Ján Černý

Aplikovaná matematika a doprava

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 6, 316--323

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138422

svůj pietní projev nad katafalkem ve fyzikálním ústavu zakončit slovy: „Takoví lidé jako profesor Kučera by neměli umírat".

Neuvedl jsem podrobnější informace o Kučerově vědecké činnosti a odkazuji čtenáře na tyto prameny: F. ZÁVIŠKA: *Prof. Dr Bohumil Kučera*, Čas. mat. a fyz., *51* (1922) 240–247; V. NOVÁK: *Paměti a vzpomínky*, str. 105–108, Brno 1939; M. BOČEK: *Prof. Dr Bohumil Kučera*, Pokr. mat., fyz. a astronomie, *II* (1957) 429–437.

Aplikovaná matematika a doprava

Ján Černý, Žilina

Matematika a doprava majú veľa spoločného (hoci i veľa protikladného).

Spoločné majú to, že spôsobujú bežným smrteľníkom mnoho starostí, ale bez nich sa moderná spoločnosť nemôže obísť. Aj ich vzájomná väzba sa neustále posilňuje a jedným z cieľov tohto príspevku je ukázať, čo prinášajú jedna druhej. Pritom treba zdôrazniť, že prínos je obojstranný. Matematika prináša doprave exaktné riešenie rôznych zložitých problémov, doprava zas stimuluje matematikov k formulovaniu úloh, ktoré sú prínosom pri rozvoji samej matematiky. Dobrou ilustráciou je nasledujúci príklad.

1. Žilinský problém

Táto úloha, vlastne skupina príbuzných úloh, vznikla na Vysokej škole dopravnej a Výskumnom ústave dopravnom v Žiline, a preto jej bratislavskí matematici dali spomínaný názov. Stretávame sa s ňou tam, kde súčasne prebieha viac periodických dejov, ktoré v niektorom zmysle navzájom súvisia.

1.1 Príklad.

Majme zoraďovaciu stanicu, v ktorej je s smerových koľají, kde sa zhromažďuje záťaž a tvoria vlaky pre s rôznych smerov. Pritom predpokladáme, že utvorené vlaky odchádzajú priamo zo smerových koľají, a to do prvého smeru m_1 vlakov za 24 hodin, do druhého $m_2, \dots$ až do s-tého m_s vlakov za 24 hodín. Treba určiť časy $t_{ij}(i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, m_i)$ okamžikov ukončenia zhromažďovania záťaže j-tého vlaku na i-tej koľaji, a to tak, aby

(i) odlivy z každej koľaje boli čo najpravidelnejšie, t.j. buď aby presne platilo

$$t_{ij+1} - t_{ij} = \frac{24}{m_i} \text{ hod} \left(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, m_i - 1\right),$$

alebo aby aspoň tento rozdiel bol požadovanej hodnote čo najbliššie a aby

(ii) dva najbližšie po sebe idúce okamžiky ukončenia zhromažďovania záťaže na rôznych koľajách boli čo najďalej od seba, t.j.

$$\min_{i \neq i} \left\{ \left|t_{ij} - t_{ij}\right|, \left|t_{ij} + 24 - t_{ij}\right| \right\} = 24 / \sum_{i=1}^{s} m_i ,$$

alebo aby toto minimum bolo udanej hodnote čo najbližšie.

Všetky rovnosti z (i) aj (ii) môžu platiť súčasne len v niektorých špeciálnych prípadoch. Vo všeobecnosti žiadame buď splnenie (i) a čo najlepšiu aproximáciu (ii), alebo naopak, prípadne nežiadame splnenie ani jednej rovnosti, ale žiadame čo najlepšiu aproximáciu všetkých. Mieru aproximácie si stanovujeme podľa potreby, niektoré príklady si uvedieme neskôr.

1.2 Príklad.

Majme s tratí mestskej dopravy, ktoré všetky prechádzajú hlavnou ulicou mesta a na jej konci buď končia, alebo sa vetvia do rôznych smerov. Na i-tej trati predpokladáme, že premáva spolu n_i vozidiel a obrat jedného vozidla trvá T_i minút (T_i prirodzené číslo). Predpokladajme, že v dopravnej špičke je cestujúcimi silne zaťažený len jeden smer prechodu dopravných prostriedkov hlavnou ulicou a treba ich v tomto smere čo najlepšie využiť. Nech $T = [T_1, \ldots, T_s]$ (t.j. číslo T je najmenší spoločný násobok čísel $T_i, \ldots, T_s$). Označme

$$\overline{m}_i = \frac{T}{T_i}; \qquad m_i = \overline{m}_i \,.\, n_i \,.$$

Cestovný poriadok týchto tratí sa bude zrejme periodicky opakovať s periodou T.

Uvádzame časový interval $\langle 0; T)$ a zvolíme pre každé $i = 1, \ldots, s$ a každé $j = 1, \ldots, n_i$ čas $t_{ij1} \in \langle 0; T_i)$ odchodu j-tého vozidla i-tej trate z vybranej zastávky na spoločnom úseku v uvažovanom „vyťaženom" smere. Bude to prvý odchod tohto vozidla v intervale $\langle 0; T)$. Ďalšie budú

$$\text{(iii)} \begin{cases} t_{ij2} = t_{ij1} + T_i \\ \quad \vdots \\ t_{ij\overline{m}_i} = t_{ij1} + (\overline{m}_i - 1)\, T_i \,. \end{cases}$$

Čísla $t_{ijk}(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i; k = 1, \ldots, \overline{m}_i)$ treba určiť tak, aby okrem (iii) (i') odchody vozidiel každej trate boli čo najpravidelnejšie, t.j. buď aby presne platilo

$$t_{i,j+1,1} - t_{i,j,1} = \frac{T_i}{n_i} = \frac{T}{m_i},$$

alebo aby tento rozdiel bol požadovanej hodnote čo najbližšie (táto požiadavka vlastne žiada, aby cestujúci, ktorí sú odkázaní použiť iba i-tu trať, boli odvážaní rovnomerne);

(ii') odchody vozidiel na spoločnom úseku, bez ohľadu na trať boli tiež čo najpravidelnejšie, t.j. buď aby presne platilo

$$\min_{i \neq \bar{i}} \left\{ |t_{ijk} - t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}|, |t_{ijk} + T - t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}| \right\} = T/\sum_{i=1}^{s} m_i,$$

alebo aby minimum bolo udanej hodnote čo najbližie (táto požiadavka žiada, aby cestujúci, ktorí cestujú len na spoločnom úseku a môžu teda použiť ktorúkoľvek trať, boli tiež rovnomerne odvážaní).

1.3 Matematická formulácia úlohy

Pretože okamžiky t_{ij} v prvom a t_{ijk} v druhom príklade sa periodicky opakujú s istou periódou T (v prvom prípade kladieme $T = 24$ hod $= 1\,440$ min), môžeme ich s výhodou zobraziť na kružnici $\varkappa$ s dĺžkou (obvodom) T, t.j. polomerom $T/2\pi$. Pritom v prvom prípade body $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{im_i}$ a v druhom prípade body $t_{i11}, t_{i21}, \ldots, t_{in_i1}, \ldots, t_{i1\bar{m}_i}, \ldots, \ldots, t_{in_i\bar{m}_i}$ tvoria m_i-uholník, vpísaný do $\varkappa$.

Podmienka (i), resp. (i') žiada, aby to bol pravidelný mnohouholník alebo blízky k nemu. Ak označíme $m = \sum_{i=1}^{s} m_i$, podmienka (ii), resp. (ii') žiada, aby vrcholy všetkých s mnohouholníkov vytvorili pravidelný m-uholník alebo blízky k nemu.

V prípade, že budeme chcieť, aby sa podmienka (i) splnila presne a (ii) čo najlepšie prichádzame k tejto úlohe: Základná úloha. Daná je kružnica $\varkappa \equiv (S, T/2\pi)$ a prirodzené čísla $m_1, \ldots, m_s$. Do $\varkappa$ treba vpísať

$$\begin{gathered}\text{pravidelný } m_1\text{-uholník } \{A_{11}, \ldots, A_{1m_1}\} = \mathscr{A}_1 \\ \vdots \\ \text{pravidelný } m_s\text{-uholník } \{A_{s1}, \ldots, A_{sm_s}\} = \mathscr{A}_s\end{gathered}$$

tak, aby číslo

$$d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) = \min_{i \neq \bar{i}} \widehat{A_{ij}A_{\bar{i}\bar{j}}}$$

bolo maximálne.

Pre číslo $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s)$ platia niektoré ohraničenia:

I. Ak $\mathscr{A}_1$ je pravidelný m_1-uholník na $\varkappa$ a $\mathscr{A}_2$ pravidelný m_2-uholník na $\varkappa_2$, tak

$$d(\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2) \leqq \frac{T}{2[m_1, m_2]},$$

pričom pre každé m_1, m_2 a $\mathscr{A}_1$ existuje také $\mathscr{A}_2$, že platí rovnosť.

II. Ak $m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_s$ a $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ sú pravidelný m_1-uholník, m_2-uholník atď. na $\varkappa$, tak vždy platí pravá z nasledujúcich nerovností a existujú $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ že platí ľavá:

$$\frac{T}{s[m_1, \ldots, m_s]} \leqq d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leqq \min\left(\frac{T}{2[m_1, m_2]} \cdot \frac{T}{m}\right).$$

Dôkaz tvrdenia I.:

Ak $\delta = (m_1, m_2)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel m_1 a m_2, môžeme písať $m_1 = n_1\delta$, $m_2 = n_2\delta$, pričom n_1, n_2 sú už nesúdeliteľné a platí $n = n_1 n_2 \delta$. Je známe, že existujú celé čísla q, r také, že $qn_1 + rn_2 = 1$, a teda

$$qm_1 + rm_2 = \delta \,. \tag{1}$$

Číslo $n = [m_1, m_2]$ je zrejme najmenšie číslo s tou vlastnosťou, že ak rozdelíme kružnicu $\varkappa$ na n rovnakých dielov, možno aj pravidelný m_1-uholník, aj pravidelný m_2-uholník vpísať do kružnice tak, že ich vrcholy budú len deliacimi bodmi kružnice.

Ak $\mathscr{A}_1 = \{A_{11}, \ldots, A_{1m_1}\}$ a $\mathscr{A}_2 = \{A_{21}, \ldots, A_{2m_2}\}$ sú množiny vrcholov takýchto mnohouholníkov a pritom $A_{11} \equiv A_{21}$, tak, pretože $\widehat{A_{11}A_{12}}$ je práve n_2 a $\widehat{A_{21}A_{22}}$ práve n_1 dielov, z (1) vyplýva, že existujú A_{1i}, A_{2j}, $A_{1i'}$, $A_{2j'}$, také, že

$$\widehat{A_{1i}A_{2j}} = \widehat{A_{2j'}A_{1i'}} = 1 \text{ dielok} = T/[n_1, n_2]\,.$$

Ak ponecháme $\mathscr{A}_1$ pevný a začneme otáčať $\mathscr{A}_2$ okolo stredu S kružnice $\varkappa$, v kladnom smere budú sa body A_{11} a A_{21} vzdiaľovať, a body $A_{2j'}$, $A_{1i'}$ približovať. Po otočení o $1/2$ dielika bude

$$\widehat{A_{11}A_{21}} = \widehat{A_{2j'}A_{1i'}} = \frac{T}{2[n_1 n_2]}\,.$$

Je teda zrejmé, že $d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ nemôže nikdy prekročiť hodnotu $T/2[n_1, n_2]$.

Dôkaz tvrdenia II. nebudeme podrobne popisovať. Jeho pravá strana je temer zrejmá a ľavá sa dostane ak najprv položíme $A_{11} \equiv A_{21} \equiv \ldots \equiv A_{s1}$ a potom $\mathscr{A}_1$ ponecháme, $\mathscr{A}_2$ otočíme o $T/s[m_1, \ldots, m_s]$, $\mathscr{A}_3$ o $2T/s[m_1, \ldots, m_s]$atď.

1.4 Problém algoritmu

Pre $s \geqq 3$ je otázka algoritmu zložitá; jej zložitosť prudko rastie s rastúcim s.

Jeden možný prístup k riešeniu úlohy je rozdeliť si ho na dva kroky:

1. topologický – určiť poradie vrcholov jednotlivých n-uholníkov na kružnici $\varkappa$;
2. metrický – pri zachování stanoveného poradia určiť presnú polohu vrcholov.

Zatiaľ nie je známy iný spôsob pre vykonanie 1. kroku, ako prebratie všetkých variantov.

Počet všetkých variantov pre dané $m_1, \ldots, m_s$ však nie je známy, a preto ťažko odhadnúť zložitosť takého algoritmu.

Ukážeme si preto istý algoritmus, ktorým sa síce nerieši základná úloha, pretože sa nemusí dosiahnúť maximálne $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n)$, ale jednak sa ním dosahujú dobré výsledky, jednak ukazuje prekvapujúci súvis základnej úlohy s troma ďalšími úlohami, z ktorých každá patrí do inej matematickej disciplíny.

Najprv si definujme dôležitý pojem:

Nech $\mathscr{A}$ je daný pravidelný n-uholník a nech $\{\mathscr{A}_i;\ i = 1, \ldots, r\}$ sú pravidelný m_1-uholník, m_2-uholník, atď. Potom hovoríme, že

1. $\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_r\}$ je δ-sústava vzhľadom na $\mathscr{A}$, ak

   1a) každý vrchol každého $\mathscr{A}_i$ je súčasne vrcholom $\mathscr{A}$

   1b) žiadne dva vrcholy dvoch rôznych $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_i$ nie sú totožné.

2. $\{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_r\}$ je π-sústava vzhľadom na $\mathscr{A}$, ak je δ-sústava a každý vrchol $\mathscr{A}$ je vrcholom niektorého A_i.

Spomínaný algoritmus (či skôr pseudoalgoritmus) vychádza z čísel $m_1, \ldots, m_s$ a má tieto kroky:

1° Položme $h = 1$, $\mathscr{M} = \{m_1, \ldots, m_s\}$. Nájdime číslo $n = [m_1, \ldots, m_s\}$.

2° Vyberieme z množiny $\mathscr{M}$ podmnožinu $\mathscr{N} = \{m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}\}$ takú, že existujú m_{i_1}-uholník $\mathscr{A}_{21}$, m_{i_2}-uholník $\mathscr{A}_{22}$, atď., také, že $\{\mathscr{A}_{21}, \ldots, \mathscr{A}_{2r}\}$ je π-sústava. Ak taká existuje, definujme $A_h = \{\mathscr{A}_{21}, \ldots, \mathscr{A}_{2h}\}$, nahradíme $h + 1 \to h$, $\mathscr{M} - \mathscr{N} \to \mathscr{M}$ a vráťme sa na začiatok 2°. Ak neexistuje prejdime ku kroku 3°.

3° Vyberme z množiny $\mathscr{M}$ množinu $\mathscr{N} = \{m_{i_1}, \ldots, m_{i_r}\}$ takú, že existujú m_{i_1}-uholník $\mathscr{A}_{21}$, m_{i_2}-uholník $\mathscr{A}_{22}$, atď, také, že $\{\mathscr{A}_{21}, \ldots, \mathscr{A}_{22}\}$ je δ-sústava (pokiaľ možno s čo najväčším počtom vrcholov). Ak existuje taká $\mathscr{N} \neq \emptyset$ definujme $A_h = \{\mathscr{A}_{21}, \ldots, A_{rh}\}$, nahradíme $\mathscr{M} - \mathscr{N} \to \mathscr{M}$, $h + 1 \to h$ a prejdeme znovu ku 4°.

4° Vpíšme do kružnice $\varkappa$ pravidelné n-uhelníky $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_h$ také, aby spolu tvorili pravidelný $h \,.\, n$-uholník. Vyberme v každom $\mathscr{B}_i$ vrcholy π-(resp. δ) sústavy $\mathscr{A}_{i1}, \ldots, A_{ir}$. Mnohouholníky $A_{11}, \ldots, \mathscr{A}_{1r_1}, \ldots, \mathscr{A}_{h1}, \ldots, \mathscr{A}_{hr_b}$ tvoria hľadanú sústavu a sme hotoví.

Pri použití tohto algoritmu dostaneme $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \geqq T/hn$.

Podstatnú úlohu v našom postupe hrá vyhľadanie π-sústav pravidelných mnohouholníkov. Táto úloha má súvis s troma dosť navzájom odlišnými matematickými disciplínami, a to s teóriou čísel, teóriou grafov a teóriou informácie.

a) Súvis s teóriou čísel. Za upozornenie naň je autor vďačný Š. Známovi. Spočíva v tom, že ak kružnicu $\varkappa$, rozdelenú na n dielov, necháme odvaľovať sa po číselnej priamke, pri vhodnej voľbe počiatku a merítka budú body kružnice $\varkappa$ prechádzať celočíselnými bodmi priamky, vrcholy pravidleného m_i-uholníka na $\varkappa$ definujú na priamke aritmetickú postupnosť s diferenciou n/m_i, π-sústava potom definuje presne pokrývajúcu sústavu aritmetických postupnosti a δ-sústava čiastočne pokrývajúca sústavu.

b) Súvis s teóriou grafov. Uvážme všetky orientované stromy, ktoré majú tieto vlastnosti:

– jediný koreň (prameň),
– všetky vrcholy rovnako vzdialené od koreňa majú rovnaký stupeň,
– všetky hrany smerujú od bodu bližšieho koreňu do vzdialenejšieho,
– existuje číslo h také, že o vzdialenosti h od koreňa je práve n (koncových) vrcholov stupňa 1.

Množinu takýchto stromov označme $\mathscr{S}$.

Záverovou množinou W stromu $S \in \mathscr{S}$ voláme množinu takých vrcholov, že do každého koncového vrcholu vedie orientovaná cesta práve z jedného vrcholu $w \in W$.

Je zrejmé, že každej dvojici S, W možno jednozančne priradiť π-sústavu pre n-uholník, kde n je počet koncových vrcholov stromu S, a to tak, že vrcholu $w \in W$ odpovedá m_w-uholník, kde m_w je počet koncových vrcholov, dosiahnuteľných z W.

c) Súvis s teóriou kódovania. Záverové množiny W stromov z predchádzajúceho odseku, kde koreň má stupeň r a zvyšné vrcholy okrem koncových majú stupeň $r + 1$, sú jedno-jednoznačne zobraziteľné (až na evidentnú ekvivalenciu) na r-adické kódy s prefixovou vlastnosťou (t.j. také, že žiadne kódové slovo nezačína iným kódovým slovom).

2. Niektoré ďalšie netradičné aplikácie

Význam aplikácie matematiky v doprave a spojoch je všeobecne známy a uznávaný. U nás i v niektorých iných štátoch vychovávajú vysoké školy dopravné odborníkov typu „inžiniersko-matematického", ktorí by mali byť hlavnými nositeľmi uplatnenia matematiky v doprave. Čo ich bude čakať? Nielen známe úlohy typu „dopravný problém", alebo dimenzovanie počtu opravárov metódami teórie hromadnej obsluhy. Budú sa musieť potýkať aj s úlohami netradičnými, na ktoré nie je vopred v známej škatuľke prichystaná známa metóda. Uvedieme si niektoré príklady takýchto „netradičných" problémov, ktoré sa objavili v nedávnej minulosti.

2.1 Úloha prideľovania vysielacích TV kanálov

Prvý televízny program by mal pokryť celé územie nášho dosť hornatého štátu, a to sa dá dosiahnúť len tak, že sa sieť základných a vykrývacích vysielačov doplní stovkami tzv. prevádzačov lokálného významu. Každý z nich má mať pridelený svoj vysielací kanál, a to tak, aby žiadne dva vysielače, ktorých signál možno prijímať na tom istom (obývanom) mieste, nemali rovnaký vysielací kanál.

Splniť túto úlohu s disponibilnými 11 kanálmi nie je ľahké.

Z matematického hľadiska je to však prekvapujúco úloha o vyfarbení vrcholov grafu tak, aby žiadne dva susedné vrcholy nemali rovnakú farbu. Efektívny algoritmus na riešenie tejto úlohy však nepoznáme.

2.2 Úloha o riadení posunu v rozsiahlých železničných staniciach

Riadiť posun vo veľkej stanici znamená určiť kedy a kade sa vozňové skupiny presunú z miesta, kde sú, na miesto určenia. Aby sa takéto úlohy dali riešiť, vznikla približne pred dvoma rokmi u nás nová časť teórie grafov, ktorá sa zaoberá tzv. „polarizovanými grafmi", t.j. grafmi, ktorých vrcholy majú dva póly a žiadna cesta, ktorá do vrchola vchádza jedným pólom, nemôže ním hneď aj výjsť bez toho, že by najprv prešla za druhý pól. To zodpovedá železničnej výhybke, na ktorej nemôže v smere hrotu (jazyka) prejsť koľajové vozidlo z jednej vetvy na druhú bez toho, že by prešlo za hrot. Pri riadení posunu ide o problém hľadania ciest na polarizovaných grafoch.

2.3 Kritérium pre ukončenie zhromažďovania záťaže

V 1. časti sme uvažovali problém návrhu pevného grafikónu pre prácu zoraďovacej stanice. Iná možnosť je však grafikón voľný, pri ktorom sa o ukončení zhromažďovania vlaku na smerovej koľaji rozhoduje podľa toho,

1. či sú k dispozícii potrebné náležitosti (rušeň, čata a pod. — ak ich niet, s vlakom i tak nemožno odísť),

2. či sa nedosiahla maximálna dovolená záťaž m; ak áno, s vlakom treba odísť pri najbližšej príležitosti;

3. či predpovedaný príliv záťaže je dostatočný na to, aby sa ešte oplatilo vlak zdržiavať v stanici.

Matematicky zaujímavé je rozhodovanie sa na základe 3. podmienky. Ak označíme $x(t)$ stav záťaže na smerovej koľaji v čase t (do budúcnosti podľa predpovede), boli by náklady na odvezenie tejto záťaže pri ukončení zhromažďovania v čase t v tvare $ax(t) + b$, teda na 1 tonu $a + b/x(t)$. Ak by sme naopak zhromažďovali ešte o čas Δt dlhšie, boli by náklady na odvezenie vlaku po čase $t + \Delta t$ spolu so stratami za prestoj v tvare $(0 < \Theta < 1)$ $ax(t + \Delta t) + b + cx(t + \Theta\,\Delta t)\,\Delta t + d\Delta t$, t.j. na 1 tonu $a + b/x(t + \Delta t) + cx(x + \Theta\Delta t)\,\Delta t/x(t + \Delta t) + d\Delta t/x(t + \Delta t)$. Krivka $y = x(t)$, pre ktorú sa tieto náklady pre čas t a $t + \Delta t$ rovnajú, musí splňovať rovnosť

$$\frac{b}{x(t)} = \frac{b}{x(t + \Delta t)} + c\,\Delta t\,\frac{x(t + \Theta\,\Delta t)}{x(t + \Delta t)} + \frac{d\,\Delta t}{x(t + \Delta t)},$$

čo vedie na diferenciálnu rovnicu so separovateľnými premennými

$$x'(t) = \frac{c}{b}\,x^2(t) + \frac{d}{b}\,x(t) = \alpha x^2(t) + \beta x(t)$$

pri počiatočnej podmienke $x(0) = x_0$ (čas môžeme počítať od chvíle, kedy sa musíme rozhodnúť).
Jej riešením je funkcia:

$$\bar{x}(t) = \frac{\beta x_0\, e^{\beta t}}{[\beta + \alpha x_0(1 - e^{\beta t})]},$$

ktorej graf je blízky exponenciále. Nás zaujíma len v oblasti $I = \langle 0; \bar{x}^{-1}(m)\rangle$, kde m je maximálna prípustná záťaž, pretože pri $x(t) = m$ treba zhromažďovanie ukončiť ihneď.

Rozhodovanie potom prebieha takto: Ak je momentálne na koľaji záťaž x_0 a jej predpoveď pre $t \in I$ je $x(t)$, pričom $x(t) \leqq \bar{x}(t)$ na celom I, treba zhromažďovanie ukončiť (pretože príliv záťaže bude primalý na to, aby „zaplatil" prestoje). Ak existujú $t \in I$ také, že $x(t) > \bar{x}(t)$, treba vyčkať.

2.4 Uloha o zvyšku záťaže na smerovej koľaji pri pravidelnom grafikóne

V ustálenom stave je veľkost zvyšku náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti g; príliv záťaže za obdobie medzi dvoma odlivmi je náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti f; ak m je maximálna príspustná záťaž vlaku, dostaneme funkciu g ako riešenie tejto zaujímavej integrálnej rovnice

$$g(u) = f(u) \int_0^m g(v)\, dv + \int_m^{u+m} f(u + m - t)\, g(t)\, dt .$$

3. Mýty a skutočnosť

Skúsenosti s prácou aplikovaných matematikov v doprave a spojoch, z ktorej drobné paberky sme si uviedli, privádzajú nás k mnohým vážnym otázkam o aplikovanej matematike vôbec, o jej postavení v našom matematickom živote, o jej možnostiach získať pre matematiku väčšie spoločenské uznanie, o školskej príprave kádrov pre aplikácie, ako i o ich ďalšom vedeckom raste a pod. To sa však už v zásade všetko povedalo v pozoruhodných článkoch D. W. Licka a S. L. Soboleva v Pokrokoch č. 1 r. 1974. Obmedzíme sa preto len na niektoré mýty, zakorenené v našej obci matematickej, na ktoré tieto skúsenosti vrhajú trochu iné svetlo.

3.1 „Iné odbory (napr. doprava) nás pre svoj rozvoj potrebujú, my ich nie."

Utešovať sa takto síce môžeme, ale sú dobré predpoklady na to, aby sa situácia celkom obrátila. Dopraváci, ekonómovia a iní, vidiac náš nezáujem, si vychovávajú vlastných odborníkov so silnou matematickou prípravou a dopyt po matematikoch (napr.v inzerátoch) na škodu ich aj našu klesá. Na druhej strane hneď spomínané dva odbory stimulovali rozvoj niekoľkých matematických disciplín, ba i vznik nových.

3.2 „Práca v aplikáciách je otrava a vedecké hodnosti sa ňou aj tak získať nedajú."

Tu je (žiaľ) pravdivá len druhá časť mýtu. K prvej snáď niečo povedali i prv uvedené príklady.

3.3 „Aplikovaní matematici v doprave vystačia s lineárnym programovaním a dopravnými sieťami."

3.4 „Farebný problém teórie grafov je neaplikovateľná hračka."

3.5 „Teória čísel je aplikovaným matematikom nanič."

Tri posledné mýty snáď môžeme ponechať bez komentára.

Záverom snáď len toľko: Hádam by neškodilo prestať deliť matematickú činnosť na čistú a nečistú (opravujeme aplikovanú), ale všímať si hodnotu jej výsledkov bez ohľadu na to, v ktorej oblasti vedy nájdu tieto výsledky hlavné uplatnenie.