Jiří Gregor

Dynamické systémy s regulární pravou stranou. I

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 2, 153--160

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137410`

DYNAMICKÉ SYSTÉMY S REGULÁRNÍ PRAVOU STRANOU I*)

JIŘÍ GREGOR
(Katedra matematiky a deskr. geom. el. fak. ČVUT)

Článek se zabývá dynamickými systémy v rovině, jejichž pravá strana v komplexním zápisu je regulární funkcí proměnné $x + iy$. To je věc, na kterou kdysi upozornil N. P. Jerugin a o které se recensenti učebnice I. M. Matvejeva (viz Uspechi matěmatičeskich nauk, sv. XII, č. 3 (75), str. 279—283, 1957, učebnice je v článku citována) vyslovují celkem pohrdavě.

Ukazuje se však, že věc je velmi zajímavá. To je patrné např. odtud: jsou-li periodická řešení, pak vytvářejí střed, načež jejich existence nikdy není narušena členy vyššího řádu.

V článku jsou dále zkoumány, celkem obecně, dynamické systémy, jejichž pravé strany mají násobné nuly nebo póly. Málo prací se dosud zabývalo poněkud obecnější třídou takovýchto systémů, a žádná nedosahuje tak úplných výsledků.

Lze očekávat, že tento článek bude východiskem dalších prací.

O. Hájek

I

Uvažujme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u(x, y) \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(x, y)\,, \tag{1}$$

jejichž pravé strany jsou v oblasti D spojitými funkcemi proměnných $x\ y$ a se spojitými prvními parciálními derivacemi, které splňují vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \not\equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \not\equiv 0\,. \tag{2}$$

Н. П. Еругин poukázal na to[1]), že rovnice (1) jsou při splnění podmínek (2) ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(z)\,, \quad f(z) \not\equiv 0\,, \tag{3}$$

kde $f(z)$ je komplexní funkcí proměnné z, regulární v oblasti D, t je reálný parametr.

Pojem řešení a trajektorie rovnice (3) budeme používat v obvyklém slova smyslu. Jestliže v jednoduše souvislé oblasti $G \subset D$ je stále $f(z) \neq 0$, pak existuje funkce $F(z)$ regulární v G taková, že $F'(z) = \frac{1}{f(z)}$. Řešením rovnice (3) je pak funkce $z(t)$, pro kterou platí: je-li $z(t) \in G$ pro $|t - t_0| < \lambda$, pak $F[z(t)] - F[z(t_0)] = t - t_0$. Trajektorií rovnice (3) je pak libovolná křivka $z = z(t)$, která splňuje rovnici $F(z) = t + C$, kde C je komplexní číslo.

Bod z_0, pro který jest $f(z_0) = 0$, nazveme kritickým bodem diferenciální rovnice (3), bod z_0, který je isolovaným singulárním bodem funkce $f(z)$, nazveme singulárním bodem diferenciální rovnice (3). Není na újmu obecnosti, položíme-li $z_0 = 0$. Je-li $f(z) \not\equiv 0$, pak vždy existuje okolí D bodu z_0 takové, že $f(z)$ je regulární všude na $\{D - (z_0)\}$ a nemá tam

*) Podnětem k tomuto článku byly některé otázky trajektorií jednoparametrických soustav čar a jejich obálek, kterými se zabýval seminář prof. dr. Zd. Pírka v létě 1957. *J. G.*

[1]) Н. П. Еругин, *Zamečanije ob intégrirovaniji sistěmy dvuch uravněnij v koněčnom vidě*, Prikl. mat. i mech., sv. XIV, 1950, str. 315.

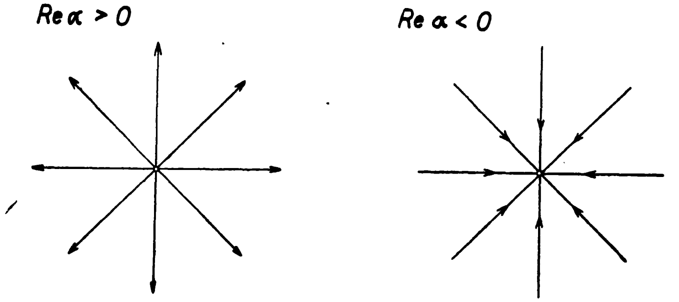
kořeny. V dalším se omezíme na vyšetření trajektorií v D. Orientace těchto trajektorií je dána příslušnou parametrisací, t. j. řešením diferenciální rovnice.

Vyšetřme nejprve zvláštní případ rovnice (3)

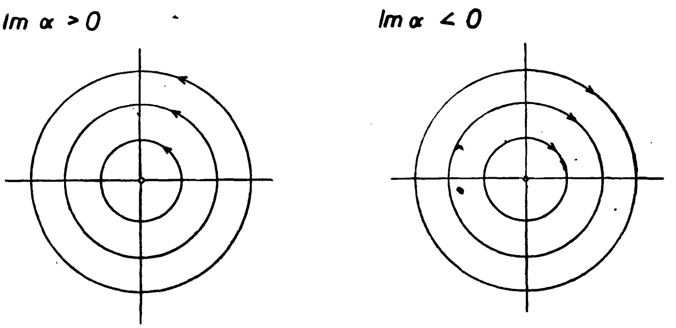
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \alpha z\,, \quad \alpha \neq 0\,, \quad \text{komplexní.} \tag{4}$$

Integrací dostaneme $\ln z = \alpha t + C_1$, a dále

$$z = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,, \quad \text{kde} \quad C = \mathrm{e}^{C_1}. \tag{5}$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Rozlišme nyní tyto případy:

1) $\alpha - \bar{\alpha} = 0$, ($\alpha$ reálné):

Trajektoriemi jsou všechny polopřímky „procházející“ počátkem. Jejich orientace je dána znaménkem reálného čísla α a je patrna z obr. 1.

2) $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, ($\alpha$ ryze imaginární):

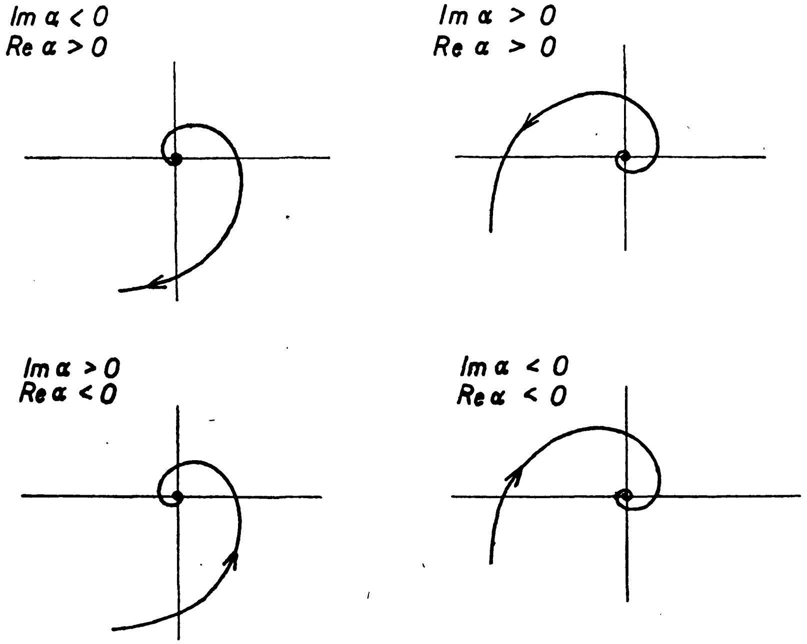
Snadno se přesvědčíme, že trajektoriemi jsou soustředné kružnice. Jejich orientace je dána znaménkem čísla $\mathrm{Im}\alpha$ a je patrna z obr. 2.

3) $\alpha - \bar{\alpha} \neq 0, \alpha + \bar{\alpha} \neq 0$:

Násobíme-li rovnici (5) rovnicí s ní ekvivalentní $\bar{z} = \bar{C}\,\mathrm{e}^{\bar{\alpha} t}$ dostaneme (po přechodu k polárním souřadnicím (ϱ, t) a odmocnění) rovnici tvaru $\varrho = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}\mathrm{Re}\alpha}$, což je rovnice soustavy logaritmických spirál, homothetických vzhledem k bodu (0). Jejich tvar a orientace je dána znaménky čísel $\mathrm{Re}\alpha$, $\mathrm{Im}\alpha$, jak je vidět na obr. 3.

Nazveme nyní kritický bod $z_0 = 0$ rovnice (3) dikritickým uzlem, středem, ohniskem, je-li průběh trajektorií rovnice (3) v okolí D „podobný" uvedeným případům 1) — 3). Přesněji:

Definice 1. *Nechť $f(0) = 0$. Pak počátek nazveme dikritickým uzlem trajektorií rovnice* (3), *jestliže ke každému bodu $z_i = e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi \leqq \pi)$ jednotkové kružnice existuje řešení $z(t)$ a posloupnost $\{z(t_n)\} \to 0$* tak, že $\lim \dfrac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|} = z_i$.



Obr. 3.

Definice 2. *Nechť $f(0) = 0$. Pak počátek nazveme středem trakjektorií rovnice* (3), *jestliže existuje okolí D_1 počátku tak, že $D_1 \subset D$ a každým bodem D_1 prochází uzavřená trajektorie, mající počátek uvnitř.*

Definice 3. *Nechť $f(0) = 0$. Pak počátek nazveme ohniskem trajektorií rovnice* (3), *jestliže pro každé řešení $z(t)$ a libovolný bod $z_i = e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi \leqq \pi)$ existují posloupnosti $\{z(t_n)\} \to 0$ takové, že $\lim \dfrac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|} = z_i$.*

Uvedeme ještě definici výjimečného směru diferenciální rovnice (3), kterou budeme potřebovat později.

Definice 4. *Nechť $\{z_k(t)\}$ je libovolná posloupnost řešení diferenciální rovnice* (3) *a $\{z_k(t_n)\}$ je libovolná posloupnost bodů na těchto řešeních. Lze-li z ní vybrat takovou posloupnost bodů $\{z_{k_i}(t_{n_i})\} \to 0$, aby*

$$\lim \frac{|z_{k_i}(t_{n_i})|}{z_{k_i}(t_{n_i})} \cdot \frac{f[z_{k_i}(t_{n_i})]}{|f[z_{k_i}(t_{n_i})]|} = \pm 1 ,$$

nazýváme každý směr, určený radiusvektorem některého hromadného bodu posloupnosti $\left\{\frac{z_{k_i}(t_{n_i})}{|z_{k_i}(t_{n_i})|}\right\}$ *výjimečným směrem diferenciální rovnice* (3).

Geometrická interpretace: Posloupnost tvaru $\left\{\frac{|z_i|}{z_i} \cdot \frac{f_i}{|f_i|}\right\}$ z definice 4. lze uvést v souvislost s posloupností úhlů radiusvektorů bodů z_i ($\{z_i\} \to 0$) s příslušným vektorem směrového pole, charakterisovaného rovnicí (3). Je-li limita této posloupnosti rovna ± 1, pak posloupnost těchto úhlů je nulová nebo konverguje k π. Udává-li tedy bod $e^{i\varphi}$ výjimečný směr a „prochází-li" trajektorie počátkem, pak polopřímka určená počátkem a výjimečným směrem je její (neorientovanou) tečnou.

V této souvislosti uvedeme ještě větu, která bude mít v dalším pomocný charakter.

Věta 1. *Je-li v diferenciální rovnici* (3) $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ *a existuje-li posloupnost* $\{z(t_n)\} \to 0$, *pak množiny hromadných bodů posloupností* $\left\{\frac{z(t_n)}{|z(t_n)|}\right\}$ a $\left\{\frac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|}\right\}$ *jsou shodné až na otočení.*

Důkaz: Funkci $f(z)$ lze za uvedených podmínek psát ve tvaru $f(z) = \alpha_0 z + \alpha_1 z\varphi(z)$, $\alpha_0 \neq 0$, kde $\varphi(0) = 0$. Pro každou vybranou posloupnost, pro kterou existuje $\lim \frac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|}$, existuje také $\lim \frac{z(t_n)}{|z(t_n)|}$ a platí: $\lim \frac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|} = \frac{\alpha_0}{|\alpha_0|} \cdot \lim \frac{z(t_n)}{|z(t_n)|}$. Tím je tvrzení dokázáno.

Důsledky: 1) Otočení je zřejmě dáno pro všechny hromadné body komplexním číslem $\frac{\alpha_0}{|\alpha_0|}$. Právě pro $\alpha_0 = |\alpha_0|$ splývají množiny hromadných bodů obou posloupností.

2) Pro $\alpha_0 = \bar{\alpha}_0$ jsou obě množiny shodné nebo souměrné podle počátku, podle toho zda $\alpha > 0$, nebo $\alpha < 0$.

II

Vyšetříme nyní trajektorie diferenciální rovnice (3) v oblasti D za předpokladu, že $f(z)$ má v bodě $z_0 = 0$ jednoduchý nulový bod.

Věta 2. *Nechť* $f(z)$ *v diferenciální rovnici* (3) *je funkce regulární v oblasti* D [$|z| < R$], $f(0) = 0$, $f'(0) = \alpha \neq 0$, *pak počátek je středem trajektorií právě tehdy, je-li* $\alpha + \bar{\alpha} = 0$.

Důkaz: Funkce $\frac{1}{f(z)}$ má v bodě $z = 0$ jednoduchý pól a platí $\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\alpha}$. V oboru $0 < |z| < R$ lze tedy psát

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\alpha z} + a_0 + a_1 z + \ldots$$

a po integraci diferenciální rovnice tedy

$$\frac{1}{\alpha} \ln z + \varphi(z) = t + C_1 ,$$

kde φ je regulární v D, $\varphi(0) = 0$ a C_1 je libovolná komplexní konstanta.

Zaveďme funkci $\psi(z)$ vztahem $\psi(z) = e^{\alpha\varphi(z)}$. Funkce $\psi(z)$ je regulární v D, $\psi(z) \neq 0$ na D, $\psi(0) = 1$. Trajektorie diferenciální rovnice (3) splňují tedy v tomto případě rovnici

$$z\psi(z) = C\, e^{\alpha t} , \quad \text{kde} \quad C = e^{\alpha C_1} . \qquad (6)$$

Funkce $e^{\alpha t}$ je periodická právě tehdy, je-li $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Křivky (6) jsou tedy uzavřené pro $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Podmínka je nutná.

Za druhé: nechť $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Jest

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z \cdot \psi(z)\right]_{z=0} = \psi(0) = 1 ,$$

takže existuje okolí D_0 počátku, v němž $z \cdot \psi(z)$ je prostá funkce; lze předpokládat $D_0 \subset D$. Dále: nula je řešením rovnice (3); existuje okolí $G \subset D_0$ počátku takové, že pro každé řešení $z(t)$ rovnice (3) s $z(0) \in G$ jest

$$z(t) \in D_0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi .^{2})$$

Z jednolistosti $z\psi(z)$ a rovnice (6) plyne pak $z(0) = z(2\pi)$.

Celkem: existuje okolí počátku takové, že každá trajektorie protínající G je uzavřená a leží v D_0. Všechny tyto trajektorie obsahují počátek ve svém vnitřku[3]). Tedy počátek je středem, podmínka je postačující.

Věta 3. *Je-li $f(z)$ v diferenciální rovnici* (3) *funkce regulární v $D[|z| < R]$* a dále je-li $f(0) = 0$ a $f'(0) = \alpha \neq 0$, *pak počátek je dikritickým uzlem trajektorií právě tehdy, když* $\alpha = \bar{\alpha}$.

Důkaz: Trajektorie rovnice (3) vyhovují rovnici $z\psi(z) = C\,e^{\alpha t}$ (viz důkaz věty 2.). Tedy právě pro $\alpha = \bar{\alpha}$ existuje na každém řešení $z(t)$ posloupnost $\{z(t_n)\} \to 0$. Dále: ke každému bodu jednotkové kružnice existuje řešení $z(t)$ takové, že tento bod je hromadným bodem posloupnosti $\dfrac{z(t_n)}{|z(t_n)|}$, $[\psi(0) = 1!]$. Podle důsledků věty 1. je tento bod (nebo bod s ním souměrný podle počátku) také hromadným bodem posloupnosti $\dfrac{f[z(t_n)]}{|f[z(t_n)]|}$, a tedy počátek je dikritickým uzlem.

Věta 4. *Je-li $f(z)$ v diferenciální rovnici* (3) *funkce regulární v oblasti $D[|z| < R]$ a dále je-li $f(0) = 0$ a $f'(0) = \alpha \neq 0$, $\alpha \pm \bar{\alpha} \neq 0$, pak počátek je ohniskem trajektorií rovnice* (3).

Důkaz: Plyne z definice ohniska a z vět 1. a 2.

III

Než přejdeme k rozboru násobných nulových bodů a násobných singulárních bodů funkce $f(z)$ na pravé straně rovnice (3), vyslovíme několik jednoduchých důsledků definice 4. Budeme i nadále předpokládat, že singulárním nebo kritickým bodem rovnice (3) je bod $z = 0$.

1. Má-li $f(z)$ v bodě $z = 0$ nulový bod řádu $n \neq 1$ pak existuje $2(n - 1)$ výjimečných směrů. Jim odpovídající polopřímky vytínají na jednotkové kružnici vrcholy pravidelného $2(n - 1)$ — úhelníka. Označíme-li totiž $\lim \dfrac{z(t_i)}{|z(t_i)|} = e^{i\varphi_0}$, dostaneme pro tento případ

$$e^{-i\varphi_0} \frac{\alpha z^n(t_i) + z^n(t_i) \cdot \sigma(z)}{|\alpha z^n(t_i) + z^n(t_i) \cdot \sigma(z)|} \to e^{-i\varphi_0} e^{in\varphi_0} \frac{\alpha}{|\alpha|} \to \pm 1 ,$$

---

[2]) viz na př. H. M. Матвеев, *Metody intěgrirovanija obyknovennych differencialnych uravněnij*, Izd. leningr. univ., 1955, str. 245.

[3]) viz Немыцкий—Степанов, *Kačestvennaja těorija differencialnych uravněnij*, M.-L. 1949, str. 54; str. 77.

a tedy $e^{j(n-1)\varphi_0} = \frac{\pm\bar{\alpha}}{|\alpha|}$, kde φ_0 je argument komplexního čísla, určujícího výjimečný směr. Vyslovené tvrzení plyne nyní z vlastností odmocniny komplexního čísla.

2. Má-li $f(z)$ v bodě $z = 0$ pól n-tého řádu, pak existuje $2(n + 1)$ výjimečných směrů. Jim odpovídající polopřímky vytínají na jednotkové kružnici vrcholy pravidelného $2(n + 1)$-úhelníka. O tomto tvrzení se můžeme přesvědčit obdobně, jako v předchozím případě.

Zavedeme ještě pojem indexu singulárního bodu.

Definice 5. *Indexem singulárního bodu $z = 0$ diferenciální rovnice* (3) *nazveme hodnotu integrálu*

$$i = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\varrho\, e^{j\varphi})}{f(\varrho\, e^{j\varphi})}\, \varrho\, de^{j\varphi} ,$$

kde $f(z)$ — pravá strana rovnice (3) *— je regulární v D $[|z| < r]$ s výjimkou bodu $z = 0$, kde může mít pól nebo nulový bod libovolného řádu, $\varrho < r$.*

Ze známé věty o hodnotě integrálu tohoto typu plyne ihned řada vlastností indexu. Platí

$$i = \begin{cases} n, \text{ je-li bod } z = 0\ n\text{-násobným nulovým bodem funkce } f(z), \\ 0, \text{ je-li bod } z = 0 \text{ regulárním bodem funkce } f(z), f(0) \neq 0, \\ -n, \text{ je-li bod } z = 0\ n\text{-násobným pólem funkce } f(z). \end{cases}$$

Obráceně: Je-li index singulárního nebo kritického bodu roven k, pak pravá strana rovnice (3), je-li meromorfní v D, má k-násobný nulový bod, je-li $k > 0$ a k-násobný pól, je-li $k < 0$. Toto tvrzení plyne přímo z definice. Na př. pro $k < 0$ je k rovno násobnosti pólu funkce $f(z)$, neboť v D není jiných pólů funkce $f(z)$ a nejsou tam ani nulové body $f(z)$.

Mezi počtem výjimečných směrů p a indexem i singulárního bodu platí vztah

$$p = 2|i - 1|, \quad i \neq 1 . \tag{9}$$

IV

Přejdeme k rozboru násobných kritických bodů a násobných singulárních bodů diferenciální rovnice (3).

Věta 4. *Má-li funkce $f(z)$ v diferenciální rovnici* (3) *v bodě $z = 0$ pól k-tého řádu, pak konečný počet trajektorií prochází počátkem a pro ostatní trajektorie v okolí D platí: ke každé trajektorii existuje okolí $D_1 \subset D$ počátku, ve kterém neleží žádný bod této trajektorie.*

Důkaz: Trajektorie vyhovují v tomto případě rovnici

$$\alpha z^{k+1} \,.\, \varphi(z) = t + C , \tag{10}$$

kde $\varphi(z)$ je funkce regulární v D, $\varphi(0) = 1$. Rozlišme nyní dva případy:

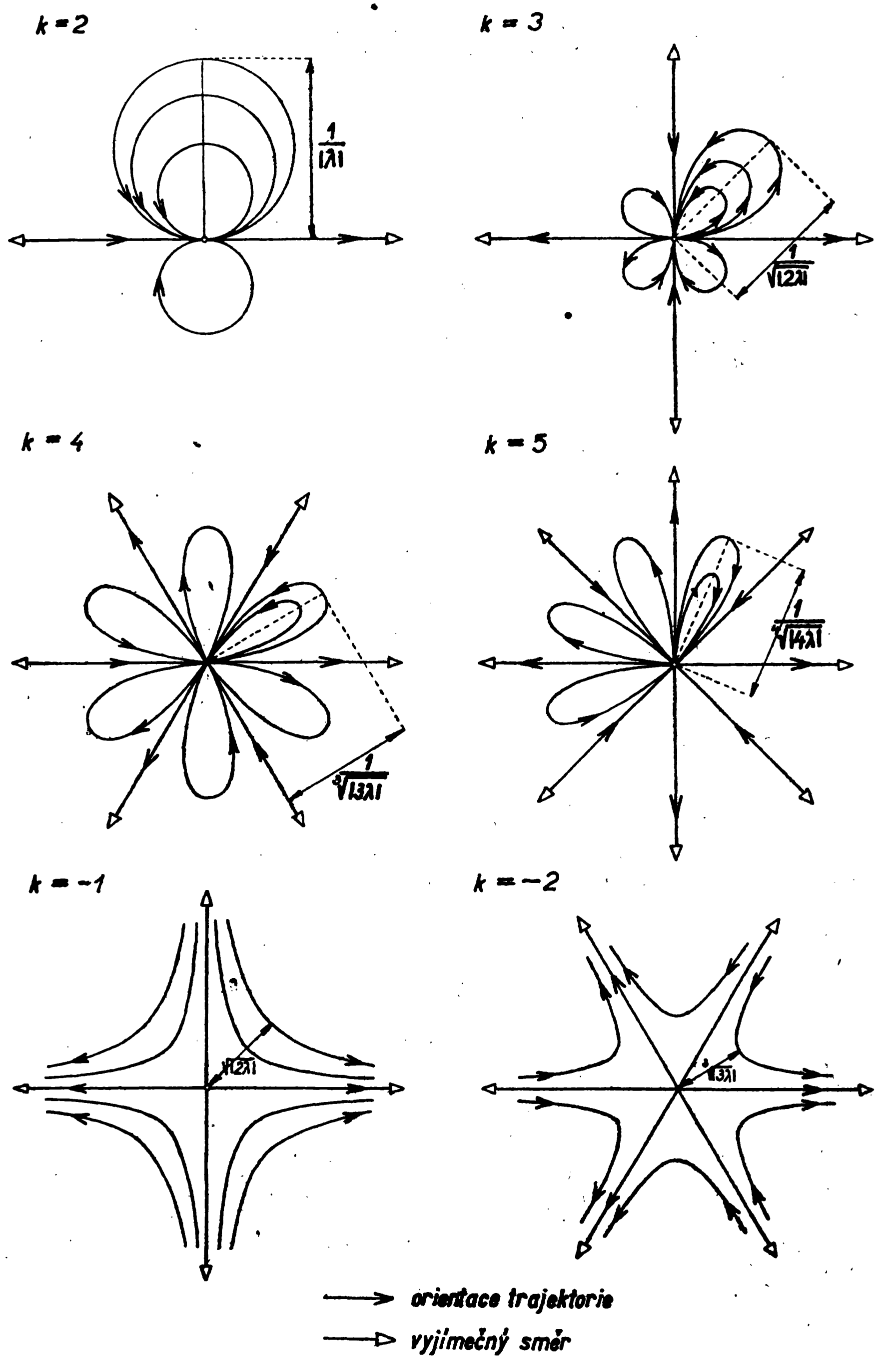
a) $C = \bar{C}$ (C reálné):

Neuvažujeme-li posunutí parametrisace po téže trajektorii, můžeme položit $C = 0$. Jelikož $\varphi(z) \neq 0$ všude na D, musí na trajektorii ležet bod $z = 0$. První část věty je dokázána.

b) $C \neq \bar{C}$:

Pro všechna t jest $t + C \neq 0$. Jelikož $\varphi(z) \neq 0$ na D, musí být [podle (10)] $z^{k+1} \neq 0$, odkud plyne druhá část vysloveného tvrzení.

Věta 5. *Má-li funkce $f(z)$ v diferenciální rovnici* (3) *v bodě $z = 0$ nulový bod k-tého řádu* ($k > 1$), *a je-li* $\operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{f(z)} = 0$, *pak všechny trajektorie „procházejí" počátkem a ke každé trajektorii existuje alespoň jeden výjimečný směr, který s bodem* (0) *určuje tečnu k trajektorii.*


k = 2
1/|λ|
k = 3
1/√|2λ|
k = 4
1/∛|3λ|
k = 5
1/∜|4λ|
k = −1
√|2λ|
k = −2
∛|3λ|
orientace trajektorie
vyjímečný směr

Obr. 4.

Důkaz: Počátek je kritickým bodem rovnice (3). Trajektorie může „procházet" počátkem pouze pro $|t| \to \infty$ [4]). Uvažujme soustavu kružnic $z_n = r_n \, e^{j\tau}$ takovou, že $\{r_n\} \to$ $\to 0$ a $\left\{\left|\frac{r_n^{k-1} t_n}{\alpha}\right|\right\} \to 1$, kde $z(t_n)$ jsou průsečíky pevné trajektorie s příslušnou kružnicí.

Trajektorie diferenciální rovnice vyhovují rovnici $\frac{\alpha \, . \, \varphi(z)}{z^{k-1}} = t + C$, kde $\varphi(z)$ je funkce regulární v D, $\varphi(0) = 1$. Pro průsečíky s kružnicemi $z_n = r_n \, e^{j\tau}$ musí být $\frac{\alpha \, . \, \varphi(r_n \, e^{j\tau})}{r_n^{k-1} \, e^{j(k-1)\tau}} =$ $= t_n + C$ a tedy pro $r_n \to 0$ a $\left|\frac{r_n^{k-1} t_n}{\alpha}\right| \to 1$ jest $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm \, e^{j(k-1)\tau}$, odkud plyne první část vysloveného tvrzení. Druhá část je důsledkem definice výjimečného směru (viz geometrická interpretace definice 4.)[5])[6]).

Jako ilustraci k právě vysloveným větám proveďme rozbor diferenciální rovnice

$$\dot{z} = \alpha z^k \quad k \neq 0, \quad k \neq 1, \tag{11}$$

kde k je číslo celé.

Volíme-li pro jednoduchost $\alpha = 1$ (čehož lze vždy dosáhnout otočením kolem počátku), dostaneme po integraci

$$z^{1-k} = (1 - k)(t + C) \, . \tag{12}$$

Trajektorie diferenciální rovnice (11) musí vyhovovat rovnici (12). Není na újmu obecnosti, volíme-li C ryze imaginární ($C = \lambda \, j$). Zřejmě ke každé hodnotě λ existuje $|k - 1|$ křivek, splňujících rovnici (12). Pro $\lambda = 0$ jsou to přímky (event. polopřímky). Je-li $\lambda \neq 0$ pak na každé trajektorii leží bod, jehož vzdálenost od počátku je největší (pro $k > 1$) resp. nejmenší (pro $k < 0$). Pro $|z|$ totiž platí $|z|^{2(1-k)} = (1 - k)^2(t^2 + \lambda^2)$. $|z|$ dosahuje maxima (resp. minima) pro $t = 0$ a toto maximum (pro $k > 1$) resp. minimum (pro $k < 0$) jest $|z|_m = [|\lambda(1 - k)|]^{\frac{1}{1-k}}$, $\lambda \neq 0$. Průběh trajektorií pro některé hodnoty k je patrný z obr. 4 (šipkou —▷ jsou vyznačeny výjimečné směry).

Děkuji s. O. Hájkovi, asistentu katedry matematiky a d. geometrie fakulty elektrotechnické, za konkrétní pomoc při práci na tomto článku.

Literatura

А. Ф. Андреев, *Rešenije problemy centra i fokusa v odnom slučaje,* Prikl. mat. mech., sv. XVII, 1953, str. 333.

Н. П. Еругин, *Zamečanije ob intĕgrirovaniji sistĕmy dvuch uravnĕnij v konĕčnom vidĕ,* tamtéž, sv. XIV, 1950, str. 215.

Н. М. Матвеев, *Metody intĕgrirovanija obyknovennych differencialnych uravnĕnij,* Izd. len. un., Leningrad 1955.

В. В. Немыцкий — В. В. Степанов, *Kačestvennaja tĕorija differencialnych uravnĕnij,* GITTL, M-L 1949.

И. И. Привалов, *Vvedĕnije v tĕoriju funkcij komplexnogo peremennogo,* GITTL M-L 1954.

Н. А. Сахарников, *Rešenije problemy centra i fokusa v odnom slučaje,* Prikl. mat. mech., sv. XIV, 1950, str. 651.

O. Vejvoda, *O stabilitĕ integrálů soustavy dif. rovnic v komplexním oboru* (autoreferát), Čas. pro pěst. mat., roč. 21 (1956), č. 3.

---

[4]) Tamtéž, str. 31.

[5]) Singulární bod diferenciální rovnice s vlastnostmi, popsanými větou 5, se obvykle nazývá sedlovým bodem. Singulární bod s vlastnostmi, popsanými větou 6, se obvykle nazývá uzlem.

[6]) Jak ukázal s. O. Hájek, lze větu 5 dokázat i bez předpokladu o residuu. Tvrzení předchozích vět zůstává tedy v platnosti i pro meromorfní funkce.