{2} u_{n-1}.$$

Podle pomocné věty 2 je tedy $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Označme

$$v_n = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=M_i+1}^{m_i} {}^ib_k, \quad w_n = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=M_i+1}^{m_i} {}^ib_k. \tag{22}$$

Podle (20) je nyní $u_n = s - \sum_{k=1}^{n} v_k$ a z $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = s, \tag{23}$$

Dále

$$\sum_{k=M_i+1}^{m_i} {}^ib_k \leqq {}^i\alpha + \eta_n \leqq A u_{n-1} + \eta_n,$$

tedy

$$w_n \leqq 3 A u_{n-1} + 3 \eta_n,$$

a z $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$, $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$ plyne

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0. \tag{24}$$

Z (22), (23), (24) a z pomocné věty 1 je nyní patrno, že řada (21) je konvergentní a má součet s, což bylo dokázat.

Máme tedy zatím tento výsledek:

Budiž $\{a_n\}$ $(\lim_{n \to \infty} a_n = 0)$ posloupnošt vektorů. Všechny směry v K buďtež divergentní. Buďtež $i^0, -i^0$ dva kritické směry dané posloupnosti. Budiž $0 < \varepsilon' \leqq \frac{1}{48}$, $0 < \varepsilon'' = \frac{1}{6}$. Pak podle věty 1 existuje zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takové, že řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m,\ b_m \in U_{\varepsilon'}(i^0),\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m,\ b_m \in U_{\varepsilon'}(j^0),\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m,\ b_m \in U_{\varepsilon'}(k^0)$$

divergují, při čemž i^0, j^0, k^0 neleží současně v téže půlrovině.

Posloupnost $\{b_n\}$ však splňuje předpoklady věty 2 (jen místo ε, ε' nutno psát ε', ε''). Existuje tedy podle věty 2 zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ řady $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ takové, že řady,

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m,\ c_m \in U_{\varepsilon''}(i^0),\ \sum_{m=1}^{\infty} c_m,\ c_m \in U_{\varepsilon''}(j^0),\ \sum_{m=1}^{\infty} c_m,\ c_m \in U_{\varepsilon''}(k^0)$$

divergují a každý člen z $\{c_n\}$ leží v některém z okolí $U_{\varepsilon''}(i^0)$, $U_{\varepsilon''}(j^0)$, $U_{\varepsilon''}(k^0)$.

Posloupnost $\{c_n\}$ však splňuje předpoklady věty 3 (jen místo ε nutno psát ε''). Budiž $s \in K$ libovolný vektor. Lze pak podle věty 3 posloupnost $\{c_n\}$ rozložit do tří posloupností $\{{}^ic_n\}$, $i = 1, 2, 3$, takových, že existuje superposice $\sum_{m=1}^{\infty} c'_m$ řad $\sum_{m=1}^{\infty} {}^ic_m$, $i = 1, 2, 3$, mající součet s.

Avšak $\sum_{m=1}^{\infty} c'_m$ je zřejmě zhuštěním řady $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Je tedy podle pomocné věty 1 přerovnání $\sum_{m=1}^{\infty} b'_m$ řady $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$, příslušné zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} c'_m$ (viz definici 6) rovněž konvergentní a má součet s.

Avšak $\sum_{m=1}^{\infty} b'_m$ je zřejmě zase zhuštěním řady $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$. Tedy podle pomocné věty 1 je přerovnání $\sum_{m=1}^{\infty} a'_m$, příslušné zhuštění $\sum_{m=1}^{\infty} b'_m$ konvergentní se součtem s.

V případě, že daná posloupnost $\{a_n\}$ má tři směry kritické takové, že neexistuje půlrovina, ve které současně všechny tři leží, lze zřejmě celou úvahu opakovat s vynecháním věty 1, neboť daná posloupnost splňuje v tomto případě předpoklady věty 2.

Zbývá proto dokázat, že počet částečných posloupností, zmíněných ve větě hlavní, nelze snížit na dvě. Důkaz provedeme sporem.

Věta 4: Budiž $\{a_n\}$ posloupnost vektorů, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Všechny směry v K buďtež divergentní.

Pak nelze posloupnost $\{a_n\}$ rozložit na dvě posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ vzájemně disjunktní a takové, že každé a_n leží v některé z posloupností $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, a že k libovolnému danému vektoru s existuje superposice řad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, mající s za součet.

Důkaz: Předešleme nejprve několik úvah o řadách, jejichž členy jsou čísla reálná.[7]

Budiž $\{\gamma_n\}$ posloupnost čísel reálných (elementy z A) a $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ takové dvě nekonečné částečné posloupnosti z $\{\gamma_n\}$, že platí: $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ jsou disjunktní; každý člen z $\{\gamma_n\}$ je obsažen v některé z posloupností $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$; jsou-li m, n celá kladná čísla, $0 < n < m$, leží v posloupnosti $\{\gamma_n\}$ člen α_n před α_m, a podobně β_n před β_m.

Budiž dále $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ relativně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 0$.

Definice 7: Funkci $f(n)$ nazvene A-funkcí, jestliže platí:

1. $f(n)$ je definována pro všechna celá nezáporná n;
2. $f(0) = 0$;
3. $f(n)$ je celé nezáporné pro každé celé kladné n;
4. je-li $n > m \geqq 0$, n, m, celé, platí $f(n) \geqq (f(m)$;
5. $f(n) \to \infty$, když $n \to \infty$.

Budiž $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ superposicí řad $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$. (viz definici 4). Budiž $f(n)$ počet členů β_k, které v řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ leží před α_n, a položme $f(0) = 0$. Pak $f(n)$ je zřejmě A-funkcí. Podobně, je-li $F(n)$ počet členů α_k, které v řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ leží před členem β_n, a položíme-li $F(0) = 0$, je $F(n)$ rovněž A-funkcí.

Z toho je patrno, že každá superposice řad $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ definuje jednoznačně jistou A-funkci, a obráceně, každá A-funkce definuje jistou superposici řad $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Zřejmě jsou nyní ekvivalentní tyto výroky:

A) Existuje superposice řad $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_K$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ taková, že má za součet číslo α.

B) Existuje taková A-funkce $f(n)$, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové celé kladné $n_0(\varepsilon)$, že

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \alpha \right| < \varepsilon$$

pro všechna $n > n_0(\varepsilon)$ a pro všechna m, pro která

$$f(n) \leqq m \leqq f(n+1).$$

C) Existuje taková A-funkce $F(n)$, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové celé kladné $m_0(\varepsilon)$, že

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k + \sum_{k=1}^{m} \beta_k - \alpha \right| < \varepsilon$$

pro všechna $m > m_0(\varepsilon)$ a pro všechna n, pro která

$$F(m) \leqq n \leqq F(m+1).$$

---

[7] Vojtěch Jarník, *Über bedingt konvergente Reihen*, Math. Zeitschrift, sv. 24, 1926.

Pomocná věta 9: Předpokládejme, že existuje superposice řad $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty}{}' \beta_n$ taková, že má součet α. Pak existuje také superposice řad $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n, \sum_{n=1}^{\infty}{}' - \alpha_n$ taková, že má součet α.

Důkaz: Z $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \gamma_n = 0$ plyne, že existuje taková A-funkce $\varphi(n)$, že pro každé $\varepsilon > 0$ a pro všechna celá kladná $n, m, n > n_0(\varepsilon), \varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ je

$$\left| \sum_{k=1}^{n}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{m}{}' \beta_k \right| < \varepsilon. \tag{25}$$

Dále existuje podle předpokladu taková A-funkce $\psi(n)$, že pro každé $\varepsilon > 0$ a pro všechna celá kladná m, j, pro která $m > m_0(\varepsilon)$, $\psi(m) \leqq j \leqq \psi(m+1)$, platí

$$\left| \sum_{k=1}^{j}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{m}{}' \beta_k - \alpha \right| < \varepsilon. \tag{26}$$

Budiž nyní $n_0'(\varepsilon)$ nejmenší číslo celé kladné, takové, že $n_0'(\varepsilon) > n_0(\varepsilon)$, $\varphi[n_0'(\varepsilon)] > m_0(\varepsilon)$; n, j buďtež čísla celá kladná, taková, že $n > n_0'(\varepsilon)$, $\psi[\varphi(n)] \leqq j \leqq \psi[\varphi(n+1)]$. Poněvadž $\psi(n)$ je funkce neklesající, lze nalézt takové celé kladné m, že platí $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$ a $\psi(m) \leqq j \leqq \psi(m+1)$. Pak platí současně (25) a (26), tedy

$$-\varepsilon < \sum_{k=1}^{n}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{m}{}' \beta_k < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < \sum_{k=1}^{j}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{m}{}' \beta_k - \alpha < \varepsilon,$$

odkud

$$-\varepsilon < \sum_{k=1}^{j}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{n}{}' - \alpha_k - \alpha < \varepsilon,$$

tedy

$$\left| \sum_{k=1}^{l}{}' \alpha_k + \sum_{k=1}^{n}{}' - \alpha_k - \alpha \right| < \varepsilon,$$

a poněvadž $\psi[\varphi(n)] = \varrho(n)$, je zřejmě A-funkcí, je tím věta dokázána.

Pomocná věta 10: Předpokládejme, že existuje superposice řad $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k, \sum_{k=1}^{\infty}{}' - \alpha_k$ taková, že má součet α. Pak existuje superposice řad $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k, \sum_{k=1}^{\infty}{}' \beta_k$ taková, že má rovněž součet α.

Důkaz probíhá úplně analogicky, jako důkaz pomocné věty 9.

Budiž nyní opět $\{\mathfrak{a}_n\}$ posloupnost vektorů, $\lim_{n \to \infty} \mathfrak{a}_n = 0$. Všechny směry v $\boldsymbol{K}$ buďtež divergentní. Je tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathfrak{a}_k$ relativně konvergentní. Buďtež $\{\mathfrak{b}_n\}$, $\{\mathfrak{c}_n\}$ dvě částečné posloupnosti z $\{\mathfrak{a}_n\}$, vzájemně disjunktní a takové, že každé $\mathfrak{a}_n$ leží v některé z posloupností $\{\mathfrak{b}_n\}$, $\{\mathfrak{c}_n\}$; pořadí členů $\mathfrak{b}_n$ v $\{\mathfrak{b}_n\}$ a $\mathfrak{c}_n$ v $\{\mathfrak{c}_n\}$ budiž totéž jako v $\{\mathfrak{a}_n\}$.

Budiž nyní ${}^1\mathfrak{a}$ libovolný vektor různý od nuly, a předpokládejme, že existuje superposice řad $\sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathfrak{b}_k, \sum_{k=1}^{\infty}{}' \mathfrak{c}_k$, mající za součet vektor ${}^1\mathfrak{a}$, to jest existuje taková A-funkce $\varphi'(n)$, že ke každému $\varepsilon < 0$ lze najít takové $n_0(\varepsilon)$, že pro všechna celá kladná $n > n_0(\varepsilon)$ a pro všechna celá kladná m, splňující nerovnosti $\varphi'(n) \leqq m \leqq \varphi'(n+1)$, platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}{}' \mathsf{b}_k + \sum_{k=1}^{m}{}' \mathsf{c}_k - {}^1\mathsf{a}\right| < \varepsilon.$$

Posloupnosti $\{\mathsf{b}_n\}$ a $\{\mathsf{c}_n\}$ jsou zřejmě nekonečné. Podle pomocných vět 9 a 10 existuje taková A-funkce $\varphi(n)$, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové n_0, že pro všechna celá kladná $n > n_0$ a pro všechna celá kladná m, splňující nerovnosti $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$, platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n}{}' \mathsf{b}_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \mathsf{b}_k - {}^1\mathsf{a}\right| < \varepsilon.$$

Buďtež β'_k, β''_k souřadnice vektoru b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ a ${}^1\alpha' > 0$, ${}^1\alpha'' > 0$ souřadnice vektoru ${}^1\mathsf{a}$. Je tedy pro všechna celá kladná n, m, pro která $n > n_0$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}{}' \beta'_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta'_k - {}^1\alpha'\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}{}' \beta''_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta''_k - {}^1\alpha''\right| < \varepsilon.$$

Označíme-li $\sum_{k=1}^{n}{}' \beta'_k = \sigma'(n)$, $\sum_{k=1}^{n}{}' \beta''_k = \sigma''(n)$, je tedy

$$|\sigma'(n) - \sigma'(m) - {}^1\alpha'| < \varepsilon, \quad |\sigma''(n) - \sigma''(m) - {}^1\alpha''| < \varepsilon. \tag{27}$$

Nemůže nyní být $m = n$ pro všechna $n > n_0$, neboť pak by z (27) plynulo

$$|{}^1\alpha'| < \varepsilon, \quad |{}^1\alpha''| < \varepsilon$$

pro všechna $n < n_0$, tedy ${}^1\alpha' = {}^1\alpha'' = 0$ proti předpokladu ${}^1\alpha' > 0$, ${}^1\alpha'' > 0$.

Nemůže být $m = n$ ani pro nekonečně mnoho n.

Důkaz: Předpokládejme opak, to jest $m = n$ pro nekonečně mnoho n. Posloupnost všech těchto n (vybraná z posloupnosti $\{n\}$) budiž $\{n_p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Pak posloupnost $\omega'(n_p) = \sum_{k=1}^{n_p}{}' \beta'_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta'_k$, $n_p \in \{n_p\}$, $\varphi(n_p) \leqq m \leqq \varphi(n_p + 1)$ je vybraná z posloupnosti $\omega'(n) = \sum_{k=1}^{n}{}' \beta'_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta'_k$, $n \in \{n\}$, $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$, a má tedy limitu ${}^1\alpha'$. Zcela obdobně posloupnost $\omega''(n_p) = \sum_{k=1}^{n_p}{}' \beta''_k - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta''_k$, $n_p \in \{n_p\}$, $\varphi(n_p) \leqq m \leqq \varphi(n_p + 1)$ má limitu ${}^1\alpha''$. Z $m = n_p$ pro všechna $n_p \in \{n_p\}$ (od jistého počínaje) pak opět plyne ${}^1\alpha' = {}^1\alpha'' = 0$ proti předpokladu ${}^1\alpha' > 0$, ${}^1\alpha'' > 0$. Tudíž může být $m = n$ jen v konečném počtu případů.

Z toho dále plyne, že existuje N_1 celé kladné, takové, že pro všechna $n > N_1$ je stále buď $\varphi(n) > n$ nebo $\varphi(n) < 0$.

Důkaz: Budiž N_1 celé kladné, takové, že pro žádné $n > N_1$ není $m = n$. Takové N_1 podle předcházejícího existuje. Buďtež dále $N_1 < n_1 < n_2$ celá kladná, taková, že $\varphi(n_1) < n_1$, $\varphi(n_2) > n_2$. Pak zřejmě existuje $n_1 \leqq n \leqq n_2$ takové, že $\varphi(n) < n$, $\varphi(n+1) > n + 1 > n$ ($\varphi(n)$ je neklesající), tedy $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$, probíhající hodnoty $\varphi(n)$ až $\varphi(n+1)$, projde hodnotou $m = n$, což je ve sporu s předpokladem o čísle N_1. Analogicky nemůže být současně $\varphi(n_1) > n_1$, $\varphi(n_2) < n_2$.

Předpokládejme, že je $\varphi(n) > n$ pro všechna $n \geqq N_1$. Vzhledem k ${}^1\alpha' > 0$ je pro všechna n od určitého počínaje, a pro všechna m, pro která $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{m}{}' \beta'_i - \sum_{k=1}^{n}{}' \beta'_k = \sigma'(m) - \sigma'(n) > 0, \tag{28}$$

a zvolme N_1 dostatečně veliké, takže (28) platí rovněž pro všechna $n \geqq N_1$.

Budiž nyní ${}^2a$ vektor o souřadnicích ${}^2\alpha' < 0$, ${}^2\alpha'' > 0$. Podle předpokladu a podle pomocných vět 9 a 10 existuje taková A-funkce $\psi(n)$, že platí: ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové $n_0(\varepsilon)$ celé kladné, že pro všechna celá kladná n, m, pro která $n > n_0(\varepsilon)$, $\psi(n) \leqq m \leqq \psi(n+1)$, je

$$\left| \sum_{k=1}^{n}{}' \beta_k' - \sum_{k=1}^{m}{}' \beta_k' - {}^2\alpha' \right| < \varepsilon.$$

Stejně, jako pro funkci $\varphi(n)$ lze ukázat, že existuje celé kladné konečné N_2 takové, že pro všechna $n \geqq N_2$ je stále buď $\psi(n) > n$, nebo $\psi(n) < n$, a vzhledem k ${}^2\alpha' < 0$ je $\sigma'(m) - \sigma'(n) < 0$ pro všechna m, pro která $\psi(n) \leqq m \leqq \psi(n+1)$. Předpokládejme opět, že pro všechna $n \geqq N_2$ je $\psi(n) > n$. Budiž nyní $N = \max(N_1, N_2)$. Platí potom

$$\varphi(n) > n \text{ pro všechna } n \geqq N,$$

$$\psi(n) > n \text{ pro všechna } n \geqq N, \tag{29}$$

$$\sigma'(m) - \sigma'(n) > 0 \tag{30}$$

pro všechna m, pro která $\varphi(n) \leqq m \leqq \varphi(n+1)$,

$$\sigma'(m) - \sigma'(n) < 0 \tag{31}$$

pro všechna m, pro která $\psi(n) \leqq m \leqq \psi(n+1)$,

$$\varphi(N) > N.$$

Sestrojme nyní uzavřený interval $< N, \varphi(N) >$. Budiž

$$\sigma'(k) = \sigma, \quad N \leqq k \leqq \varphi(N), \ k \text{ celé kladné}, \tag{32}$$

nejmenší hodnota výrazu $\sigma'(n)$ v $< N, \varphi(N) >$. Z (31) plyne

$$\sigma'[\psi(k)] < \sigma'(k) = \sigma. \tag{33}$$

Z (29) plyne

$$\psi(k) > k \geqq N.$$

Označme nyní

$$N = \varphi^0(N),\ \varphi(N) = \varphi^1(N),\ \varphi[\varphi(N)] = \varphi^2(N),\ \varphi[\varphi(\varphi(N))] = \varphi^3(N)$$

atd. a sestrojme posloupnost

$$\varphi^0(N), \varphi^1(N), \varphi^2(N), \ldots$$

Tato posloupnost je zřejmě neklesající a tedy existuje $r \geqq 0$ takové, že

$$\varphi^r(N) \leqq \psi(k) < \varphi^{r+1}(N),$$

tedy (vzhledem k významu symbolu φ^n)

$$\varphi^r(N) \leqq \psi(k) < \varphi^r[\varphi(N)].$$

Existuje jistě p celé kladné takové, že $N \leqq p < \varphi(N)$ a

$$\varphi^r(p) \leqq \psi(k) < \varphi^r(p+1). \tag{34}$$

Stanovíme nyní ke každému i, $0 \leqq i \leqq r$ číslo p_i celé kladné tak, že

$$\varphi^{r-i}(p_i) \leqq \psi(k) < \varphi^{r-i}(p_i+1). \tag{35}$$

Dále je

$$\varphi^{r-i}(N) \leqq \varphi^r(N) \leqq \psi(k),$$

$$p_0 = p, \tag{36}$$

Z (35) plyne pro $i < r$

$$\varphi^{r-i-1}[\varphi(p_i)] \leqq \psi(k) < \varphi^{r-i-1}[\varphi(p_i+1)]. \tag{37}$$

$$\varphi^{r-i-1}(p_i+1) \leqq \psi(k) < \varphi^{r-i-1}(p_{i+1}+1). \tag{38}$$

Poněvadž p_{i+1}, $p_{i+1}+1$ jsou čísla celá po sobě jdoucí, plyne z (37) a (38)

$$\varphi(p_i) \leqq p_{i+1}, \quad p_{i+1} + 1 \leqq \varphi(p_i + 1),$$

tedy

$$\varphi(p_i) \leqq p_{i+1} < \varphi(p_i + 1). \tag{39}$$

Podle (34) a (36) je $N \leqq p_0$, plyne tedy z (39) a z předpokladu $\varphi(n) > n$ pro všechna $n \geqq N$

$$N \leqq p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r. \tag{40}$$

Podle (30) je $\sigma'(m) > \sigma'(n)$, a dále podle (39) platí

$$\sigma'(p_0) < \sigma'(p_1),\ \sigma'(p_1) < \sigma'(p_2), \ldots, \sigma'(p_{r-1}) < \sigma'(p_r),$$

tedy

$$\sigma'(p_r) \geqq \sigma'(p_0).$$

Je však podle (35)

$$p_r = \psi(k).$$

Dále platí podle (34) $N \leqq p < \varphi(N)$, podle (32) $\sigma'(p) \geqq \sigma$ a podle (36) $p_0 = p$, tedy

$$\sigma'[\psi(k)] > \sigma'(p_r) = \sigma'(p) \geqq \sigma,$$

tedy

$$\sigma'[\psi(k)] > \sigma. \tag{41}$$

Podle (33) je však

$$\sigma'[\psi(k)] < \sigma. \tag{42}$$

Z (29), (32), (40) plyne $\sigma'[\psi(k)] \neq \sigma$, jsou tedy nerovnosti (41) a (42) ve sporu.

Vede tedy předpoklad $\varphi(n) > n$, $\psi(n) > n$ pro všechna $n \geqq N$ ke sporu. Úplně stejně lze dokázat, že nemůže současně platit $\varphi(n) < n$, $\psi(n) < n$ pro všechna dosti velká n, musí tedy být stále (od určitého n) buď $\varphi(n) < n$, $\psi(n) > n$, nebo $\varphi(n) > n$, $\psi(n) < n$, tedy platí pro všechna n od určitého počínaje

$$\operatorname{sign}\,[\varphi(n) - n]\,[\psi(n) - n] = \operatorname{sign}\,{}^1\alpha'\,{}^2\alpha'.$$

Stejně však musí platit

$$\operatorname{sign}\,[\varphi(n) - n]\,[\psi(n) - n] = \operatorname{sign}\,{}^1\alpha''\,{}^2\alpha''$$

pro všechna n od určitého počínaje. Je však ${}^1\alpha'\,{}^2\alpha' < 0$, ${}^1\alpha''\,{}^2\alpha'' > 0$, tedy

$$\operatorname{sign}\,{}^1\alpha'\,{}^2\alpha' \neq \operatorname{sign}\,{}^1\alpha''\,{}^2\alpha'',$$

což je spor. Tím je věta 4 dokázána.

Z vět 1 až 4 pak plyne věta hlavní.

BOHDAN KLIMEŠ

ODVOZENÍ STEINEROVY VĚTY PRO MOMENT SETRVAČNOSTI ZE ZÁKONA ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Moment setrvačnosti tělesa je fysikální veličina, která charakterisuje setrvačné vlastnosti tělesa při otáčivém pohybu. Na rozdíl od hmoty tělesa, která je fysikální veličinou, charakterisující setrvačné vlastnosti tělesa při postupném pohybu a která je pro dané těleso konstantní (nepřihlížíme-li k relativistickému zvětšení hmoty při velkých rychlostech), je moment setrvačnosti závislý na poloze osy rotace vůči tělesu. Známe-li však moment setrvačnosti tělesa k některé ose, můžeme pomocí Steinerovy věty (4) stanovit moment setrvačnosti téhož tělesa ke každé ose, která je s danou osou rovnoběžná. Steinerova věta se uplatňuje v praxi zejména při experimentálním stanovení momentu setrvačnosti tělesa k ose procházející těžištěm z doby kyvu tělesa, nebo při určování vzdálenosti těžiště od osy rotace, na př. u nevyvážených setrvačníků.

Moment setrvačnosti můžeme definovat na př. při výpočtu kinetické energie otáčivého