P. R. Halmos
BDF neboli věta o hlavních osách v nekonečné dimenzi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 6, 312--321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138845

[15] I. NETUKA, J. VESELÝ: *F. Riesz a matematika dvacátého století*. Pokroky MFA *25* (1980), 128 — 138.
[16] F. RIESZ: *Sur certain systèmes singuliers déquations intégrales*. Ann. École Norm. Sup. *28* (1911), 33—62.
[17] F. RIESZ: *Les systèmes déquations linéaires à une infinité dinconnues*. Gautheir-Villars, Paris, 1913.
[18] W. RUDIN: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia, Praha, 1977.
[19] A. E. TAYLOR: *Úvod do funkcionální analýzy*. Academia, Praha, 1973.
[20] I. BÁRÁNY, M. KATCHALSKI, J. PACH *Helly's theorem with volumes*. Amer. Math. Monthly *91* (1984), 362—365.

BDF neboli věta o hlavních osách v nekonečné dimenzi*)

*P. R. Halmos***)

Nejslavnější výsledek z konečnërozměrné lineární algebry je tzv. věta o hlavních osách: reálné symetrické matice lze diagonalizovat. Nekonečněrozměrné zobecnění se nazývá spektrální větou; to je stará věc. Mnohem hlubší a okázalejší nekonečná verze je současně mnohem novějšího data; byla objevena v roce 1973 Brownem, Douglasem a Fillmorem (BDF). Jejich příspěvek má dvě části: proniknutí do struktury a konstrukci důkazu. Proniknutí je důvtipné a krásné; důkaz je komplikovaný a obtížný. Domnívám se, že důkaz se jednoho dne zjednoduší. Dokud tomu tak nebude, každý příspěvek podobný našemu může pouze popsat proniknutí.

Diagonalizace

Pro danou reálnou symetrickou matici A nalezněme její vlastní čísla (kořeny charakteristické rovnice) a příslušnou ortogonální bázi vlastních vektorů délky 1. Proces diagonalizace lze popsat dvěma ekvivalentními způsoby: geometricky a algebraicky. (1) Vyjádřete lineární zobrazení, které matice A definuje, jako matici vzhledem k výše

*) Tento článek je zápisem přednášky na pozvání na denverském zasedání MAA 7. ledna 1983. Název přednášky byl *Jak se zbavit malých matic neboli Co vlastně udělali Brown, Douglas a Fillmore v roce 1973?*

**) Údaje o autorovi viz PMFA *27*, č. 5 (1982), str. 280—281.

Reprinted from the "Notices of the American Mathematical Society", *BDF or the Infinite Principal Axis Theorem*, P. R. HALMOS, June, 1983, pages 387—391, by permission of the American Mathematical Society.

nalezené ortonormální bázi vlastních vektorů. (2) Nechť P je ortogonální matice (rotace), která převádí původní „přirozenou“ souřadnicovou bázi na bázi právě nalezenou, a utvořme $P'AP$ (P' je transponovaná matice k P). V obou případech je výsledkem diagonální matice, „diagonalizovaná“ verze matice A.

Zobecnění tohoto procesu na komplexní matice je přirozené a důležité. Jestliže A není symetrická ($a_{ij} = a_{ji}$), ale hermitovská (hermitovsky symetrická, $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$), potom vlastní čísla jsou stále ještě reálná, opět lze najít ortonormální bázi vlastních vektorů a výsledkem postupu (1) nebo (2) je diagonalizace matice A. V algebraické verzi je diagonalizací matice U^*AU, kde U je unitární (komplexní obdoba ortogonální) matice a U^* je matice komplexně transponovaná.

Hermitovské matice nejsou samozřejmě jedinými maticemi, které lze unitárně diagonalizovat: triviálním protipříkladem je diagonální (!) matice s nějakými nereálnými prvky. Existuje nějaká použitelná charakterizace diagonalizovatelnosti? Odpovědí je jeden z největších výsledků lineární algebry: nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby k matici A existovala unitární matice U taková, že U^*AU je diagonální, je komutativita matic A a A^* ($AA^* = A^*A$). Matice, které splňují tuto podmínku, se nazývají *normálními*. Věta o hlavních osách pro normální matice umožňuje snadno rozhodnout, zda dvě normální matice jsou unitárně ekvivalentní (v tom smyslu, že $A = U^*BU$ pro nějakou unitární matici U). Podmínkou je, aby měly stejný diagonální tvar nebo, řečeno více geometricky, aby měly stejná vlastní čísla se stejnými násobnostmi.

Imitace

Jak v klasické „tvrdé“ analýze, tak v její moderní „měkké“ verzi a stejně tak i v jejích aplikacích, je důležité správně chápat nekonečný případ. Jsou dvě cesty, jak se o to pokusit: imitovat konečný případ a držet se ho, jak jen to je možné, nebo ho změnit, modulovat, a podívat se, co skutečně nového může nastat.

Imitací můžeme dojít daleko, a to zcela hladce. Vektory budou nekonečné posloupnosti $\langle x_1 . x_2, x_3, \ldots \rangle$ místo konečných posloupností, ale skalární součiny $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Sigma_n x_n \bar{y}_n$ a normy $\|\boldsymbol{x}\| = (\Sigma_n |x_n|^2)^{1/2}$ jsou definovány stejně jako předtím. Aby tyto definice měly smysl, je samozřejmě nutné vhodně omezit uvažované nekonečné posloupnosti (řady $\Sigma_n |x_n|^2$ musí konvergovat), ale to teorii jen zjednodušuje a nečiní ji obtížnější. Norma indukuje přirozený pojem vzdálenosti ($d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$); výsledný metrický prostor je úplný a všechno je dobré. Pojem dimenze (pro podprostory studovaného vektorového prostoru) má smysl a má všechny správné vlastnosti.

Z topologických důvodů by lineární zobrazení, studovaná v nekonečném případě, měla být spojitá. Spojitá lineární zobrazení lze reprezentovat maticemi, stejně jako to lze pro všechna lineární zobrazení v konečném případě. Jediná věc, která napoprvé přivádí studenty do rozpaků, je to, že ne každá matice reprezentuje některé lineární zobrazení. Uvažujme například nekonečnou matici, jejíž prvky nad hlavní diagonálou jsou rovny 0 a prvky na hlavní diagonále a pod ní jsou rovny 1. Tato matice může zobrazit kvadraticky sčítatelnou posloupnost (vektor) na kvadraticky nesčítatelnou posloupnost. Matice, které nemají tuto špatnou vlastnost, se nazývají *omezenými.*

Dokonalá korespondence mezi lineárními zobrazeními a maticemi v konečném případě přechází v nekonečném případě na dokonalou korespondenci mezi spojitými lineárními zobrazeními a omezenými maticemi. V důsledku této korespondence se často lineární zobrazení a matice považují za jedno a totéž, což je neškodný zvyk.

Omezená matice má *normu*. Norma matice A se definuje jako maximální roztahující součinitel nebo přesněji jako supremum délek obrazů při A všech vektorů délky 1; značíme ji $\|A\|$. Některé další běžné pojmy teorie matic jsou nasnadě. Adjungovanou maticí A^* k matici A rozumíme matici komplexně transponovanou k A; A je *hermitovská*, jestliže $A = A^*$; A je *normální*, jestliže $AA^* = A^*A$; a U je *unitární* (jistě nikdo neoznačí unitární matici písmenem A?), jestliže $UU^* = U^*U = 1$ (identická matice).

Celou teorii objasní, podíváme-li se, co základní pojmy představují ve speciálním případě diagonálních matic. Je-li $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ diagonální matice s předepsanými diagonálními prvky, potom $\|A\|$ je supremum všech $|\lambda|$ (*nikoliv* druhá odmocnina ze součtu čtverců); $A^* = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \ldots)$; A je hermitovská, právě když všechna λ jsou reálná; A je automaticky normální, nezávisle na tom, jaká jsou λ; a A je unitární, právě když $|\lambda_n| = 1$ pro všechna n.

Jedním ze způsobů, jak vyjádřit konečněrozměrnou diagonalizační větu, je psát $\mathscr{U}^*\mathscr{D}\mathscr{U} = \mathscr{N}$. Tuto rovnost je třeba chápat tak, že množina všech matic tvaru U^*DU, kde U je unitární a D je diagonální, splývá s množinou všech normálních matic. Odpovídající nekonečněrozměrné tvrzení jednoduše neplatí. Jedním konkrétním protipříkladem je matice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \end{Vmatrix} .$$

Snadno je vidět, že tato matice není unitárně ekvivalentní s žádnou diagonální maticí — nemá totiž vůbec žádná vlastní čísla. Nekonečněrozměrná spektrální věta musí být jemnější než konečněrozměrná; vlastní čísla a vlastní vektory je nutno zaměnit „aproximativními" vlastními čísly a vlastními vektory.

Modulace

Co se stane, jestliže zastavíme pokus imitovat konečný případ příliš těsně a místo toho přejdeme k opačnému extrému: budeme uvažovat pouze vlastní nekonečnou teorii? Myšlenka spočívá v tom, že všechno konečné prohlásíme za triviální, vyškrtneme to a budeme pracovat pouze s tím, co zbude.

Hodnost lineárního zobrazení je dimenze jeho oboru hodnot. Jestliže lineární zobrazení má konečnou hodnost, potom se v každém algebraickém ohledu chová jako lineární zobrazení na konečněrozměrném prostoru a z našeho hlediska je tedy triviální.

Vysvětleme podrobněji, co to znamená. Množina $\mathscr{B}$ všech omezených matic je algebrou nad tělesem komplexních čísel a množina $\mathscr{F}$ všech matic s konečnou hodností je ideálem v této algebře. To znamená, že $\mathscr{F}$ je uzavřená vůči lineárním kombinacím a navíc AF a FA patří do $\mathscr{F}$, jakmile F je z $\mathscr{F}$ a A je libovolná matice z $\mathscr{B}$. „Vyškrtnout" všechny matice s konečnou hodností znamená ztotožnit je s 0, tj. ve správné matematické řeči, utvořit podílovou algebru $\mathscr{B}/\mathscr{F}$.

Tento proces identifikace funguje, ale ne zcela dostatečně. Potíž je topologická. Můžeme mít posloupnost vyškrtnutých matic, která konverguje k matici nevyškrtnuté. Jinými slovy množina $\mathscr{F}$ není uzavřená a to způsobuje některé nepříjemnosti. Léčba je jednoduchá: uzavřeme ji. Je-li $\mathscr{K}$ uzávěr $\mathscr{F}$, matice z $\mathscr{K}$ nazveme *kompaktními*. (Příklad: je-li $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, potom A má konečnou hodnost, právě když jen konečně mnoho λ je různých od 0; A je kompaktní, právě když $\lambda_n \to 0$.) Množina $\mathscr{K}$ je uzavřeným ideálem. Skutečně prospěšný (nebo bych měl říci rozmařilý) způsob, jak prohlásit všechno konečné za triviální, je vytvořit podílovou algebru vzhledem k $\mathscr{K}$ namísto vzhledem k $\mathscr{F}$.

Invertibilita

Připomeňme nyní elementární algebraický pojem *spektra*. Spektrum matice A je podle definice množina všech komplexních čísel λ takových, že $A - \lambda$ není invertibilní. ($A - \lambda$ je zkrácený zápis pro $A - \lambda.1$.) Pro konečné matice spektrum sestává právě z vlastních čísel a speciálně spektrum diagonální matice je množina jejích diagonálních prvků. Pro nekonečné matice je invertibilita poněkud jemnějším pojmem a speciálně spektrum diagonální matice je uzávěr množiny jejích diagonálních prvků. Co znamená spektrum po vyškrtnutí konečného případu?

Problém se redukuje na tuto otázku: které matice jsou invertibilní modulo $\mathscr{K}$? V běžné řeči se matice A nazývá invertibilní, jestliže existuje matice X tak, že $AX = XA = 1$ nebo ekvivalentně $1 - AX = 1 - XA = 0$. Říci, že matice A je invertibilní modulo $\mathscr{K}$, by tedy mělo znamenat, že existuje X tak, že obě matice $1 - AX$ a $1 - XA$ jsou ztotožněny s 0 nebo – jinými slovy – jsou kompaktní. V technickém termínu, v souladu s běžně přijatým zvykem, A je *esenciálně* invertibilní. (Mnozí autoři místo toho říkají, že A je *Fredholmova* matice.) Následuje netriviální příklad. Jestliže

$$S = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \end{matrix}\right\|,$$

potom $S^*S = 1$, ale $SS^* \neq 1$; rozdíl $1 - SS^*$ je však kompaktní (skutečně, má hodnost 1). Matice S není invertibilní (její obor hodnot obsahuje jen vektory, jejichž první souřadnice jsou rovny 0), ale je esenciálně invertibilní; matice S^* funguje jako esenciální inverzní matice.

Kdy lze říci, že matice je esenciálně invertibilní? Přirozená geometrická podmínka pro obyčejnou invertibilitu je, aby lineární zobrazení, které matice reprezentuje, bylo prosté a obrazem byl celý prostor. Jinými slovy, A je invertibilní právě tehdy, když ker (A) je nula a ran (A) je celý prostor. Zkratky ker a ran po řadě znamenají jádro (což je totéž jako nulový prostor) a obor hodnot. Ekvivalentně A je invertibilní právě tehdy, když nulita (A) = kohodnost $(A) = 0$, kde nulita je dimenze jádra a kohodnost je kodimenze oboru hodnot. Slavná a užitečná Atkinsonova věta dává obdobnou geometrickou podmínku pro esenciální invertibilitu: A je esenciálně invertibilní právě tehdy, když nulita a kohodnost matice A jsou konečné.

Jak neinvertibilní může být esenciálně invertibilní matice? Jak nulita, tak i kohodnost jsou mírami neinvertibility; čím jsou větší, tím méně je matice invertibilní. Pro normální matice nulita a kohodnost splývají a v konečněrozměrném případě splývají pro všechny matice, ať jsou normální nebo ne. Pro nekonečné matice mohou být různé. Příkladem je již zmíněná matice S; nulita $(S) = 0$ a kohodnost $(S) = 1$. Rozdíl nulity a kohodnosti se nazývá (Fredholmovým) *indexem* matice, takže například index matice S je -1.

Spektrum matice je definováno v termínech invertibility a „esenciální" analogie této definice má dobrý smysl. *Esenciální spektrum* matice A je množina všech komplexních čísel λ takových, že $A - \lambda$ není esenciálně invertibilní. To je právě to, čím se pojem spektra stane, jestliže konečná dimenze je nenapravitelně vyškrtnuta. Jak to vypadá pro běžný „osvětlující" příklad diagonální matice $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$? Odpověď je jednoduchá a příjemná: esenciální spektrum matice A je množina hromadných bodů posloupnosti jejích diagonálních prvků. Jinými slovy, esenciální spektrum matice A sestává z těch komplexních čísel, která jsou limitami konvergentních nekonečných vybraných posloupností posloupnosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$; zhruba řečeno, tato čísla jsou ve spektru z nekonečně mnoha důvodů. Jestliže například

$$A = \operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{3}{4}, 0, \tfrac{4}{5}, 0, \ldots\right),$$

potom esenciální spektrum matice A sestává pouze z čísel 0 a 1.

Poněkud obtížnějším příkladem je matice S; ukazuje se, že její esenciální spektrum je jednotková kružnice $\{\lambda: |\lambda| = 1\}$. Odtud plyne, že pro $|\lambda| \neq 1$ je $S - \lambda$ esenciálně invertibilní, a proto index $(S - \lambda)$ je definován. Výpočet není triviální, ale není ani příliš hluboký; výsledkem je, že index $(S - \lambda) = -1$ pro $|\lambda| < 1$ a index $(S - \lambda) = 0$ pro $|\lambda| > 1$. Tuto otázku si lze položit pro každou matici A; čemu je roven index matice $A - \lambda$, jestliže λ není v esenciálním spektru matice A? Odpovědi definují celočíselnou funkci na doplňku esenciálního spektra, která se nazývá *indexovou funkcí* matice A a hraje důležitou roli v hlavní větě.

Weyl, von Neumann a Berg

Protože máme po ruce základní pojmy týkající se esenciální invertibility a obecněji esenciálního spektra, můžeme vyslovit základní fakta.

První základní otázka je tato: které matice jsou esenciálně diagonalizovatelné nebo, v dřívější neformální řeči, které matice jsou diagonalizovatelné, jestliže odstraníme všechno konečné? Jinými slovy: jaká je třída $\mathscr{U}^*(\mathscr{D} + \mathscr{K})\mathscr{U}$, třída matic unitárně ekvivalentních diagonálním maticím modulo $\mathscr{K}$? Pro hermitovské matice je odpověď známa dávno, je jednoduchá a uspokojivá: *každá* hermitovská matice je esenciálně ekvivalentní diagonální matici. Podrobněji: je-li A hermitovská, potom existuje diagonální matice D (s reálnými prvky na hlavní diagonále) a existuje kompaktní hermitovská matice K tak, že

$$A \cong D + K,$$

kde $\cong$ značí unitární ekvivalenci.

Jako působivý speciální případ uvažujme hermitovskou matici A, která nemá vůbec žádná vlastní čísla; takovou maticí je již uvažovaná matice $A = S + S^*$. Právě vyslovený výsledek, který mimochodem patří Weylovi (1909) a von Neumannovi (1935), implikuje, že A je esenciálně diagonalizovatelná, tj. existuje diagonalizovatelná matice B tak, že $A - B$ je zanedbatelně malá (kompaktní).

Není to úžasné? Když jsme poprvé uvažovali nekonečné matice, řekli jsme, že diagonalizace nefunguje; spektrální věta musela být mnohem mazanější. Jestliže však přestaneme imitovat konečnou dimenzi příliš otrocky a místo toho ji zcela vyškrtneme, potom výsledek je silnější a jednodušší než výsledek konečný. Snadným důsledkem Weylovy-von Neumannovy věty je tvrzení, že dvě hermitovské matice jsou esenciálně ekvivalentní právě tehdy, když mají stejné esenciální spektrum; násobnost nám již potíže nepůsobí.

Lze Weylovu-von Neumannovu větu rozšířit na normální matice? Tuto otázku jsem položil v roce 1970 a experty byla podceněna: jistě, říkali, udělej „totéž". Totéž nefungovalo. I. D. Berg byl nucen použít pozoruhodně komplikovaných úvah, aby tyto obtíže překonal a dokázal, že každý normální operátor je také unitárně ekvivalentní s nějakým $D + K$; tomuto výsledku se dnes říká Weylova-von Neumannova-Bergova věta.

Esenciální normalita

V tomto okamžiku jsme sváděni k tomu, abychom usnuli na vavřínech: esenciálně nekonečná verze věty o hlavních osách byla získána v plné obecnosti. Není tomu tak. Weylova-von Neumannova-Bergova věta dává odpověď na správnou otázku, obtížnou otázku, totiž na otázku esenciální unitární ekvivalence, ale dává odpověď pouze pro snadnější třídu matic, pro třídu normálních matic. „Správnou" třídou v esenciálně nekonečném případě je třída *esenciálně normálních* matic.

Jaké jsou a jak vznikají? Vznikají zcela přirozeně: jakmile se podíváte na definici, budete patrně překvapeni, proč jste na to nepřišli sami. Jsou to matice A takové, že $A^*A - AA^*$ je esenciálně nulová nebo jinými slovy kompaktní. Příkladem je matice S. Z toho, co bylo řečeno, je vidět, že S je esenciálně normální, ale není normální. Mohlo by se stát, že teorie pro matici S zapadne do Weylovy-von Neumannovy-Bergovy věty:

tak by tomu bylo, kdyby S byla tvaru $N + K$ s normální maticí N a kompaktní maticí K, ale tak tomu není (jak ukazuje dodatečná úvaha).

Jak je to tedy pro esenciálně normální matice? Jsou snad dvě takové matice esenciálně unitárně ekvivalentní právě tehdy, když mají stejné esenciální spektrum? Ne, to neplatí: skutečnost je zajímavější.

Matice S posouvá přirozenou vektorovou bázi o jednotku doprava. Jinými slovy, jestliže $e_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots \rangle$, $e_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots \rangle$ atd., potom $Se_1 = e_2$, $Se_2 = e_3$ atd. Uvažujme matici T, která cyklicky permutuje všechny prvky vektorové báze, například matici, jejíž působení na vektory e_n imituje permutaci

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \ldots \\ \uparrow \\ 2 \leftarrow 4 \leftarrow 6 \leftarrow 8 \ldots . \end{array}$$

Matice T vypadá takto:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

Trocha dokazování, ale ne příliš mnoho, ukazuje, že esenciální spektrum matice T, je stejné jako esenciální spektrum matice S (totiž jednotková kružnice). Protože T je normální (ve skutečnosti unitární), plyne odtud, že index matice $T - \lambda$ je roven 0 pro všechna λ mimo jednotkovou kružnici, tj. indexová funkce matice T se liší od indexové funkce matice S ve vnitřku (jednotkové kružnice). Důsledek: ačkoliv matice S a T mají stejné esenciální spektrum, nemohou být esenciálně unitárně ekvivalentní.

Jakmile jste našli překážku, snadno můžete uhodnout, jak ji obejít. (S důkazem je to ale jinak.) Překážkou je indexová funkce: dobře, zabudujme ji do věty. Výsledkem je nejhlubší a nejcennější výsledek teorie operátorů sedmdesátých let (a výsledků byla pěkná řádka!): je to věta Lawrence G. Browna (Purdue), Ronalda G. Douglase (Stony Brook) a Petera A. Fillmoreho (Dalhousie).

Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby dvě esenciálně normální matice byly esenciálně unitárně ekvivalentní, je, aby měly stejné esenciální spektrum a stejnou indexovou funkci.

Poznamenejme, že tato věta, pýcha teorie normálních matic, znovu vkládá cosi velmi podobného násobnosti (totiž index) do charakterizace (esenciální) unitární ekvivalence.

Závěr

Zakončím dvěma poznámkami, které se týkají třídy $\mathcal{N} + \mathcal{K}$; zde $\mathcal{N}$ je množina všech normálních matic a $\mathcal{K}$ množina všech kompaktních matic. Výraz $N + K$ značí jejich vektorový součet, tj. množinu všech operátorů tvaru $N + K$, kde N je z $\mathcal{N}$ a K je z $\mathcal{K}$. Jinými slovy, $\mathcal{N} + \mathcal{K}$ je množina všech kompaktních poruch normálních matic.

Je množina $\mathcal{N} + \mathcal{K}$ uzavřená? Tato otázka není životně důležitá, ale řada lidí se ji snažila bezúspěšně zodpovědět jistou dobu před BDF průlomem. Odpověď je ano; množina $\mathcal{N} + \mathcal{K}$ je uzavřená. Důkaz je téměř okamžitým důsledkem věty BDF. Plná síla věty není nutná, ale dokonce i ta část, která se potřebuje (případ, kdy indexová funkce je identicky rovna 0), byla před BDF panenským územím. Dosud není znám žádný důkaz, který by nevyužíval hloubky teorie BDF.

Přínos Browna, Douglase a Fillmoreho je skutečně velký, dal nové odvětví operátorovému průmyslu a má již řadu cenných zobecnění a aplikací. Nezodpověděl však všechny otázky. Moje druhá poznámka se týká vybrané nezodpověděné otázky: jde o problém invariantního podprostoru. Problém je následující: má každé spojité lineární zobrazení netriviální uzavřený invariantní podprostor? Pro normální operátory je kladná odpověď již klasická a snadná; pro kompaktní operátory ji lze již také nazvat klasickou (Aronszajn a Smith, 1954). Jak je to pro operátory tvaru normální plus kompaktní? Nejen že to nevíme, ale neznáme odpověď na tutéž otázku ani pro zdánlivě jednodušší třídu „hermitovský plus kompaktní".

Přeložil J. Daneš

Literatura

BROWN, L. G.; DOUGLAS, R. G.; FILLMORE, P. A.: *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras.* Proceedings of a Conference on Operator Theory (Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, 1973). Lecture Notes in Mathematics, *Vol. 345.* Springer-Verlag, Berlin 1973, str. 58—128.

Poznámka překladatele

Z názvu práce citované na konci článku je patrné, že Halmos se vůbec nezmiňuje (důvody jsou pochopitelné z dalšího textu) o rozšířeních C^*-algeber. Co jsou rozšíření C^*-algeber? Především *C^*-algebrou* budeme rozumět uzavřenou samoadjungovanou (tj. s každým T obsahující i T^*) podalgebru algebry $\mathcal{B}$ omezených matic.

Nechť X je kompaktní metrický prostor, $\mathcal{C}(X)$ algebra všech komplexních spojitých funkcí na X, $\mathcal{E}$ nějaká C^*-algebra obsahující $\mathcal{K}$ a 1, a $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{C}(X)$ C^*-morfismus (tj. homomorfismus algebry $\mathcal{E}$ do algebry $\mathcal{C}(X)$ splňující $\varphi(T^*) = \overline{\varphi(T)}$ pro $T \in \mathcal{E}$). Dvojici $(\mathcal{E}, \varphi)$ nazveme rozšířením $\mathcal{C}(X)$ pomocí $\mathcal{K}$ (nebo rozšířením $\mathcal{K}$ pomocí $\mathcal{C}(X)$ — terminologie není ustálena; dále jen *rozšířením*), jestliže

$$0 \to \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}(X) \to 0$$

je krátká exaktní posloupnost (tj. $\ker(\varphi) = \mathscr{K}$ a $\operatorname{ran}(\varphi) = \mathscr{C}(X)$), kde $\hookrightarrow$ značí vnoření. Dvě rozšíření $(\mathscr{E}_1, \varphi_1)$ a $(\mathscr{E}_2, \varphi_2)$ nazveme *ekvivalentními*, existují-li C^*-izomorfismy ψ a $\tilde{\psi}$ tak, že diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{K} \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\psi"'] & \mathscr{E}_1 \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "\tilde{\psi}"'] & & \\
 & & & \mathscr{C}(X) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{K} \arrow[r, hook] & \mathscr{E}_2 \arrow[ur, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

je komutativní. Jsou-li rozšíření $(\mathscr{E}_1, \varphi_1)$ a $(\mathscr{E}_2. \varphi_2)$ ekvivalentní, existuje unitární operátor U tak, že $\psi(K) = UKU^*$ pro $K \in \mathscr{K}$; snadno je vidět, že potom také $\tilde{\psi}(T) = UTU^*$ pro $T \in \mathscr{E}_1$ (a samozřejmě naopak).

Poznamenejme, že každé rozšíření $(\mathscr{E}, \varphi)$ indukuje C^*-monomorfismus $\tau\colon \mathscr{C}(X) \to \mathscr{B}/\mathscr{K}$ (a naopak). Proto se τ také někdy nazývá rozšířením. Není obtížné nahlédnout, že dvě rozšíření τ_1 a τ_2 jsou ekvivalentní, právě když existuje unitární operátor U tak, že $\tau_2(f) = \pi(U)\,\tau_1(f)\,\pi(U)^*$ pro $f \in \mathscr{C}(X)$, kde $\pi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}/\mathscr{K}$ je kanonická projekce. Ke každému (kompaktnímu metrickému) prostoru X existuje alespoň jedno rozšíření $\tau\colon \mathscr{C}(X) \to \mathscr{B}/\mathscr{K}$ (dokonce takové, že $\tau = \pi \circ \varrho$ pro nějakou nedegenerovanou reprezentaci ϱ algebry $\mathscr{C}(X)$ na našem vektorovém prostoru všech kvadraticky sčítatelných posloupností, tj. ϱ je C^*-morfismus $\mathscr{C}(X)$ do $\mathscr{B}$ takový, že ke každému nenulovému vektoru $\boldsymbol{x}$ existuje funkce $f \in \mathscr{C}(X)$ splňující $(\varrho(f))\,\boldsymbol{x} \neq 0$; jinými slovy, podalgebra $\varrho(\mathscr{C}(X))$ algebry $\mathscr{B}$ rozlišuje vektory).

Co mají rozšíření společného s Brownovou-Douglasovou-Fillmoreho větou? Nechť T je esenciálně normální operátor a $\mathscr{E}_T$ C^*-algebra generovaná $\mathscr{K}$, T a 1. Podílová algebra $\mathscr{E}_T/\mathscr{K}$ je komutativní a podle spektrální věty (jde o jinou spektrální větu, než o které se zmiňuje Halmos) je tedy C^*-izomorfní s algebrou $\mathscr{C}(\sigma_e(T))$, kde $\sigma_e(T)$ je esenciální spektrum operátoru T. Proto krátká posloupnost

$$0 \to \mathscr{K} \hookrightarrow \mathscr{E}_T \xrightarrow{\varphi_T} \mathscr{C}(\sigma_e(T)) \to 0$$

je exaktní, kde φ_T je restrikce π na $\mathscr{E}_T$, tj. dvojice $(\mathscr{E}_T, \varphi_T)$ je rozšíření. Dvě taková rozšíření $(\mathscr{E}_{T_1}, \varphi_{T_1})$ a $(\mathscr{E}_{T_2}, \varphi_{T_2})$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když T_1 a T_2 jsou esenciálně unitárně ekvivalentní.

Jestliže $(\mathscr{E}, \varphi)$ je rozšíření a $X \subset \mathbb{C}$, potom každý operátor algebry $\mathscr{E}$ je esenciálně normální. Je-li navíc operátor $T \in \mathscr{E}$ takový, že $\varphi(T)$ je funkce identicky rovná 1 na celém X, potom $X = \sigma_e(T)$ a rozšíření $(\mathscr{E}_T, \varphi_T)$ a $(\mathscr{E}, \varphi)$ jsou ekvivalentní. *Proto problém klasifikace esenciálně normálních operátorů je ekvivalentní s problémem klasifikace rozšíření.*

Na množině $\operatorname{Ext}(X)$ tříd ekvivalentních rozšíření lze definovat (přirozeným způsobem) operaci sčítání, při které je $\operatorname{Ext}(X)$ komutativní grupou. Dále lze ukázat, že $\operatorname{Ext}(.)$ (stejně jako $\operatorname{Hom}(\pi^1(.), \mathbb{Z})$) je kovariantní (homotopicky invariantní) funktor z kategorie kompaktních metrických prostorů do kategorie komutativních grup; navíc existuje přirozená funktoriální transformace $\operatorname{Ext}(.) \to \operatorname{Hom}(\pi^1(.), \mathbb{Z})$. Pomocí funktoru $\operatorname{Ext}(.)$ lze vybudovat teorii zobecněných Steenrodových homologií, která je duální ke

K-teorii. Zájemce o souvislosti teorie rozšíření C^*-algeber s algebraickou topologií (Bottova periodicita, věty o indexu, vyšší signatury atd.) je nutno odkázat na časopiseckou literaturu druhé poloviny sedmdesátých let.

Vraťme se ještě ke klasifikaci esenciálně normálních operátorů. Nechť $X \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina. Potom homomorfismus γ_X: $\text{Ext}(X) \to \text{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$ (viz předchozí odstavec) je izomorfismem. Homomorfismus γ_X lze názorně definovat takto ($[\ ]$ značí třídu ekvivalence v $\text{Ext}(X)$ nebo homotopickou třídu v $\pi^1(X)$): je-li $(\mathscr{E}, \varphi)$ rozšíření $\mathscr{K}$ pomocí $\mathscr{C}(X)$, $f: X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ spojitá funkce a $A \in \varphi^{-1}(f)$, potom

$$\gamma_X([(\mathscr{E}, \varphi)])[f] = \text{index}(A).$$

První kohomotopická grupa $\pi^1(X)$ je volná komutativní grupa, jejíž počet generátorů je roven počtu omezených komponent množiny $\mathbb{C} \setminus X$. Odtud je již snadno vidět, co to znamená pro rozšíření $(\mathscr{E}_T, \varphi_T)$, kde T je esenciálně normální operátor: obrazem třídy $[(\mathscr{E}_T, \varphi_T)]$ při homomorfismu γ_X (kde ovšem $X = \sigma_e(T)$) je indexová funkce operátoru T. Tím je věta BDF dokázána. Zde je nutno zdůraznit, že nejobtížnější tvrzení v důkazu jsme pouze konstatovali, ale nedokázali; omezili jsme se jen na hlavní myšlenku důkazu.

Přestože Halmos je optimista, pokud jde o zjednodušení důkazu věty BDF, jisté skutečnosti naznačují, že se asi nepodaří podat „čistě operátorový" důkaz ani důsledku věty BDF, totiž uzavřenosti množiny $\mathscr{N} + \mathscr{K}$.

(Viz ještě dodatek v Příloze, str. 24. Pozn. red.)

Proč Fourierova transformace dobře popisuje Fraunhoferovu difrakci*)

Jiří Komrska, Brno

Matematická teorie Fourierova integrálu a Fourierovy transformace v E_N má nepřeberné množství aplikací ve fyzice a technice. V E_1 prokazuje neocenitelné služby elektrotechnice, zejména teorii zpracování signálu. Dvojrozměrné aplikace Fourierova integrálu se zasloužily o renesanci optiky, především v teorii tvorby a zpracování obrazu. Doménou aplikací trojrozměrné Fourierovy transformace je analýza struktury krystalů. Zásah této matematické disciplíny do fyzikálních a technických oborů byl tak plodný, že způsobil jejich přestavbu a vyvolal vznik nových odvětví. Výrazem toho je adjektivum fourierovský v názvech oborů, s nimiž ovšem prefekt Fourier

*) První část přednášky proslovené 21. 4. 1983 na jarní škole „Image processing and computer simulation in electron microscopy", kterou pořádal IFE der AdW der DDR, Halle/Saale 18.—24. 4. 1983. Obrázky dodal autor.