Ernest Jucovič

Poznámka k tretej časti 18. Hilbertovho problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 6, 335--338

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138797`

[10] ORNSTEIN D., *Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic*, Advances in Math. *5* (1970), 339—348.
[11] ORNSTEIN D., *Factors in Bernoulli shifts are Bernoulli shifts*, Advances in Math. *5* (1970), 344—369.
[12] ORNSTEIN D., *Bernoulli shifts in flows*, Springer, Lecture notes 160 (1970), 178—218.
[13] ORNSTEIN D., *A Kolmogorov automorphism which is not a Bernoulli shift*; ruský preklad v zb. Matematika *15, 1* (1971), 131—150.
[14] FRIEDMAN N. A., ORNSTEIN D., *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Advances in Math. *5* (1970), 365—394.
[15] SMORODINSKY M., *Ergodic theory, entropy*, Berlin 1971.
[16] ORNSTEIN D., *Some now results in the Kolmogorov-Sinaj theory of entropy and ergodic theory*, Bull. of the Amer. Math. Soc., *77* (1970), 878—890.
[17] WEISS B., *The isomorphism problem in ergodic theory*, Bull. of the Amer. Math. Soc. *78* (1972), 668—684.
[18] ORNSTEIN D., *An application of ergodic theory to probability theory*, The Annals of Probability *1* (1973), No 1, 43—65.
[19] ORNSTEIN D., *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*, Yale Univ. Press, London 1974.

Publikácie [5]—[9] poskytujú základné informácie o entropickej teórii, pravda, neobsahujú najnovšie Ornsteinove výsledky. Ornsteinove výsledky, ako aj výsledky ďalších autorov sú obsiahnuté v prácach [4], [10]—[15]. Články [16] a [17] sú prehľadné, v [18] sa aplikujú dosiahnuté výsledky na teóriu stacionárnych procesov.

Poznámky k tretej časti 18. Hilbertovho problému

Ernest Jucovič, Košice

K napísaniu týchto poznámok podnietil autora článok V. FREIA [4], vlastne niekoľko (nie celkom výstižných) tvrdení v ňom. O 18. probléme HILBERTA sa tam hovorí, že „nepatří patrně k otázkám mimořádně plodným pro samotnou matematiku". A o tretej časti uvedeného problému (určiť maximálne zaplnenie E_n zhodnými guľami, popr. inými telesami – neskoršie ukážeme, že Hilbert nie je pôvodcom tohoto problému) sa v [4] píše, že „sotva ji lze zodpovědět vyčerpávajícím způsobem", pričom o ďalšom vývoji tejto časti Hilbertovho problému sa tam nehovorí. Keďže ale na ňu nadväzuje veľa zaujímavých poznatkov geometrie posledných desaťročí (dakedy označovaných za „*diskrétnu geometriu*"), z ktorých mnohé je možné pre každého zrozumiteľne formulovať, je hádam vhodné stručne o týchto partiách modernej geometrie čitateľov Pokrokov poinformovať a doplniť tak článok V. Freia. Ak to na príslušných miestach nebude inakšie povedané, bližšie informácie nájde čitateľ v monografiách [2], [3], [7], [8]; výnimkou je iba vlastný problém b) v 4. odstavci.

1. Na kruhový stôl S s polomerom R položme k jednotkových kruhov $k_1, k_2, \ldots, k_k$; množinu týchto kruhov označme K a za hustotu uloženia K v S označme podiel zo súčtu obsahov kruhov z K a obsahu kruhu S. Ak sa polomer R zväčšuje bez obmedzenia (a K obsahuje nekonečne veľa jednotkových kruhov — len to je zaujímavé) limitným prechodom dostávame hustotu uloženia K v rovine. Dve uloženia sú zvlášť zaujímavé: a) Ak žiadne dva kruhy z K nemajú spoločný vnútorný bod; takému uloženiu povieme *zaplnenie* a hľadáme zaplnenie s maximálnou hustotou. b) Ak každý bod roviny náleží najmenej jednému kruhu z K. Takému uloženiu hovoríme *pokrytie* roviny a hľadáme pokrytia s minimálnou hustotou. Zovšeobecnenie pre vyššie dimenzionálne euklidovské (i iné) priestory je zrejmé. Čo tu je známe?

Pre E_2 stredy kruhov v zaplnení s maximálnou hustotou i stredy kruhov v pokrytí s minimálnou hustotou sú vo vrcholoch pravidelnej trojuholníkovej mriežky. Maximálna hustota zaplnenia je $\pi/\sqrt{12}$, minimálna hustota pokrytia $2\pi/\sqrt{27}$.

Pre žiadne $n > 2$ nie sú známe ani maximálne hustoty zaplnenia ani minimálne hustoty pokrytia E_n zhodnými n-rozmernými guľami. Známe sú iba odhady týchto extremálnych hodnôt.

Viac sa vie povedať o extremálnych hustotách zaplnení a pokrytí ak pridáme požiadavku: stredy gúľ príslušných uložení nech sú vo vrcholoch mriežky príslušného priestoru (= *mriežkové uloženia*). Tak sú známe maximálne hustoty mriežkových zaplnení E_n zhodnými guľami pre všetky $n \leqq 8$. Pre $n = 2, 3$ ich poznal už Gauss, pre $n = 4, 5$ v sedemdesiatich rokoch minulého storočia Korkin a Zolotarev. Práve tieto číselné údaje nájde čitateľ v citovanom článku V. Freia.

2. Vráťme sa do E_2. Ukladajme do roviny kruhy s *nezhodnými* polomermi, presnejšie: Pod *homogenitou h* kruhov z K je myslené číslo $\sup(K_i/K_j)$, $K_i, K_j \in K$ (K_i značí súčasne aj obsah kruhu K_i). A úlohou je k danému h určiť maximálnu hustotu zaplnenia $\mu(h)$ a minimálnu hustotu pokrytia $\tau(h)$ roviny E_2 kruhmi s homogenitou h. Priebeh funkcií $\mu(h)$ a $\tau(h)$ nie je v celom obore známy. Intuitívne by sa dalo čakať, že $\mu(h)$ je spojite rastúca a $\tau(h)$ spojite klesajúca. No, nie je tomu tak. Napr. pre všetky $1 \leqq h \leqq 1{,}81$ je $\mu(h) = \pi/\sqrt{12}$, pre všetky $1 \leqq h \leqq 1{,}56$ je $\tau(h) = 2\pi/\sqrt{27}$. Názorne povedané: Kruhmi, ktoré sa navzájom neprekrývajú a ktorých polomery sa „príliš“ od seba nelíšia, sa nedá pokryť väčšia časť roviny ako kruhmi navzájom zhodnými.

3. Zrejmé je prenesenie celej problematiky do neeuklidovských priestorov. Ukážme si to na príklade guľovej plochy.

Hľadané je zaplnenie, resp. pokrytie guľovej plochy n zhodnými guľovými vrchlíkmi s maximálnou $\sigma(n)$, resp. minimálnou $\varrho(n)$ hustotou uloženia. Priebeh funkcií $\sigma(n)$, $\varrho(n)$ opäť nie je známy. Hodnoty $\sigma(n)$ sú známe iba pre $n \leqq 12$ a $n = 24$ (pre $n = 10$ a 11 Danzerov kompletný dôkaz doteraz nebol vytlačený), hodnoty $\varrho(n)$ pre $n \leqq 7$ a $n = 10$, 12, 14. Pre ostatné n sú známe v oboch prípadoch iba dolné a horné ohraničenia extremálnych hodnôt a v ostatných rokoch sa riešenie problému podstatne z miesta nepohlo. Rovnako sa má vec s uloženiami nezhodných kruhov na guľovej ploche. Pritom rozvoj využitia umelých družíc Zeme (napr. spojových) v spoločenskej praxi priniesol aj ekonomicky významnú priamu aplikabilitu výsledkov výskumov, najmä o pokrytí guľovej plochy vrchlíkmi. Ďalšie oblasti aplikácií sú: biológia, teória informácií, stereochémia.

4. V tomto odstavci pohovoríme o dvoch špeciálnych uloženiach.

a) Množina $\{K_i\}$ navzájom disjunktných otvorených *čiernych* jednotkových kruhov (= domy) nech je tak uložená v rovine, že každý K_i sa zvonku dotýka navzájom disjunktných *bielych* kruhov $k_{i,1}$ (= parkovisko), $k_{i,2}$ (= vrtuľníková pristávacia plocha), $k_{i,3}$ (= detské ihrisko), $k_{i,4}$ ... atď. s polomermi $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$. Množinu kruhov $\{k_{i,j}\}$ nazvime *priestorovým nárokom* kruhu K_i; pritom priestorové nároky K_i, K_j pre $i \neq j$ nemusia byť disjunktné. Úlohou je: K daným polomerom $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ určiť zaplnenie roviny s maximálnou hustotou čiernych kruhov. – V tejto všeobecnosti nie je úloha rozriešená; presné hodnoty extremálnych hustôt sú známe iba pre niektoré priestorové nároky, ináč sú k dispozícii odhady. – V poslednom čase bola bližšie popísaná stavba niektorých vírusov a bakteriofágov. Rozloženie látkových jednotiek tu pripomína priestorovo náročné zaplnenia guľovej plochy. Napr. u bakteriofága φX 174 alebo u TYMV (Turnip Yellow Mosaic Virus – pozri [6].)

Je veľmi dobre možné, ba pravdepodobné, že biologické vlastnosti vírusov súvisia s ich geometrickou štruktúrou. Tú by ale mali biológovia experimentálne preskúmať.

b) Zaplňme (pre zmenu) E_3 guľami dvojakého druhu, „bielymi" s polomerom r a jednotkovými „čiernymi" tak, že každá polpriamka s počiatkom v strede „bielej" gule pretne aspoň jednu „čiernu" guľu skôr ako pretne inú „bielu" guľu. Takéto uloženie nazývame *oblakovité* a problém zrejme je: K danému r určiť maximálnu hustotu „bielych" gúľ v oblakovitom zaplnení E_3. Isteže, otázku je možné zovšeobecniť zavedúc ďalší parameter: Každá spomínaná polpriamka nech pretína aspoň z „čiernych" gúľ (*z-násobné oblakovité zaplnenie*). Čitateľovi určite napadli reálne interpretácie so žiarovkami, alebo menej príjemnými zdrojmi žiarenia v stredoch „bielych" gúľ. (Nový, ťažší problém dostávame, ak necháme žiariť celé gule.) Musím povedať, že ku žiadnemu r nie je známy definitívny výsledok, ba ani netriviálny odhad.

5. K *histórii* celého problému.

Ako si všimol V. Frei [4], bádatelia v diskrétnej geometrii sa v minimálnej miere odvolávajú na Hilberta, pričom sa cituje skôr [5] a nie jeho prednáška na parížskom matematickom kongrese r. 1900. V knihe [3] Fejes Tótha sa v kapitole o hustote zaplnenia E_2 a E_3 guľami neuvádza, že ide o Hilbertov problém. Pekná kniha [7] Rogersa, zaoberajúca sa výlučne uloženiami v E_n ani novšia monografia Stojana [8] necitujú Hilberta vôbec. Nie je to ale vôbec také divné. V 1. odstavci sme videli, že problém hustoty uložení v euklidovských priestoroch bol sformulovaný a dôležité výsledky boli získané už pred Hilbertom, ktorý k celej problematike ani nič podstatného nepridal. (Táto skutočnosť samozrejme Hilbertovi vôbec neuberá na význame.) Súvislosť medzi teóriou (geometriou) čísel a otázkami uložení je pestovaná už od prác K. Minkovského o mrežových uloženiach v E_n z čias okolo r. 1900 (porov. [1]).

Literatúra

[1] J. W. S. Cassels: *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer, Berlin 1959. (Existuje ruské vydanie z r. 1965.)

[2] L. Fejes Tóth: *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1964.

[3] L. Fejes Tóth: *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*. Zweite Aufl. Springer, Berlin 1972. (Ruský preklad 1. vyd. vyšiel r. 1958.)
[4] V. Frei: *O 18. Hilbertově problému*, Pokroky MFA, *20* (1975), 260—268.
[5] D. Hilbert — S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin 1932.
[6] J. Molnár: *On a generalization of the Tammes problem*, Publicat. Math., Debrecen *22* (1975), 109—114.
[7] C. A. Rogers: *Packing and covering*, Cambridge 1964. (Existuje ruské vydanie z r. 1968.)
[8] Ju. G. Stojan: *Razmeščenije geometričeskich objektov*, Naukova dumka, Kijev 1975.

A. P. JUŠKEVIČ — 70 let

Dne 15. července 1976 oslavil své 70. narozeniny vedoucí představitel sovětské školy historiků matematiky a v celém světě uznávaný odborník na problematiku středověkého a novověkého vývoje matematiky Adolf Pavlovič Juškevič (* 15. 7. 1906 v Oděse).

Patřil mezi žáky a spolupracovníky zakladatelů sovětské školy historiků matematiky, kterou při moskevské univerzitě začali systematicky ve 20. letech budovat S. A. Janovskaja (1896—1966) a M. Ja. Vygodskij (1898—1965). Juškevič končí v r. 1929 svá studia matematiky na moskevské univerzitě prací věnovanou Carnotově teorii kompenzace chyb.

Historie matematiky v něm dostala záhy významného badatele a nakonec zejména po 2. světové válce i jednoho z tvůrců vědeckého programu sovětské školy historiků matematiky; přičemž význam jeho badatelské i organizační činnosti daleko přesáhl hranice Sovětského svazu a beze sporu se projevil i v naší zemi. Připomeňme jen jeho úsilím vydávané periodikum *Istoriko-matěmatičeskoje issledovanija* (od r. 1948), které dlouhou dobu bylo jediným periodikem soustřeďujícím se na systematický výzkum historie matematiky.

A. P. Juškevič. který v letech 1930—1952 působil na moskevském technologickém institutu, přednášel současně od třicátých let dějiny matematiky na moskevském pedagogickém ústavu, spolupracoval se seminářem historiků matematiky při moskevské univerzitě a tam se stal 1935 kandidátem a 1940 doktorem fyzikálně matematických věd. Od r. 1945 patřil mezi prvé pracovníky obnoveného Ústavu pro dějiny přírodních věd a techniky AV SSSR, kde působí ve funkci vedoucího oddělení historie matematiky dosud a pomáhá spoluvytvářet pracovní program celého institutu.

Dlouhou dobu se věnoval výzkumu vývoje matematiky v Rusku. Detailním studiem opravil Bobyninovo hodnocení praktických učebnic 17. století. Zabýval se významem matematiků, členů petrohradské Akademie prvého období jejího vývoje a zde velmi intenzívně přispíval k eulerovskému bádání, zejména výzkumem a vydáváním Eulerovy rukopisné pozůstalosti. Všímal si i Lobačevského algebry, rozvoje matematiky na moskevské univerzitě v letech 1756—1866 a své výsledky v této oblasti pak shrnul v příslušných kapitolách knihy *Istorija estestvoznanija v Rosii* (1957—1966) a zejména v samostatné knize *Istorija matěmatiky v Rossii do 1917 g.* (1969). Právě v této knize ukazuje velmi dobře společenskou podmíněnost vývoje zdánlivě od praktického života tak odtažité abstraktní teorie, za jakou bývá považována matematika.

Od samého počátku své badatelské činnosti projevoval A. P. Juškevič zájem o otázky základů matematické analýzy. Zabývá se L. Carnotem (1929, 1935), L'Hospitalovou světově prvou učebnicí matematické analýzy (1935), specifičností Leibnizova přístupu k základům analýzy (1948, 1967). Zabývá se též Eulreovými pracemi ze základů analýzy, Ostrogradského pracemi z matematické fyziky ap. Již v r. 1935 píše obecný náčrt rozvoje myšlenek základů analýzy v 18. stol., vrací se k této problematice v pracích o evoluci pojmu funkce (1965, 1967) a v r. 1966 se pokouší charakterizovat revoluční změny v matematice 17. stol. v souvislosti s vědeckou revolucí nové doby.

Od r. 1947 se začal A. P. Juškevič zabývat rovněž matematikou středověkého Orientu. Publikoval tehdy článek o algebraických výsledcích Omara Chajjáma. Od počátku 50. let pak Juš-