Jaroslav Peregrin

Co je to elementární logika?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 1, 45--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138476

[8] HÁJEK, P.: *Fuzzy logic from the logical point of view.* In *SOFSEM'95: Theory and Practice of Informatics; Lecture Notes in Computer Science 1012* (Milovy, Czech Republic, 1995), M. Bartošek, J. Staudek, and J. Wiedermann, Eds., Springer-Verlag, pp. 31–49.

[9] HÁJEK, P.: *Metamathematics of fuzzy logic.* Vyjde v nakladatelství Kluwer.

[10] KEISLER, H. J.: *Logic with the quantifier „there are uncountably many".* Annals of Math. Logic *1* (1970), 1–93.

[11] KEISLER, H. J.: *Probability quantifiers.* In: (Barwise and Feferman, ed.) Model-theoretic logics, Springer-Verlag 1985, 579–596.

[12] KRYNICKI, M., MOSTOWSKI, M., SZCZERBA, L. W.: *Quantifiers: logic, models, computation.* Vol. I. Kluwer 1995.

[13] MONK, D.: *Mathematical logic.* Springer-Verlag 1976.

Co je to elementární logika?

Jaroslav Peregrin

Ve svém článku *Je elementární logika totéž co predikátová logika prvního řádu?* (Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *42*, 1997, 127–133) klade Jiří Fiala nesmírně zajímavou otázku, zda je opodstatněné ztotožňovat elementární logiku s predikátovou logikou prvního řádu; s pomocí argumentů propagovaných již delší dobu finským logikem a filosofem Jaako Hintikkou (viz již jeho *Logic, Language-Games and Information*, Clarendon Press, Oxford, 1973; nejnověji jeho *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996) naznačuje, že by tomu tak být nemuselo. Myslím, že uváděná argumentace stojí za bližší rozbor.

Hintikka v podstatě říká: Kvantifikované formule predikátové logiky jsou svou podstatou o vybírání prvků z univerza; například $\forall x\, \exists y\, R(x,y)$ neříká nic jiného než to, že ke každému x můžeme vybrat y, které je k němu ve vztahu R. Obecněji říká Hintikka to, že každá formule je vlastně zápisem určité hry (ve smyslu matematické teorie her), jejíž některé tahy spočívají ve vybírání individuí. Na základě tohoto se pak ptá: je nějaký rozumný důvod, proč se omezovat jenom na hry toho typu, které jsou vyjádřitelné formulemi standardního predikátového počtu? Proč připouštět jen hry s úplnou informací (tj. ty, při kterých jsou při každém tahu k dispozici všechny tahy předchozí), proč vylučovat hry jiné; tudíž proč připouštět jen lineárně uspořádané kvantifikátory a nepřipustit i kvantifikátory uspořádané třeba jen částečně?

Doc. RNDr. JAROSLAV PEREGRIN, CSc. (1957), Filosofický ústav AV ČR, Jilská 1, 110 00 Praha 1.

Hintikkova argumentace je příkladem argumentace typu *formule logiky prvního řádu jsou ve skutečnosti o tom a o tom, tudíž...* Uveďme pro ilustraci jiný nedávný příklad stejného argumentačního schématu, který pochází od Johana van Benthema (*Exploring Logical Dynamics*, CSLI, Stanford, 1997). Ten říká: Kvantifikátory jsou v podstatě modality, kvantifikované formule jsou tedy formule modální a jsou tudíž o existenci nějakých alternativ: formule $\forall x\, P(x)$ říká, že $P(x)$ je nutné, neboli že $P(x)$ platí v každém „dosažitelném možném stavu věcí“, zatímco formule $\exists x\, P(x)$ říká, že $P(x)$ je možné, neboli že platí alespoň v jednom takovém stavu věcí. Přitom $\forall x$ a $\exists x$ jsou modalitami typu S5, tj. modalitami nejsilnějšími možnými. Je-li tomu ale tak, existuje nějaký rozumný důvod, abychom se omezovali na tyto modality a nepřipustili i jiné, slabší modality? Proč připouštět jenom modality typu S5, a ne třeba modality typu S4?

Schéma argumentací tohoto typu je je tedy následující: Jsou-li formule predikátového počtu o tom a o tom, pak není důvod, aby byl predikátový počet (elementární logika, chceme-li) vymezován tak, jak je. (Přitom je důležité si všimnout, že van Benthemův návrh „překolíkování“ hranice elementární logiky vede k *jiné* nové hranici než ten Hintikkův.) Pro posouzení závažnosti těchto argumentací je proto třeba se zamyslet nad tím, o čem formule predikátového počtu *skutečně* jsou.

Do jisté míry je na to ovšem možné mít různé názory; avšak cosi podstatného je jistě vydedukovatelné z úmyslů těch, kteří jsou za predikátový počet odpovědní. A mně se na rozdíl od kolegy Fialy zdá, že z prací Gottloba Frega, o kterých ve svém článku hovoří, vyplývá cosi v tomto smyslu podstatného: totiž to, že logika vlastně není o tom či onom, že je zhmotněním základních argumentačních struktur, tak jak jsou vtěleny v našem jazyce. To znamená, že formule elementární logiky *de facto* nejsou *o ničem* (rozuměj: o ničem *specifickém*); a právě proto může být tato logika základem *všeho*. Je totiž, jak se říká anglicky, *topic-neutral*, tj. neutrální k předmětu řeči. Kanonizuje ty struktury našeho jazyka a naší argumentace, které jsou společné veškerým formám našeho (argumentativního) diskurzu a v tomto smyslu tedy předcházejí každé „o něčem“.

Jiným důsledkem tohoto názoru je přímočaré vysvětlení toho, proč by měly být kvantifikátory lineárně uspořádány: protože lineárně uspořádány jsou věty našeho jazyka, který je primárním médiem naší argumentace, i naše myšlenky, které jsou (podle Frega) primárně sémantickými koreláty těchto vět. Něco takového jako „nezávislost“ v přirozeném jazyce ovšem jistě vyjádřit můžeme, ale jedině pomocí slova „nezávisle“ či podobných výrazových prostředků, které patří do relativně vyšších „pater“ našeho jazyka a jistě ne k jeho nejzákladnějším strukturám.

K tomu je ovšem třeba zdůraznit, že *vyjádřitelné v logice 1. řádu* může znamenat dvě různé věci: zaprvé to může znamenat *vyjádřitelné v této logice samotné*, tj. vyjádřitelné v podobě formule logiky 1. řádu vyplývající z axiomů této logiky; nebo, zadruhé, to může znamenat, *vyjádřitelné v nějaké teorii 1. řádu*, tj. vyjádřitelné jako formule nějakého jazyka 1. řádu vyplývající z axiomů této logiky doplněných o nějaké mimologické axiomy. Je rozumné požadovat, aby byla například fakta o funkcích, byť tak elementární, jako je prostota, vyjádřitelná v logice 1. řádu *v tom prvním smyslu*?

Uvědomme si, že v tomto prvním smyslu nejsou v této logice vyjádřitelné ani takové elementární pojmy, jako je *množina* či *číslo* (*teorie množin* a *aritmetika* jsou teorie prvního řádu, každá má ale své mimologické axiomy).

Může se ovšem zdát, že problém je v tom, že pojem *prostého zobrazení* není, na rozdíl od pojmů *množina* a *číslo*, vyjádřitelný v logice 1. řádu ani *v tom druhém smyslu*; že tento pojem vyžaduje větvící se kvantifikátory a tudíž logiku, která překračuje hranice 1. řádu. To ale není pravda: jistě můžeme udělat prvořádovou teorii funkcí (ve které budou funkce prvky univerza, tak jako jsou množiny prvky univerza v teorii množin). Předpokládáme-li například, že by taková teorie obsahovala unární predikáty **F** a **O** a binární funktor **A** (jejichž vlastnosti by byly vhodnými axiomy stanoveny tak, aby tyto konstanty odpovídaly pojmům *funkce*, *objekt* a *výsledek aplikace ... na ...*), mohli bychom predikát **P** odpovídající pojmu *prostá funkce* definovat jednoduše například takto:

$$\mathbf{P}(x) \equiv {}_{\mathrm{Def}}\mathbf{F}(x) \mathbin{\&} \forall y \forall z \left((\mathbf{O}(y) \mathbin{\&} \mathbf{O}(z) \mathbin{\&} (\mathbf{A}(x,y) = \mathbf{A}(x,z))) \to (y = z)\right).$$

To znamená, že predikátový počet 1. řádu je na pojem prosté funkce krátký *jen za předpokladu, že ho bereme za pojem logický, nikoli v případě, když připustíme, že je to pojem mimologický* (tedy matematický).

Zdá se mi tedy, že Hintikkovy a Fialovy pochybnosti o běžně přijímaných hranicích elementární logiky spočívají na předpokladu, že logika prvního řádu je (sama o sobě) o vybírání prvků univerza a potažmo o funkcích. Já se domnívám, že tento předpoklad není opodstatněný; zdá se mi, že je daleko více na místě chápat tuto logiku tak, že sama o sobě není o ničem specifickém, protože právě proto může stát v základě *všeho*, co je o nějakých konkrétních věcech. Jak říká americký logik a filosof Willard Van Orman Quine (*From Stimulus to Science*, Harvard Univerzity Press, Cambridge, Mass., s. 52), „logika nemá na rozdíl od teorie množin žádné objekty, které by mohla nazývat svými vlastními"; a já mám pocit, že právě tohle je to, co ji podstatným způsobem charakterizuje.