

Paul R. Halmos; Edwin E. Moise; G. Piranian
Jak se naučit být učitelem

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 6, 326--336

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138538>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

diskuse

Jak se naučit být učitelem*)

(Panelová diskuse)

I. Jak učit řešit problémy — P. R. Halmos

Nejlepší způsob, jak se učit, je něco dělat; nejhorsí způsob, jak učit druhé, je povídat.

Co se týče toho posledního: všimli jste si někdy, že někteří z nejlepších učitelů na světě jsou nejhorsími přednášejícími? (Mohu to dokázat, ale nerad bych ztratil tolik přátel.) A na druhé straně, všimli jste si někdy, že dobří přednášející nemusí být nutně dobrými učiteli? Dobrá přednáška je obyčejně systematická, úplná, přesná — a nudná; je to špatný nástroj učení. Ovšemže v podání tak legendárních řečníků, jako byli Emil Artin a John von Neumann, mohla být dokonce i přednáška užitečným prostředkem — jejich vnitřní síla a nadšení byly dostatečně pronikavé, aby přiměly posluchače přemýšlet dál a něco dělat — vždyť vše se jevílo tak zábavné. Ale pro většinu obyčejných smrtelníků, pokud ovšem nepřednášejí tak špatně jako to dělal Wiener — ani tak podnětně — a ne zase tak dobře jako Artin — ani tak dramaticky! — pro ty může být přednáška nanejvýš posledním východiskem z nouze.

*) P. R. HALMOŠ, E. E. MOISE, G. PIRANIAN: *The problem of Learning to Teach*. American Mathematical Monthly 82 (1975) No. 5, pp. 466—476.

Copyright © The Mathematical Association of America. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.

Moje kritérium dobrého učitele je velmi jednoduché; je to pragmatické hledisko, které posuzuje výkon podle výsledku. Jestliže školitel aspirantů důsledně vychovává takové žáky, kteří jsou skutečnými matematiky a kteří vykazují vysoce kvalitní původní výsledky, pak je to dobrý učitel.*) Jestliže někdo učí úvod do vyšší matematiky pro nespecialisty a důsledně vychovává takové studenty, kteří si pak aktivně prohlubují své matematické vědomosti v dalším studiu a stávají se matematicky vzdělanými inženýry, biology či ekonomy, je to dobrý učitel. Jestliže učitel „nové matematiky“ (nebo i „staré“) na střední škole důsledně vychovává příští vynikající studenty matematiky nebo technických oborů či dobré účetní nebo kvalifikované techniky a dělníky, je to dobrý učitel.

Student matematiky si z přednášky o matematice stěží odnese více než adept kursu plavání z přednášky o plavání. Nemůžete zvládnout plaveckou techniku tím, že vám někdo poví, kam máte dávat ruce a kam nohy; a nemůžete se naučit řešit problémy tím, že vám někdo poradí, abyste doplnili kvadratický trojčlen na čtverec nebo dosadili sinus místo y .

Může se někdo naučit matematiku četbou knih? Kloním se k názoru, že ne. Četba má proti pouhému naslouchání tu přednost, že je aktivnější — je to velký krok v tom správném směru. Ovšem daleko nejlepší způsob, jak číst matematickou knihu, je přibrat si k ní papír a tužku, pak zaměstnat tužku psaním po papíře a knihu odložit.

Poté co jsem zaujal toto extrémní stanovisko, ihned je zase odvolám. Víím, že je

*) Tento odstavec byl při zachování základního smyslu přizpůsoben našim podmínkám. Pozn. překl.

extrémní a nemyslím to doslovně – ale chtěl jsem velmi důrazně vyjádřit svůj ne-souhlas s názorem, že učit se znamená chodit na přednášky a číst učebnice. Kdybychom měli delší život i větší mozek a tolik zapálených i kvalifikovaných učitelů, že by na jednoho studenta připadal jeden učitel, přidržel bych se zmíněného extrémního názoru – ale takové podmínky nemáme. Knihy a přednášky se dobře neosvědčují při přesazování pravd a dovedností minulosti do krevního oběhu vědců budoucnosti – ale musíme se spokojit s tímto druhým nejlepším způsobem, protože je třeba šetřit čas i peníze. Ale, a to je téma mého dnešního kázání, spoléháme-li se jen na přednášky a knihy, prokazujeme našim žákům a ještě i jejich žákům velmi špatnou službu.

Čím ve skutečnosti matematika doopravdy je, to je řešení konkrétních problémů. Hilbert jednou řekl (ale nevzpomínám si kde), že nejlepší způsob, jak porozumět teorii, je najít a pak studovat typický konkrétní příklad této teorie, základní příklad, na kterém lze předvést všechno, co se vůbec může přihodit. Největší chybou mnoha studentů, dokonce i dobrých je, že ačkoliv jsou schopni odříkávat správná znění vět a pamatovat si i přesné důkazy, neumějí dávat příklady, sestrojovat protipříklady a řešit speciální úlohy. Viděl jsem mnoho studentů, kteří uměli formulovat něco, čemu říkali spektrální věta pro hermiteovské operátory v Hilbertově prostoru, ale neměli ani tušení, jak převést na diagonální tvar reálnou symetrickou matici řádu 3. To je zlé – to je špatný způsob učení se, zaviněný pravděpodobně alespoň zčásti špatným postupem učitele. Profesionální matematikové a příležitostní uživatelé matematiky a také celé spektrum vědeckých pracovníků mezi těmito krajními póly – ti

všichni potřebují řešit problémy a našim úkolem je naučit je to, nebo ještě lépe, naučit jejich příští učitele, jak je to mají naučit.

Rád začínám každou přednášku problémem. Když jsem naposledy učil úvod do teorie množin, první, co jsem udělal, bylo, že jsem definoval algebraická čísla a pak jsem položil otázku: Existují vůbec nějaká čísla, která nejsou algebraická? Když jsem naposledy učil úvod do teorie reálných funkcí, začal jsem přímo otázkou: Existuje neklesající spojitá funkce, která zobrazuje jednotkový interval na jednotkový interval a taková, že její graf má délku 2? V téměř každém kursu můžeme najít malou sbírku takovýchto otázek – otázek, u kterých vystačíme s minimem technických termínů, které jsou dostatečně pozoruhodné, aby vzbudily zájem, které vyžadují netriviální odpovědi a které umožňují do sebe pojmut, prostřednictvím odpovědí, všechny důležité myšlenky předmětu. Právě existenci takových otázek mám na mysli, když říkám, že matematika je ve skutečnosti řešením problémů, a můj důraz na řešení problémů (jako opaku k návštěvování přednášek a čtení knih) je motivován právě tímto.

Známý výrok G. Polyi o řešení problémů je: když neumíte vyřešit problém, potom existuje jednodušší problém, který byste vyřešit uměli – najděte jej! Jestliže dovedete naučit této zásadě své studenty, a to tak, aby jí oni uměli zase naučit zase své studenty, potom jste dokázali vychovat učitele v oboru řešení problémů. Nejtěžším na odpovídání otázek je umět je správně klást; našim úkolem jako učitelů a učitelů učitelů je učit klást otázky. Je snadné naučit inženýra používat kuchařku na diferenciální rovnice; těžké je naučit tohoto inženýra (a jeho učitele), co má dělat, když odpověď není v kuchařce.

V tomto případě je pravděpodobné, že hlavním problémem je zase otázka „jak zní problém?“ Najděte správnou otázku, kterou máte položit a urazili jste velký kus cesty při řešení problému, na kterém pracujete.

V čem je potom tajemství — jaký je nejlepší způsob, jak se naučit řešit problémy? Odpověď je obsažena ve větě, kterou jsem začal: řešte problémy. Metoda, kterou obhajují, je někdy známa jako „Moorova metoda“, protože R. L. Moore ji vypracoval a používal na univerzitě v Texasu. Je to metoda pro učitele, metoda, která má ve studentech vytvořit badatelský přístup k matematice, je to směs Sokratovy moudrosti a nelítostného soutěživého ducha olympijských her.

Způsob, jakým se i špatný přednášející může stát dobrým učitelem, v tom smyslu, že vychovává dobré studenty, je týž způsob, jakým zrno písku může přimět ústřici, aby rodila perly. Uhlazená přednáška a příručka s titulem „Základy algebry pro dívky“ může být příjemná; avšak dobrý učitel přichází s výzvou, vyptává se, znepokojuje, dráždí a udržuje laťku vysoko — to vše není obyčejně příjemné. Dobrý učitel nemusí být populárním učitelem (snad s výjimkou případu, kdy je mezi svými bývalými žáky), protože někteří studenti nemají rádi, když jsou vyzýváni, obtěžováni otázkami, znepokojováni a drážděni — ale produkuje perly (místo, aby je pouze házel ve smyslu známého přísloví).

Nechte mě teď vyprávět, jak jsem učil kurs lineární algebry pro studenty nižších ročníků. První hodinu jsem dal každému studentovi několik listů papíru, na kterých bylo rozmnoženo přesné znění padesáti vět. To je vše — pouze znění vět. Nebyl zde žádný úvod, nebyly tam žádné definice, žádné vysvětlivky a samozřejmě nebyl tam žádný důkaz.

Ve zbytku hodiny jsem řekl studentům něco o Moorově metodě. Řekl jsem jim, aby nečetli nic z lineární algebry (což platí pouze pro tento semestr). A nakonec jsem jim pověděl, že učivo semestru je to, co mají v rukou. Celé učivo se skládá z oněch padesáti vět; až jim budou rozumět, až je budou umět vysvětlit, až je budou umět podepřít nutnými příklady a protipříklady, a ovšem, až je budou umět dokázat, pak splní předepsané požadavky pro zápočet.

Civěli na mne. Nevěřili mi. Mysleli, že jsem pouze líný a snažím se vykroutit ze svých povinností. Byli si jisti, že se tímto způsobem nikdy nic nenaučí.

To vše netrvalo déle než půl hodiny. Zakončil jsem hodinu tím, že jsem jim napsal základní definice, nutné k tomu, aby pochopili asi prvních dvanáct vět, popřál jsem jim na odchodu mnoho úspěchů a zanechal jsem je samotné jen s jejich vlastní nápaditostí.

Další hodinu, a každou následující hodinu, jsem vyvolal Smithe, aby dokázal větu 1, Kovacse, aby dokázal větu 2, atd. Povzbuzoval jsem Kovacse a Herrera a všechny ostatní, aby sledovali Smithe jako ostříži a vrhli se na něj, jakmile by si počínal špatně. Sám jsem poslouchal co nejpozorněji, a aniž bych upadal do sadismu, také jsem si přisadil, kde jsem to pokládal za potřebné. Poukazoval jsem na mezery, trval jsem na tom, že jsem nerozuměl, kladl jsem otázky týkající se druhořadých věcí, žádal jsem o protipříklady a někdy jsem je sám dodal, řekl jsem něco o historii předmětu tam, kde k tomu byla příležitost, a ukázal jsem na souvislosti s jinými oblastmi matematiky. Nakonec jsem většinou potřeboval asi pět minut k zavedení dalších potřebných definic. Celkem jsem mluvil pravděpodobně 20 minut z každé 50minutové akademické hodiny, kdy jsme byli pohromadě.

To je mnoho — ale je to mnohem méně než mluvit 50 (nebo také 55) minut z padesáti.

Působilo to jako kouzlo. Na druhý týden už dokazovali věty a nalézali chyby v důkazech svých kolegů, a očividně jim tato činnost působila potěšení. Někteří z nich byli tak slušní, že za mnou přišli a přiznali se, že byli ze začátku skeptičtí, ale nyní změnili názor. Většina z nich řekla, že našemu kursu věnovali více času než kterémukoliv jinému kursu v tomto semestru a že se z něho naučili více.

To, co jsem právě popsal, je podobné „Moorově metodě“, jak jí používal R. J. Moore, ale je to značně pozměněná Moorova metoda. Jsem si jist, že mohou být navrženy stovky modifikací vyhovující temperamentu různých učitelů a potřebám různých předmětů. Detaily nejsou důležité. Důležité je přimět studenty, aby se ptali a odpovídali.

Mnohokrát, když jsem použil Moorovu metodu, moji kolegové mi oznámili, snad po jednom nebo dvou semestrech, že byli často schopni rozeznat ty studenty ve svých přednáškových skupinách, kteří byli vystaveni Moorově metodě, a to podle přístupu a chování těchto studentů. Jejich výraznou charakteristikou byla větší matematická zralost než u ostatních (badatelský přístup) a větší sklon a schopnost klást pronikavé otázky.

„Badatelský přístup“ je obrovská pomoc pro všechny učitele a studenty i pro tvůrce a uživatele matematiky. Abych ilustroval například, jaká je to pro mne výhoda, když učím úvod do analýzy (v přednáškové skupině, která je příliš velká, než aby se na ni dala uplatnit Moorova metoda), musím se vám především pochlubit svou zázračnou pamětí. Zázračně špatnou, abych byl přesný. Jestliže neučím kalkulus řekněme jeden nebo dva

semestry, zapomenu jej. Zapomenu věty, problémy, formule, postupy. V důsledku toho, když si připravuji přednášku na příští týden, pohlédnu zběžně na předepsaný syllabus, nebo pokud žádný není, na obsah svého textu; nikdy se ale nedívám na samotný text. Potom se postavím téměř na startovní čáru — všechno si sám znovu vybuduji. Takto si užiji více zábavy, než kdybych si byl všechno udržel v paměti; čas od času jsem skutečně překvapen a potěšen nějakým studentským objevem toho, co Leibniz pravděpodobně věděl už jako kluk, a toto moje pobavení, překvapení, potěšení a nadšení cítí se mnou celá třída a každý mladý objevitel to bere jako vyznamenání.

Každý učitel by se měl zabývat výzkumem a měl by v tom mít praxi, aby mohl učit jiné badatelskému přístupu. Neříkám, že by každý, kdo učí trigonometrii, měl strávit polovinu svého času dokazováním nesrozumitelných vět o patologických jevech v teorii kategorií a zúčastnit se známých závodů „publikuj, nebo zhyň“. Říkám jen, že každý, kdo učí, dokonce i když učí jen středoškolskou algebru, by byl lepším učitelem, kdyby přemýšlel o důsledcích, které má jeho předmět mimo tento předmět, kdyby četl o souvislostech svého předmětu s jinými předměty, kdyby se snažil vytvořit úlohy, které takoveto důsledky a souvislosti naznačují — kdyby, jinými slovy, se zabýval výzkumem ve středoškolské algebře a kolem ní. To je jediná cesta, jak si sám v sobě udržet při životě badatelský přístup člověka kladoucího otázky, a tím jej být schopen předávat dalším.

Tento přístup se dá shrnout do těchto několik vět:

Nejllepší způsob, jak se učit, je tvořit — ptát se a tvořit. Nejllepší způsob, jak učit druhé, je přimět studenty, aby se ptali

a tvořili. Nečítejte jim kázání — povzbuďte je k jednání. (Don't preach facts — stimulate acts).

Nejllepší způsob, jak učit učitele, je přimět je, aby se ptali na to a zabývali se tím, co přiměje jejich příští studenty, aby se ptali a aby tvořili.

Mnoho štěstí a mnoho radosti z učení pro nás pro všechny!

II. Jak se naučit být učitelem —

E. E. Moise

Bylo skutečným požátkem vyslechnout přednášku profesora Halmose. Málokdy jsem měl příležitost slyšet tolik myšlenek, s nimiž je nutno souhlasit a které si zaslouží náš potlesk. Skvěle nám objasnil náš základní úkol jako učitelů. A toto objasnění v sobě zahrnuje a nezbytně muselo zahrnout i naprosté odmítnutí naivní empirie a naivního behaviorismu, které se rozšířily jako mor ve světě pedagogiky. *)

Za současného stavu našich znalostí je vyučování uměním. Přinejmenším v matematice, pokud vím, vedly všechny pokusy učinit z něho vědu ještě ke zhoršení situace. Dokonce i když se matematice učí špatně nebo jen průměrně, pokládáme za samozřejmé, že studenti budou mít příležitost reagovat na matematiku různým způsobem a studovat ji na rozličných úrovních podle svého talentu, temperamentu a motivace. Přinejmenším jsme byli zvyklí to za samozřejmé pokládat, dokud různí lidé nenašli způsob, jak nám to zarazit. Obávám se, že vše nakonec může dospět ke karikatuře dobrého matematického

vyučování, kterou lze popsat jako „lineární bezchybné programování“. Ve shodě s tímto schématem, místo aby se zajistilo, že každý student bude muset neustále reagovat na ty nejpodněnější výzvy, vynakládají lidé své nejlepší síly na vytvoření situace, ve které nikdo nebude muset čelit jakékoliv výzvě.

Jisté způsoby používání „modulů“ jsou jen mírnějšími formami této deformace. Některé školy nyní používají schématu, podle kterého jsou kursy rozdrobeny na malé části („moduly“), a pro každý z nich je vypracován standardní test. Když student úspěšně splnil test na jednom modulu, postupuje na další. Přinejmenším v některých školách pravidla předepisují, že studentovo hodnocení na konci roku je závislé na počtu modulů, které úspěšně ukončil. Protože testy jsou takového druhu, že nakonec jimi může projít téměř každý student, plyne odtud mravní poučení, že prvotřídní student je ten, který si dokáže velmi rychle osvojit matematické znalosti třetí kvality. Předpokládám, že každý student podrobený takovému programu má přesto možnost analyzovat matematické ideje do hloubky a strávit spoustu času tím, že by pracoval na obtížných problémech. Ale aby si student takto počínal, musel by se vzepřít pokynům lidí, kteří jsou placeni za to, že mají podporovat intelektuální rozvoj tohoto studenta.

Jedna z potíží s pseudovědeckými „teoretiky učení“ je, že soustřeďují svou pozornost na ty stránky procesu učení, které se dají puntičkářsky sledovat a měřit. Takový postup je neudržitelný, víme toho prostě o procesu učení příliš málo, než abychom mohli cokoliv předpovídat na základě klamné představy, že naše znalosti jsou úplné. Je zajímavé, že existují empirické důkazy mluvící proti platnosti empirické koncepce učení.

*) Autor má na mysli behavioristické základy programového učení, které bylo velmi módním a propagovaným způsobem vyučování ve Spojených státech. (Pozn. překl.)

Začátkem 60. let dr. Lyn Carlsmith (viz Harvard Educational Review, sv. 34 (1964) str. 3–21) vyhledal skupinu 20 studentů – chlapců, jejichž otcové odešli do zámoří v době, kdy jejich synům nebylo více než šest měsíců, a vrátili se domů nejdříve po dvou letech. Potom pečlivě vybral kontrolní skupinu 20 chlapců, kteří ve svém raném dětství měli otce doma. Na obě skupiny pak byl použit test SAT. Test má dvě části, matematickou a slovní. Obvykle je rozdíl $M - V$ bodů získaných za matematický a verbální výkon kladný u chlapců a záporný u dívek. Kontrolní skupina splnila toto očekávání: v 18 případech ze 20 byla hodnota $M - V$ kladná. Ale ve skupině „s nepřítomným otcem“ byl rozdíl $M - V$ kladný jen v 7 případech ze 20. V menší skupině 18 synů lékařů byly výsledky ještě výraznější: v kontrolní skupině byla hodnota $M - V$ kladná v 7 případech z 9, zatímco ve skupině s nepřítomnými otci bylo $M - V$ kladné jen v jednom případě z 9.

Další studium větších vzorků toto vše potvrdilo. Hodnota $M - V$ se patrně ostře zmenšuje, jak se zvětšuje trvání otcovy nepřítomnosti; a nepřítomnost otce po dobu prvních šesti měsíců chlapčova života má významný vliv na výsledek testu SAT ještě po dvaceti letech.

Tyto výsledky je těžké sladit se dvěma dnes rozšířenými názory, totiž, že (1) intelektuální schopnosti, které se zdají být čistě poznávací, skutečně takovými jsou, (2) tyto schopnosti se získávají způsoby, které jsou lehce přístupné pro empirický výzkum. Věřím, že obě tyto představy nejsou ani tak nepřesné jako velmi nevhodné. Zajímalo by mě třeba právě to, co vlastně otcové učí své malé hošíky a jak to vlastně dělají.

Zřejmě tento výzkum ponechal mnohé důležité otázky bez odpovědi. Například

brání nepřítomnost otce růstu matematických schopností nebo podporuje růst verbálních schopností, nebo má vliv na obojí? (Je zde ještě důležitější otázka, zdali „matematická“ část testu SAT skutečně měří ten druh schopností, které vytvářejí matematika.) Výzkum nám ovšem připomíná něco, čeho jsme si měli být stejně stále vědomi, že totiž některé nejdůležitější procesy učení probíhají tehdy, když se nikdo nedívá, a to cestami, které je velmi těžké vystopovat. Je naivní předpokládat, že si lidé pamatují to, co se jim říká, a že chápou věci, které se jim jasně vysvětlí. Mnohem častěji si lidé pamatují to, co je zajímavé, a chápou ty věci, jejichž pochopení jim dělá radost. Intelektuální vývoj je tedy svázán s rozvojem osobnosti a zjemňování a rozšiřování estetického vnímání je podstatnou částí intelektuálního růstu. Tento druh růstu se nedá zmechanizovat.

Stejně skryté jsou procesy na jejichž základě se lidé učí vyučovat. Před několika lety – jak vypráví historka – jedna skupina posluchačů Harvardovy univerzity vymyslela na svého přednášejícího důmyslnou recesi. Vyučující měl ve zvyku přecházet při mluvení sem a tam. Na tajné schůzce se skupina dohodla na imaginární linii jdoucí středem učebny. Když učitel zamířil vlevo od této čáry, žáci předstírali činnost a horlivý zájem. Jakmile vstoupil na pravou stranu území, celá třída propadla apatii. Když už studenti naučili svého učitele, aby se zdržoval zásadně nalevo od střední čáry, začali postupně dohodnutou linii posouvat, až po dvou nebo třech týdnech přednášejícího doslova zabednili v rohu místnosti. Ten neměl ani tušení, co se vlastně děje.

Tento případ se určitým způsobem odlišuje od obvyklého postupu, kterým studenti učí své učitele učit. Ale myslím, že

hlavní odlišnost byla v tom, že studenti věděli, co dělají. Domnívám se, že obvykle si celý proces žádná strana neuvědomuje.

To nás nakonec přivádí k otázce, jejíž prodiskutování jste ode mne očekávali hned na začátku: za předpokladu, že vyučování je uměním, kterému se učíme na základě zkušeností, jak můžeme lidem pomoci, aby si toto umění osvojili? Zdá se mi, že začínajícím učitelům může hodně pomoci dobrý systém zavedený na fakultě.

Jedna z největších obtíží, se kterými se musí vyrovnat začínající učitelé je, že jsou v podstatě ponecháni sami sobě. V institucích, které znám, provádějí zkušení učitelé hospitace u svých mladších kolegů tak jednou za semestr. Tento způsob je formální dokonce i pro účely hodnocení a pro samotného učitele nemá přínos vůbec žádný. Je těžké si představit jiné umění, kterému by se lidé měli učit takovýmto způsobem, bez významné pomoci ve formě zasvěcené kritiky.

Z toho vyplývá, že bychom se měli pokusit přeměnit výchovu učitelů v kolektivní činnost. Navrhuji toto schéma: začínající učitelé by měli být rozděleni do skupin asi po pěti, se stejnou vyučovací náplní, nejlépe když učí totéž paralelně v různých třídách. Měli by mít společnou pracovník, aby mohli pohodlně pohovořit o problémech, se kterými se setkají. Rozvrh by měl být uspořádán tak, aby jeden druhého mohli při vyučování navštěvovat. Nejméně jednou týdně by se měli setkat na jakémsi „učitelském semináři“, kde by se vše důkladně prodiskutovalo. Každý by měl mít plnou odpovědnost za svou skupinu studentů a rychlost postupu by si měl přizpůsobit svým potřebám, s jediným omezením, totiž aby předepsaná látka byla nakonec probrána. Každý by měl vypracovat pro své studenty zvláštní úko-

ly, testy a zkušební otázky. Jestliže některý velmi zkušený učitel z fakulty se ke skupině připojí, může to nepochybně pomoci; jsem však přesvědčen, že by měl vystupovat jako poradce a ne jako šéf. Hospitace by měli provádět především kolegové mezi sebou a jen občas by se měl přijít podívat jejich konzultant.

Mám důvody doufat, že tento druh poradní činnosti by zlepšil a nesmírně zrychlil proces, ve kterém učitelé získávají své zkušenosti. Některé rysy metody by potřebovaly ještě další vysvětlení.

(1) Věřím, že existují takové věci, jako jsou pedagogické zásady. Ale dokonce i když se shodneme na tom, které to jsou, je obtížné je demonstrovat nebo dokonce sdělit pomocí abstraktních tvrzení, a umění, jak je uvést do praxe, se nedá naučit za chvíli. Myslím, že bezprostřední praktická užitečnost diskuse o pedagogických otázkách je přímo úměrná specifičnosti těchto otázek. Proto je třeba věci zaříditi tak, aby začínající učitelé nevedli mezi sebou všeobecné diskuse o vyučování, ale zaměřili se prozatím na problém vyučování určitému okruhu otázek v určité etapě a v rámci určitého kursu. Za těchto podmínek si myslím, že obecné principy se samy vyjeví v takové formě, že jejich význam bude jasný a obor jejich platnosti bude zřejmý. Proto pokládám za velmi důležité, aby členové pracovní skupiny měli identické vyučovací úkoly; potřebujeme situaci, v níž by lidé diskutující o problémech výuky, měli na mysli tytéž problémy.

(2) Jestliže skupina bude mít dohlizitele, který bude každému přesně říkat, co má dělat, pak je téměř jisté, že některým členům skupiny bude radit špatně. V učitelské práci neexistuje nic, co by se dalo kopírovat podle nějakého, i sebelepšího vzoru. Vyučování je mezilidský vztah a optimální

metody závisejí vždy na osobních vlastnostech jednotlivců. Tyto metody se mění a měly by se měnit podle reakcí žáků.

(3) Nadto, jestliže všechna důležitá rozhodnutí činí nějaká vyšší autorita, je málo pravděpodobné, že začínající učitel se bude vůbec zamýšlet nad tím, jak by řešil obtížnější pedagogické problémy, které v budoucnu bude skutečně muset řešit, a to bez šéfa. Proto můj návrh, aby začínající učitel nesl za svou třídu plnou odpovědnost v době, kdy může využívat výhod konzultací a vzájemné kritiky.

Zdá se pravděpodobné, že při tomto postupu se vložené úsilí mnohonásobně vyplatí. Zřejmě jediný způsob, jak to ověřit, je zkusit to. Myslím si ovšem, že je zde jedno nebezpečí a přinejmenším dva důležité omezující činitele.

Zaprvé, je možné, že lidé se budou před svými kolegy bát, aby nevypadali pošetile a stanou se proto přehnaně opatrnými. Pravděpodobně se toto nebezpečí podstatně zmenší, jestliže si jej adepti budou jasně vědomi. Zvláště je důležité, aby si toho byl vědom poradce a aby si na základě toho počínal taktně.

Za druhé, celý postup v popsané formě se týká víceméně tradičního vyučování, kdy obsah kursu a vyučovací metoda, které se takto získají, jsou jen počátečním stupněm k profesionální zralosti. Nejlepší kursy, které znám, byly vlastními výtvary jednotlivých učitelů, a v některých případech to byly přímo improvizace, jejichž vyústění nebylo na počátku známo ani samotnému učiteli. Věřím ale, že poměrně konvenční vyučování je přirozeným prvním krokem v profesionální dráze. Proto problémy, které se během semestru ve skupině prodiskutují, budou zpravidla omezeny tímto rámcem.

Konečně se nedomnívám, že bychom měli pocíťovat uspokojení nad současným

nedostatkem přiměřené teorie vyučování matematice. Kdybychom takovou teorii měli, byli bychom na tom lépe. Myslím, že vytvořit takovou teorii je jedním z úkolů příští generace. Nemám žádnou představu o formě, v jaké se může objevit. Snad nejpravděpodobnějšími jejími objeviteli budou lidé, z nichž každý ovládne tvůrčí metody i nejhlubší taje jak matematiky, tak psychologie.

III. Jak zvýšit podíl žáků na výuce — George Piranian

Tyto řádky jsou určeny učitelům všech forem výuky na vysokých školách, učitelům středních škol. Učitelé základních škol již vědí, o co půjde.

Moji kolegové diskutovali o způsobech, jak podnítit spolupráci třídy s učitelem. Paul Halmos mluvil o podílu studentů a Ed Moise navrhuje vdechnout jiskru života do učitelů. Pokusím se podpořit jejich zprávu jednou historkou a zmíním se o některých technických detailech, které s tím souvisejí.

V letech 1967–68 mi michiganská univerzita svěřila přednášky v kursu základů analýzy vyhrazeném pro hostující učitele. Protože jsem již dlouho neměl žádný styk se studenty prvního ročníku, měl jsem z toho strach, ale studenti byli velmi milí a brzy jsme rozvinuli účinnou spolupráci.

Měli jsme solidní učebnici. Naneštěstí autor vzal sám sebe trochu příliš vážně, a proto text byl dosti bezútěšný. Jako odškodnění jsem pravidelně zadával speciální úlohy k řešení. Například jsem vyzval studenty, aby dokázali nebo vyvrátili tvrzení, že reálná funkce spojitá v jednom bodě je spojitá i v některém jeho okolí. Diskuse, která následovala, by byla mohla spolknout celou hodinu. Ale kurs pokračoval.

čoval dobře a mne to tak těšilo, že jsem nakonec požádal jednu z dívek, aby pro mne v průběhu druhého ročníku opravovala domácí úkoly.

V červnu mi vydavatelství Addison-Wesley poslalo výtisk knihy Josepha Kitchena *Calculus in One Variable*. Protože kniha vypadala čtivě, myslel jsem, že bychom ji mohli zkusit, a abych se zavděčil své pomocnici, požádal jsem vydavatele, aby jí též poslal domů jeden výtisk.

V září, když Líza přišla do mé pracovny, zeptal jsem se jí na její názor a ona odpověděla: „Je to úplně podobné jako kniha, kterou jsme používali, až na to, že Piranianovy problémy už tam jsou také“. Noví studenti si knihu koupili a já jsem se těšil na skvělý rok.

Za týden jsem začal mít jisté obavy a brzy jsem pocítil mrazivý dotek neúspěchu. Přesto, že jsem měl vynikající text a bystré studenty, třída se nějak nedokázala odlepit od země. A pak se stalo, že autor přeskočil věc, kterou jsem pokládal za důležitou, a to mne donutilo, abych speciálně pro tuto příležitost vymyslel problém. Výsledek byl dramatický. Za řevu motorů a jemných vibrací jsme se vznesli do blankytných výšek.

Ponaučení je jednoduché: nezáleží na tom, jak bezvadný, úplný a jasný je text učebnice nebo skripta, ale studenti musí vědět, že tuto přednášku konám výhradně pro ně a že kvůli nim jsem ochoten všechno znovu přebudovat. Například nikdy nesmím uložit domácí cvičení takovým způsobem, že bych otevřel knihu na str. 93 a řekl: „Napříště udělejte úlohy č. 3, 7, 7, 10, 16, 19 a dejme tomu 21; hodina končí“. K tomu se ještě brzy vrátíme.

Nesmím budit dojem člověka najatého k tomu, aby učil co nejvíce studentů současně a vedeného k tomu, aby to dělal způsobem typickým pro sériovou výrobu

ve fabrice. Musím si dopřát rozsáhlou spolupráci ze strany studentů; nejlepší způsob, jak toho dosáhnout, je rozpoznat, že letošní studenti potřebují nový kurs a že, ať už to stojí cokoliv, moje třída si zaslouží zvláštní péči. Nemůžete učit levou rukou, nemůžete učit pravou rukou. Stejně jako při volejbalu, plavání nebo řízení malé plachetnice, tato práce vyžaduje obě ruce, obě paže, svaly na nohou a trup.

Práce pedagoga vyžaduje ještě víc. Mohu pronést výmluvné evangelizační kázání z Darboux a Riemanna nebo uspořádat duchaplné představení o Cantorově teorii množin nebo zahrát oběma rukama a nohama nádhernou axiomatickou fugu a přece sklidit velký neúspěch. Nikdo se nemůže zachovat všem lidem v každé době a žádný způsob vyučování neúčinkuje na všechny studenty. Proto úspěšné vyučování vyžaduje spolupráci celé třídy.

Vy a já bychom věděli, jak žít, kdybychom byli znovu mladí. Ale zatím mnoho chlapců a dívek se trápí kvůli své neobratnosti, nejistotě a nerozhodnosti. Zeptejte se tuctu vašich žáků, s kolika kolegy ze třídy se znají, a budete překvapeni, když spatříte pustotu a akademickou izolaci, v níž někteří z nich žijí. Před několika lety jsem připadl na nevtíravý způsob, jak předat přes generační přehradu trochu zralé moudrosti. Na začátku každého semestru rozdávám rozmnožený seznam adres a telefonních čísel všech studentů v místě univerzity. To může povzbudit spolupráci na domácích úlohách, ale nevytváří to politováníhodnou situaci, ve které Archibald opisuje Bonifácovu úlohu čtvrt hodiny před vyučováním. Polovina třídy se může sejít k velkému potlachu. Objeví se vůdčí osobnosti a silnější pomohou slabším. Mohl bych se dělit o svůj plat se čtyřmi nebo pěti studenty. Dělal

za mne něco z mé nejtěžší práce a já sklízím plody jejich úspěchu. Děcka se učí spolu komunikovat, a když je domácí úkol hotov, mohou být tak plná touhy po kolektivu, že společně vyrazí do ulic. Kdyby nás klusalo několik set od hotelu Hilton k Rybářskému nábřeží, San Francisco by znamenalo naši fyzickou přítomnost a naši soudržnost.

Vrátil jsem se zpět k domácím úkolům. Nevím, jak lze sdělovat matematické myšlenky dosti účinně, aby si je studenti osvojili tak, že budou sedět u mých nohou a vdechovat vůni mých ponožek. Nebo použijte-li trochu méně drsné metafory: poté, co se studenti nasytili na mých svěžích pastvinách, budou muset věnovat podstatnou část svého času přežvykování. Proto potřebujeme domácí úlohy.

Předpokládejme nyní, že naše skriptum z kalkulu obsahuje soubor cvičení na integraci per partes, další na výpočet těžiště a další na užití cylindrických a sférických souřadnic. V každé skupině se úroveň úloh pohybuje od triviálních k víceméně rutinním a na konci se může objevit několik důležitě vypadajících hlavolamů.

To je rozumné uspořádání textu. Přirozený způsob zadávání domácích úloh je přidělit dnes úlohy ze skupiny 23, zítra úlohy ze skupiny 24, atd. Je to efektivní pro učitele, pro studenty i pro toho, kdo vypracované úlohy hodnotí, a je to v souladu s principem služebního postupu. Nicméně, tato praxe je přímo manifestací pedagogické brutality. Ubožák, který stěží zvládne úlohu 7; nikdy nebude mít užitek z úloh 10, 16, a 19, leda v průběhu diskuse, kterou přečká zcela pasívně, poněvadž podle jeho nezkušeného názoru k ní dochází příliš pozdě, než aby mu ještě k něčemu byla.

Účinnější způsob, jak zadat úkol na zítřek, může vypadat asi takto:

Úloha 18 ze skupiny 22

Úlohy 15 a 16 ze skupiny 23

Úlohy 9 a 12 ze skupiny 24

Úlohy 1 a 4 ze skupiny 25.

Podle tohoto plánu přichází obtížná úloha až po týdnů zkušeností se snadnějšími cvičeními na totéž téma. Student získává tím, že je opakovaně vystaven otázkám z téhož okruhu a učitel má několik příležitostí, jak objasnit základní principy a předvést nutné technické postupy. Tuhé maso se musí pomalu vařit a obtížná myšlenka potřebuje několik dní na rozmyšlenou. Použijte tohoto stejnoměrného rozptylu při zadávání úkolů, řekněte studentům, že jste domácí úkoly pečlivě naprogramoval, aby přinesly co největší efekt, a ujistěte se, že mluvíte pravdu.

Odstupňované domácí cvičení je po technické stránce maličkostí, ale rozdíl je patrný. Také je to dobrá ilustrace úsloví, že genialita je schopnost vynakládat námahu.

Chtěl bych naléhavě požádat matematickou obec, aby zvýšila své pedagogické úsilí, nikoliv nákupem tretek, nikoliv vytvářením nových komisí expertů, ale zvýšením osobního úsilí. Nechť každý přijme odpovědnost za to, aby učil s větší vitalitou. Jestliže to sníží jeho publikační plodnost o třicet procent, tím lépe. Bude to dobrá zpráva pro knihovny a pomůže to zachránit *Mathematical Reviews*.

Podle názoru těch starších je třeba učitele posuzovat především podle toho, jak učí, za druhé podle toho, jak dobré jsou jeho publikace; nikdy ne podle toho, jak jsou početné.

Neříkám to proto, že bychom potřebovali vychovat více matematiků; je nás už dost. Ani mě netíží problém, jak zvýšit počet studentů, kteří se budou zapisovat ke studiu matematiky, aby se zabránilo ekonomickému tlaku na odchod některých

přesluhujících profesorů do penze. Je jen jeden druh produkce, který svět potřebuje ze všeho nejvíce a za který nikdy nenajdeme uspokojivou náhradu. Potřebujeme dobré muže a ženy. Jako učitelé máme mimořádně naléhavý úkol, abychom mládeži předali některé z intelektuálních hodnot civilizovaného lidstva. Naším úkolem je inspirovat studenty, aby na základě svých schopností dosáhli co nejvyšší odborné i lidské úrovně. Naše přežití záleží na úspěchu naší společné práce. Omlouvám se, že končím v tak vážném tónu, ale jsme postaveni před problém největší důležitosti.

*

Doslov redakce. Redakce si je vědoma určité jednostrannosti výše uvedené diskuse. Všechny příspěvky se totiž zabývají téměř výhradně humanitními aspekty vyučovacího (a výchovného) procesu, zatímco některé stejně důležité otázky, jako je například výchova k aplikacím, zůstávají nedotčeny. V tomto kontextu je též třeba chápat některé výroky v těchto článcích obsažené; například pokud autor posledního příspěvku, G. PIRANIAN, používá slova „matematik“, má zřejmě vždy na mysli „klasického“ matematika s akademickým postavením. Celá diskuse se navíc týká především vysokoškolských učitelů. Redakce ovšem uvítá jakýkoliv podnětný a zasvěcený příspěvek, který by přispěl k osvětlení problému z jiných hledisek.

Několik otazníků k terminologii

Každá vědní disciplína si vytváří svůj jazyk a má zájem na jeho dokonalosti. Objektivní skutečnosti, s nimiž musí pracovat, jsou však tak pestré, že i při pečlivé snaze zůstávají v jazyce jisté nedokonalosti a nedůslednosti. Výjimkou není ani matematika a její terminologie.

Věc šouvisí mj. i s otázkou norem. Je pochopitelné, že matematikové nebudou nakloněni příliš podrobnému a ztrnulému vtěsnání prudence se vyvíjející matematiky do normového schématu. Zároveň však je i v zájmu matematiky, aby dávala vyjadřovací jistotu alespoň v jistém souboru zcela základních pojmů, které se staly obecně, možno říci důvěrně známými a používanými. Bylo by vítané, kdyby co nejméně často nastávala takováto situace: Inženýr se dotazuje matematika na zcela jednoduchý terminologický problém (ve snaze správně pochopit a vyjádřit určitý odborný záměr). Setká se však s několika rozpornými hledisky, z nichž si nedovede vybrat.

Tato poznámka nechce matematice navlékat ztrnulý krunýř. Několik dále uvedených elementárních ukázek má pouze naznačit, že leccos by se snad dalo postupně pozměňovat k dobru všech.

Z geometrie prostorových útvarů

Žák nebo student, který nerozlišuje pojmy koule a kulová plocha, je právem peskován. Studenti s oblibou hovoří o kuželi či o válci, majíce na mysli kuželovou plochu. Setrvačnost těchto nedostatků uvádí do varu krev mnoha učitelů.

Jednou se však objeví pojem elipsoid. Bývá definován tak, že jde o plochu, zároveň se však téhož termínu používá k pojmenování tělesa (objem elipsoidu). Myslící žák je nutně překvapen a právem dotčen tím, že nedostatky vytýkané mu v souvislosti s koulí a kulovou plochou jsou najednou nepodstatné. U ostatních kvadrík je situace obdobná, dokonce komplikovanější. Nebylo by vhodné sjednotit se na důsledné terminologii?

Tělesa	Plochy
koule	kulová plocha
kužel	kuželová plocha
válec	válcová plocha
elipsoid	elipsoidová plocha
paraboloid	paraboloidová plocha
jednodílný hyperboloid	jednodílná hyperboloidová plocha
dvoudílný hyperboloid	dvoudílná hyperboloidová plocha
hyperbolický paraboloid	hyperbolická paraboloidová plocha