Oldřich Kowalski

Thomova věta o sedmi elementárních katastrofách

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 6, 302--316

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139029

s vědomím významu matematiky a s citem pro techniku. Svými teoretickými pracemi, jež mají úzký vztah k technickému použití, pronikal do naší technické veřejnosti a tím propagoval i aplikace matematiky. Zabýval se teorií kmitů, hlavně nelineárních a kvasiharmonických kmitů, která má význam pro stavbu strojů a jejich spolehlivost. Rozvinul teorii podobnosti a ukázal, jak důležitá je metoda dimensionální analýzy pro řešení technických problémů. To je obsaženo v jeho práci *Fyzikální podobnost a teorie modelů*. Další jeho knihy jsou *Dynamika strojů*, jež byla přeložena do několika jazyků, a *Mechanika elektrických strojů točivých*.

Odborné zaměření akademika J. Kožešníka souvisí s novým prudce se vyvíjejícím oborem kybernetikou. Jeho zásluhou byl zřízen Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, jehož ředitelem je dosud. Stál u zrodu Československé kybernetické společnosti a je redaktorem členského časopisu *Kybernetika*.

Akademik J. Kožešník se zasloužil o rozvoj Československé akademie věd. Od roku 1969 zastává zodpovědnou funkci předsedy ČSAV. Je členem akademie věd SSSR, akademie věd NDR, dále polské, bulharské a mongolské akademie věd. Je dlouholetým zplnomocněným zástupcem vlády ČSSR ve Spojeném ústavu jaderných výzkumů v Dubně. Je nositelem čestného titulu „Hrdina socialistické práce". Je dvojnásobným laureátem státní ceny Klementa Gottwalda. Byla mu udělena řada vyznamenání československého i dalších socialistických států. U příležitosti jeho sedmdesátých narozenin bylo mu uděleno vysoké státní vyznamenání „Řád republiky".

Akademik J. Kožešník je dlouholetým členem Jednoty československých matematiků a fyziků. Přejeme mu, aby dosáhl dalších vynikajících výsledků ve své odborné práci, v organizační a politicko-společenské činnosti.

Thomova věta o sedmi elementárních katastrofách

Oldřich Kowalski, Praha

Účelem tohoto článku je navázat na populární informaci [4], podat přesnou formulaci Thomovy věty a současně uvést čtenáře do problematiky teorie singularit a seznámit ho přístupnou formou s některými základními pojmy jako jsou stabilita, univerzalita, transverzalita aj. Výklad je pokud možno názorný a většinou přesný; autor doufá, že určitá volnost vyjadřování, kterou si na některých místech dovolil, nevzbudí pochybnosti u čtenářů zvyklých na striktně formální výklad. Základním pramenem je pro nás kniha [5].

1. Hladká zobrazení, podvariety

Nechť $U \subset R^m[u^1, \ldots, u^m]$ je otevřená množina v kartézském prostoru. Funkce $f : U \to R$ se nazývá *třídy* C^∞ nebo *hladká*, jestliže má v U spojité parciální derivace všech řádů podle proměnných $u^1, \ldots, u^m$. Nechť $R^d[v^1, \ldots, v^d]$ je další kartézský prostor. *Zobrazení* $\varphi : U \to R^d$ se nazývá *hladké*, jestliže jeho složky $\varphi^1, \ldots, \varphi^d$ jsou vesměs hladké funkce. Konečně prosté zobrazení φ otevřené množiny $U \subset R^m$ na další otevřenou množinu $V \subset R^m$ se nazývá *difeomorfismus*, jestliže φ je hladké zobrazení a inverzní zobrazení φ^{-1} je rovněž hladké.

Nechť $U \subset R^m$, potom symbolem $C^\infty(U, R)$ budeme označovat množinu všech hladkých funkcí definovaných na U. Zavedeme do množiny $C^\infty(U, R)$ tzv. *slabou* C^∞*-topologii* takto: nechť r je nezáporné číslo a $K \subset U$ kompaktní množina. Potom budeme označovat pro každou funkci $f \in C^\infty(U, R)$

$$\|f\|_{r,K} = \sup\{|D_{\alpha_1}, \ldots, \alpha_m f(z)| \mid z \in K, \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leqq r\}.$$

Zde $D_{\alpha_1}, \ldots, \alpha_m$ označuje operátor parciálního derivování $\partial/(\partial u^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial u^m)^{\alpha_m}$.

Nyní *báze slabé* C^∞*-topologie v bodě* $f \in C^\infty(U, R)$ je tvořena všemi množinami tvaru $U(f; r, K, \varepsilon) = \{h \in C^\infty(U, R) \mid \|h - f\|_{r,K} < \varepsilon\}$, kde r probíhá všechna nezáporná celá čísla, K všechny kompaktní podmnožiny v U a $\varepsilon > 0$ všechna kladná reálná čísla.

V termínech konvergence lze předchozí vyjádřit takto: posloupnost funkcí $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ konverguje v $C^\infty(U, R)$ k funkci f právě když se každému $\varepsilon > 0$, každému celému $r \geqq 0$ a každé kompaktní množině $K \subset U$ existuje index N takový, že pro všechna $n > N$ je $\|f - f_n\|_{r,K} < \varepsilon$.

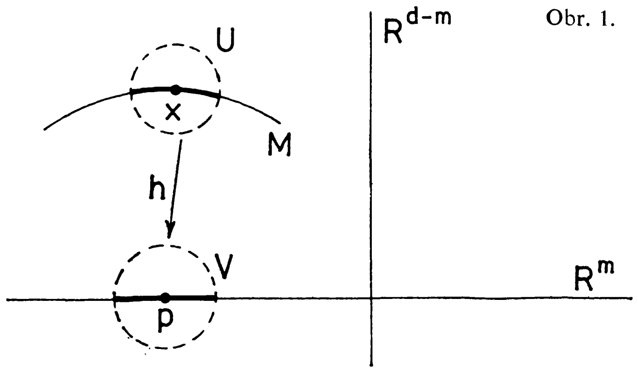
Předchozí konstrukci lze nyní zobecnit na případ d-tice funkcí, tj. definovat *prostor zobrazení* $C^\infty(U, R^d)$ *se slabou* C^∞*-topologií*. Čtenář snadno vidí, jak bychom definovali příslušnou normu $\|\varphi\|_{r,K}$, kde $\varphi : U \to R^d$ je zobrazení dané d hladkými funkcemi $\varphi^1, \ldots, \varphi^d : U \to R$. Lze ukázat, že $C^\infty(U, R^d)$ je *Bairův prostor*, tj. že v něm průnik spočetně mnoha otevřených hustých podmnožin je vždy hustá podmnožina.

Nechť $\varphi \in C^\infty(U, R^d)$ a zvolme pevný bod $p \in U$. Uvažujme dále hladké zobrazení tvaru $\gamma : (-l, l) \to U$ takové, že $\gamma(0) = p$. Takovéto zobrazení budeme nazývat *hladkou křivkou v bodě p* prostoru R^m. Nyní složené zobrazení $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : (-l, l) \to R^d$ je hladkou křivkou v bodě $\varphi(p)$ prostoru $R^d[v^1, \ldots, v^d]$; tuto křivku můžeme vyjádřit pomocí soustavy parametrických rovnic $v^j = \tilde{\gamma}^j(t)$, $t \in (-l, l)$, $j = 1, \ldots, d$. Uvažujme konečně vázaný vektor v bodě $\varphi(p)$, jehož složky v dané souřadnicové soustavě prostoru R^d jsou derivace $(d\tilde{\gamma}^j/\mathrm{d}t)_{t=0}$. Tento vektor se nazývá *tečným vektorem hladké křivky* $\tilde{\gamma}$ *v čísle* 0 (a může být případně i nulový).

V diferenciální geometrii se ukazuje, že množina vázaných vektorů prostoru R^d s počátečním bodem $\varphi(p)$, které vzniknou tímto postupem (ke všem možným hladkým křivkám γ v bodě p) tvoří vektorový podprostor určité dimenze $r \leqq m$. Tento podprostor pak nazveme *tečným prostorem zobrazení* φ *v bodě p*.

Poznamenejme, že obecně nelze mluvit o tečném prostoru zobrazení φ v bodě $\varphi(p)$, protože pro dva různé body $p, q \in U$ může platit $\varphi(p) = \varphi(q)$, přičemž příslušné tečné prostory zobrazení φ v bodech p a q mohou být navzájem různé.

Nechť dále $m \leqq d$ a ztotožněme kartézský prostor R^m s podprostorem $R^m \times \{0\}^{d-m}$ prostoru R^d. Podmnožina M kartézského prostoru R^d se nazývá *hladká (vlastní) podvarieta dimenze m*, jestliže ke každému bodu $x \in M$ existuje v R^d otevřená množina $U \ni x$, další otevřená množina V a difeomorfismus $h : U \to V$, při kterém se průnik $U \cap M$ zobrazí na otevřenou podmnožinu $V \cap R^m$ prostoru R^m. (Viz obr. 1.) Přitom bod x přejde do některého bodu $p \in R^m$. m-rozměrná hladká podvarieta má nyní tu vlastnost, že v každém jejím bodě x existuje jednoznačně definovaný *tečný prostor* $T_x(M)$, který má dimenzi m („m-rozměrná tečná rovina"). Definici tečného prostoru $T_x(M)$ lze obdržet z definice tečného prostoru zobrazení takto: uvažujme inverzní zobrazení $h^{-1} : V \to U$ k difeomorfismu h na obr. 1 a jeho restrikci $h^{-1}|_{V \cap R^m}$. Potom tečný prostor $T_x(M)$ definujeme jako tečný prostor zobrazení $h^{-1}|_{V \cap R^m}$ v bodě p. Snadno se ukáže, že tato konstrukce nezávisí na speciálním výběru zobrazení h (a v malých dimenzích má názorný geometrický význam). $T_x(M)$ je tedy m-rozměrným podprostorem prostoru všech vázaných vektorů v bodě $x \in R^d$.



Obr. 1.

Uveďme nakonec ještě poznámku o tzv. *hladkých podvarietách daných implicitně.* Platí tato věta: Nechť $f^1(v^1, \dots, v^d), \dots, f^p(v^1, \dots, v^d)$ jsou hladké funkce definované na otevřené množině $U \subset R^d$, $p \leqq d$ a nechť $M \subset U$ je množina všech řešení soustavy rovnic $f^1(v) = 0, \dots, f^p(v) = 0$. Jestliže pro každé $m \in M$ má Jacobiho matice $\|\partial f^i/\partial v^j\|_m$ hodnost p, potom je M hladká podvarieta dimenze $d - p$ prostoru R^d.

2. Ekvivalence funkcí na kartézském součinu

Nechť k a n jsou nezáporná celá čísla; budeme uvažovat kartézské prostory $R^k[u^1, \dots \dots, u^k]$ a $R^n[x^1, \dots, x^n]$ a také jejich kartézský součin $R^{k+n} = R^k \times R^n$. Zde prostor R^n budeme ztotožňovat s podprostorem $\{0\}^k \times R^n$ prostoru R^{k+n}. Pro názornost budeme podmnožiny tvaru $\{u\} \times R^n$ nazývat *vertikálními podprostory* v R^{k+n}.

Interpretace: R^k je řídící prostor a R^n prostor stavů; vertikální podprostor $\{u\} \times R^n$ vyjadřuje množinu všech myslitelných stavů odpovídajících bodu u řídícího prostoru. (Viz článek [4].)

Vertikální transformací v prostoru R^{k+n} nazveme difeomorfismus otevřené množiny $U \subset R^{k+n}$ na otevřenou množinu $V \subset R^{k+n}$, který každý vertikální podprostor převádí opět ve vertikální podprostor. (Přesněji řečeno, pro každé $u \in R^k$ existuje jednoznačně definované $u' \in R^k$ takové, že $\Phi((\{u\} \times R^n) \cap U) = (\{u'\} \times R^n) \cap V)$.) Nechť nyní $h : U \to R$, $g : V \to R$ jsou dvě funkce definované na otevřených množinách v R^{k+n} a nechť $A \in U$, $B \in V$ jsou libovolné dva body. Řekneme, že *funkce h při bodu A se dá vytvořit z funkce g při bodu B vertikální transformací nezávisle proměnných*, jestliže existuje vertikální transformace Φ některého okolí bodu A na některé okolí bodu B taková, že $\Phi(A) = B$ a $h = g \circ \Phi$.

Nechť f je další funkce, definovaná na otevřené množině $W \ni A$. Pišme $A = (a_1, a_2)$, kde $a_1 \in R^k$, $a_2 \in R^n$. Řekneme, že *funkci f lze při bodu A vytvořit z funkce h vertikální transformací závisle proměnné*, jestliže k bodu A existuje okolí tvaru $W_1 \times W_2 \subset \subset W \cap U$ $(a_1 \in W_1, a_2 \in W_2)$ a hladké zobrazení $\lambda : W_1 \times R \to R$ takové, že pro každé $u \in W_1$:

a) parciální zobrazení $\lambda_u : R \to R$ je difeomorfismem některého okolí čísla $h(u, a_2)$ na některé okolí čísla $f(u, a_2)$,

b) pro příslušné parciální funkce f_u, h_u definované na W_2 platí vztah $f_u = \lambda_u \circ h_u$.

V předešlé situaci dále řekneme, že f lze vytvořit z h *se zachováním orientace*, jestliže zobrazení λ lze volit tak, aby kromě podmínek a), a b) byla ještě splněna podmínka

c) $\mathrm{d}\lambda_u/\mathrm{d}t > 0$ pro všechna $u \in W_1$ a všechna t blízká k 0. Tedy všechna zobrazení λ_u jsou v blízkosti nuly rostoucími funkcemi.

Konečně, jsou-li dány funce $f : U \to R$, $g : V \to R$, $A \in U$, $B \in V$, potom řekneme, že *funkce f při bodu A je ekvivalentní s funkcí g při bodu B*, jestliže f lze vytvořit z g složením některé vertikální transformace Φ nezávisle proměnných $(\Phi(A) = B)$ a některé vertikální transformace λ závisle proměnné. Hovoříme o *orientované ekvivalenci*, jestliže vertikální transformaci λ lze vybrat se zachováním orientace.*)

Význam pojmu ekvivalence si můžeme nyní ilustrovat na pojmech již známých z předchozího populárního článku o teorii katastrof. Nechť $U \subset R^{k+n}$ a $f: U \to R$ je hladká funkce. *Singulární množinou* funkce f nazveme sjednocení množin všech kritických bodů funkcí f_u, $u \in R^k$, definovaných na jednotlivých vertikálních vrstvách oboru U. (Kritický bod funkce f_u je bod, ve kterém se anulují všechny parciální derivace 1. řádu). Čtenář snadno nahlédne, že při ekvivalenci funkce f s funkcí g přejde singulární množina funkce f (jako podmnožina v R^{k+n}) v singulární množinu funkce g. Přesněji, jestliže f je při bodu A vytvořena z g při bodu B pomocí vertikální transformace Φ nezávisle proměnných a vertikální transformace λ závisle proměnné, potom $\Phi(\mathrm{Sing}\, f) = \mathrm{Sing}\, g$ při restrikci na malá okolí bodů A a B. Označme dále symbolem $\mathrm{Min}\, f$ sjednocení množin všech lokálních minim funkcí f_u, $u \in R^k$, v oboru U; platí tedy $\mathrm{Min}\, f \subset \mathrm{Sing}\, f$. Jestliže f a g jsou ve vztahu *orientované* ekvivalence, potom lokálně platí $\Phi(\mathrm{Min}\, f) = \mathrm{Min}\, g$. Předpokládejme konečně, že množina $\mathrm{Sing}\, f$ je k-rozměrná hladká podvarieta v $U \subset R^{k+n}$. *Katastrofickým bodem* funkce f nazveme každý takový bod $(u, x) \in \mathrm{Sing}\, f$, v němž existuje nenulový vertikální tečný vektor, tj. takový, že tečné prostory sestrojené k podvarietě $\mathrm{Sing}\, f$ a k podvarietě $\{u\} \times R^n$ ve společném bodě (u, x) mají společný alespoň 1-dimensionální podprostor. Označíme-li množinu katastrofických bodů funkce f symbolem $\mathrm{Cat}\, f$, potom v případě ekvivalence funkce f s funkcí g platí (opět lokálně) $\Phi(\mathrm{Cat}\, f) = \mathrm{Cat}\, g$.

---

*) V literatuře se námi zavedená ekvivalence označuje přesněji jako pravolevá (nebo oboustranná) ekvivalence. Viz [5] a [6].

3. Zárodky zobrazení

Nechť X a Y jsou topologické prostory a $x \in X$. *Zárodek*) zobrazení z prostoru X do prostoru Y v bodě x* je třída ekvivalence ξ spojitých zobrazení tvaru $g : U \to Y$, kde U probíhá všechna okolí bodu $x \in X$, a $g : U \to Y$ je ekvivalentní s $h : V \to Y$ právě tehdy, když pro některé okolí $W \subset U \cap V$ bodu x platí $g_{|W} = h_{|W}$. Každý prvek $g \in \xi$ se nazývá *reprezentant zárodku* ξ. Obráceně ξ se nazývá *zárodkem zobrazení g v bodě x*.

V našem výkladu se nebudeme vždy držet této přesné terminologie, poněvadž mnohé formulace by se tím staly těžkopádnými. Často budeme zárodky mlčky nahrazovat jejich reprezentanty v tom názorném smyslu, že zárodek zobrazení v bodě x je totéž co „*zobrazení definované v okolí bodu x, přičemž toto okolí si můžeme podle potřeby libovolně zmenšit*". Tuto určitou nepřesnost si však dovolíme jen tam, kde nejde o zavádění základních pojmů teorie a kde nemůže dojít k nedorozumění.

Symbolem $\varepsilon(n, p)$ budeme označovat množinu všech zárodků hladkých zobrazení z R^n do R^p v bodě $O \in R^n$ **). Pro $p = 1$ budeme místo $\varepsilon(n, 1)$ psát $\varepsilon(n)$. $\varepsilon(n)$ má přirozenou strukturu okruhu, jak si čtenář snadno dokáže – ta je odvozena ze struktury okruhu funkcí definovaných na pevné otevřené množině $U \ni O$. Dále budeme symbolem $\mathfrak{m}(n)$ označovat jediný maximální ideál okruhu $\varepsilon(n)$; ten je definován jako množina všech zárodků hladkých funkcí $f : R^n \to R$ v bodě O takových, že $f(O) = 0$. Poznamenejme, že pro každé $r = 1, 2, \dots$ lze dobře charakterizovat r-tou mocninu ideálu $\mathfrak{m}(n)$: zárodek $f \in \varepsilon(n)$ patří do $[\mathfrak{m}(n)]^r$ právě tehdy, když se anulují všechny jeho parciální derivace v bodě $O \in R^n$ až do řádu $r - 1$ včetně. Snadno se dá také určit báze ideálu $[\mathfrak{m}(n)]^r$: je tvořena všemi funkcemi tvaru $(x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n}$, kde $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nezáporná celá čísla.

4. Rozvinutí a jejich stabilita

k-rozměrným rozvinutím zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ budeme rozumět každý zárodek $f \in \varepsilon(k + n)$ takový, že $f_{|R^n} = \eta$. Připomeňme, že prostor R^n je ztotožněn opět s podprostorem $\{0\}^k \times R^n$ prostoru R^{k+n} jako v kapitole 2.

Základním pojmem bude v dalším pojem stability rozvinutí: v knize [5] je podáno celkem 7 různých definic stability; všechny se ukazují být navzájem ekvivalentní. My zde vyložíme pojem tzv. silné stability; pro stručnost budeme dále hovořit vždy jen o stabilitě.

Definice. Rozvinutí $f \in \varepsilon(k + n)$ zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ se nazývá *stabilní* (v počátku), jestliže pro každé otevřené okolí $U \ni O$ v R^{k+n} a každého reprezentanta $f' : U \to R$ zárodku f existuje okolí $\mathcal{V} \ni f'$ v $C^\infty(U, R)$ s touto vlastností: každá funkce $g' \in \mathcal{V}$ je při některém bodu $A \in U$ ekvivalentní k funkci f' uvažované při bodu O.

Názorně vyjádřeno: nechť f' je libovolný reprezentant stabilního rozvinutí f. Potom při malých perturbacích funkce f' dostáváme vždy funkce, které v nějakém bodě oblasti perturbace mají stejné vertikální chování, jako měla funkce f' v počátku.

---

*) Anglicky „germ", francouzsky „germe".

**) O je jednodušší zápis bodu $\{0\}^n$; obecněji budeme takto označovat počátek kteréhokoliv kartézského prostoru dimenze větší než jedna.

Předpokládejme, že rozvinutí f popisuje lokálně nějaký přírodní (nebo společenský) proces ve smyslu Thomovy teorie. Protože nám jde o charakter procesu v libovolně malém okolí počátku $O \in R^k \times R^n$, je vhodnější hovořit o „události" nebo „jevu". Nyní požadavek stability rozvinutí odpovídá požadavku, aby jev byl „pozorovatelný v přírodě". Moderní věda pokládá totiž jev za pozorovatelný, jestliže jej lze (alespoň v principu) prokázat, resp. přímo reprodukovat velkým počtem experimentů. Protože však při opakovaném experimentu nikdy nemůžeme zcela přesně reprodukovat počáteční stav jevu ani vnější podmínky, při kterých se experiment koná, znamená to, že podstatné strukturální rysy zkoumaného jevu musí být invariantní vzhledem k malým perturbacím.

Jak bylo naznačeno v předchozím článku [4], Thom dokonce pokládá za pozorovatelnou v přírodě pouze katastrofickou množinu jevu (resp. rozvinutí). Stabilita nyní znamená, že při malých perturbacích rozvinutí se „zárodek" katastrofické množiny v podstatě nezmění ale pouze „diferencovatelně deformuje" a „přemístí" do blízkého bodu prostoru dvojic „řídicí bod — stav" (srv. konec kapitoly 2).

Platí toto „algebraické" kritérium stability:

Rozvinutí $f \in \varepsilon(k + n)$ zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ je stabilní právě tehdy, když každý zárodek $\vartheta \in \varepsilon(n)$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\text{(1)} \qquad \vartheta(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n)\, \vartheta^i(x^1, \dots, x^n) + \\ + \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \frac{\partial f}{\partial u^j}(0, \dots, 0; x^1, \dots, x^n) + \xi(\eta(x^1, \dots, x^n)),$$

kde $\vartheta^i(x^1, \dots, x^n) \in \varepsilon(n)$ pro $i = 1, \dots, n$, $\xi(t) \in \varepsilon(1)$ a $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ jsou konstanty.

Příklad. Ukážeme pro ilustraci, že 2-rozměrné rozvinutí $f = x^4 + ux^2 + vx$ zárodku $\eta = x^4$ je (v počátku) stabilní. Zřejmě lze každou hladkou funkci $\vartheta(x)$ v okolí počátku vyjádřit ve tvaru $\vartheta(x) = \vartheta(0) + \vartheta'(0) \, . \, x + (1/2)\, \vartheta''(0) \, . \, x^2 + G(x) \, . \, x^3$, kde G je hladká funkce. Nyní $(\partial f/\partial u)(O, x) = x^2$, $(\partial f/\partial v)(O, x) = x$, $(\partial \eta/\partial x) = 4x^3$. Stačí tedy volit $\vartheta^1(x) = (1/4)\, G(x)$, $\lambda^1 = (1/2)\, \vartheta''(0)$, $\lambda^2 = \vartheta'(0)$, $\xi = \vartheta(0) = \text{konst.}$

Naproti tomu rozvinutí $f = x^4 + ux$ zárodku $\eta = x^4$ je zřejmě nestabilní (funkci $\vartheta(x) = x^2$ nelze vyjádřit v požadovaném tvaru (1)).

V Thomově teorii se dokazuje, že stabilita rozvinutí je ekvivalentní každé ze dvou jiných základních vlastností, kterými jsou *univerzalita* a *transverzalita*. Navíc nás bude zajímat, pro jaké zárodky $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ vlastně existuje stabilní rozvinutí (tj. jaké mohou být okamžité stavy námi vyšetřovaných procesů). Těmto úvahám věnujeme následující kapitoly.

5. Univerzalita

Nechť $f \in \varepsilon(r + n)$ a $g \in \varepsilon(s + n)$ jsou po řadě r-rozměrné a s-rozměrné rozvinutí téhož zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$. *Homomorfismem rozvinutí f do g* nazveme dvojici zárodků (Φ, λ), kde $\Phi \in \varepsilon(r + n, s + n)$ a $\lambda \in \varepsilon(r + 1)$, splňující tyto podmínky (formulované pro názornost v pojmech reprezentantů):

(a) Φ je vertikální hladké zobrazení z okolí počátku v R^{r+n} do okolí počátku v R^{s+n}, tj. vertikální množiny převádí opět ve vertikální množiny,

(b) na vertikálním prostoru v počátku operuje Φ „identicky", tj. $\Phi(\{0\}^r, x) = (\{0\}^s, x)$ pro všechna $x \in R^n$ blízká k $\{0\}^n \in R^n$,

(c) funkci f lze vytvořit z funkce g pomocí vertikální substituce Φ nezávisle proměnných, po které následuje ještě vertikální transformace λ závisle proměnné (v témže smyslu jako v kapitole 2),

(d) $\lambda(\{0\}^r, t) = t$ pro všechna $t \in R$.

Poznamenejme, že vertikální substituce Φ je zřejmým zobecněním vertikální transformace z kapitoly 2. Podmínky (b) a (d) vyjadřují přirozený požadavek, že při homomorfismu se jedno rozvinutí zárodku η zobrazuje do jiného rozvinutí, ale sám zárodek η není substitucemi Φ a λ ovlivněn, „zůstává na místě".

Řekneme nyní, že rozvinutí f zárodku η je *indukováno* rozvinutím g téhož zárodku, jestliže existuje homomorfismus (Φ, λ) rozvinutí f do g.

Jako příklad uveďme, že je-li f r-rozměrné *konstantní rozvinutí*, tj. takové, že $f(u, x) = f(O, x) = \eta(x)$ pro každé $u \in R^r$, $x \in R^n$, a g je libovolné rozvinutí zárodku η, potom f je indukováno g. Zde stačí volit Φ a λ „konstantní", tj. $\Phi(u, x) = (\{0\}^s, x)$, $\lambda(u, t) = t$ pro každé u, x a t.

Nyní se *univerzálním* nazývá takové rozvinutí g zárodku η, kterým může být indukováno jakékoliv jiné jeho rozvinutí f.*)

Dvě rozvinutí f a g zárodku η se nazývají *izomorfní*, jestliže existuje homomorfismus f do g a homomorfismus g do f, jejichž složením se obdrží identický homomorfismus (Φ, λ) rozvinutí f na f (resp. g na g), tj. takový, kde Φ je identické zobrazení a $\lambda(u, t) = t$ pro každé u a t. Nutnou podmínkou pro izomorfismus dvou rozvinutí je, aby měla stejnou dimenzi. Dá se dokázat, že dvě univerzální rozvinutí téže dimenze zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ jsou vždy izomorfní.

Zajímají nás nyní dvě otázky:

a) K jakým zárodkům η vlastně existuje univerzální (a tedy i stabilní) rozvinutí?

b) Jak se dá sestrojit univerzální rozvinutí nejmenší možné dimenze?

6. Konečně určené zárodky

Nechť f a g jsou zárodky z $\mathfrak{m}(n)$; f a g lze tedy reprezentovat funkcemi definovanými v okolí počátku prostoru R^n, přičemž $f(O) = g(O) = 0$.

Zárodky f a g nazveme *ekvivalentní* (a píšeme $f \sim g$) jestliže existuje difeomorfismus φ okolí počátku $O \in R^n$ na jiné jeho okolí, $\varphi(O) = O$, a difeomorfismus ψ okolí počátku $0 \in R$ na jiné jeho okolí, $\psi(0) = 0$, takové, že $f = \psi \circ g \circ \varphi$. Tedy f lze obdržet z g provedením „obyčejné" transformace nezávisle proměnných a transformace závisle proměnné.

Řekneme nyní, že zárodek $f \in \mathfrak{m}(n)$ je *r-určený*, jestliže každý zárodek $g \in \mathfrak{m}(n)$, který má v počátku všechny parciální derivace až do řádu r stejné jako zárodek f, je již ekvi-

*) V některých pramenech (viz [2], [6]) se místo názvu „univerzální" používá název „verzální" a termín univerzální je vyhrazen pro univerzální rozvinutí nejmenší možné dimenze daného zárodku.

valentní k zárodku f. Protože mezi funkcemi g, které zde přicházejí v úvahu, vystupuje i Taylorův polynom stupně r funkce f v počátku, rozhoduje o tom, zdali f je či není r-určený, právě tento Taylorův polynom $T_0^r f$.

Dále, zárodek $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ se nazývá *konečně určený*, jestliže je r-určený pro některé $r = 0, 1, \ldots$. Pro konečnou určenost platí nyní toto jednoduché algebraické kritérium: *Zárodek $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ je konečně určený když a jen když pro některé r platí*

$$[\mathfrak{m}(n)]^r \subset \left\langle \frac{\partial\eta}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\eta}{\partial x^n} \right\rangle \tag{2}$$

kde na pravé straně vystupuje ideál okruhu $\varepsilon(n)$ vytvořený příslušnými zárodky.

Podle poznámky na konci kapitoly 3 snadno zjistíme, že konečná určenost je ekvivalentní s tímto požadavkem: pro některé r obsahuje ideál $\langle \partial\eta/\partial x^1, \ldots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$ všechny mocniny $(x^1)^r, \ldots, (x^n)^r$.

Příklady. Všechny lineární (nekonstantní) mnohočleny v proměnných $x^1, \ldots, x^n$ dávají konečně určené zárodky v $\mathfrak{m}(n)$, a to i tehdy, když nezávisejí na všech n proměnných. Pro dvě proměnné x, y je polynom 2. stupně $\eta = ax^2 + 2bxy + cy^2$ konečně určený v $\mathfrak{m}(2)$ právě tehdy, když diskriminant $b^2 - ac \neq 0$. Méně triviální příklad: polynomy $x^3 + y^3$, $x^3 + xy^2$ dávají konečně určené zárodky v $\mathfrak{m}(2)$, zatímco polynom $x^3 + x^2y$ nikoliv.

Platí nyní základní věta:

Zárodek $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ připouští univerzální (a tedy stabilní) rozvinutí právě tehdy, když je konečně určený.

Tím je zodpověděna otázka a) z předešlé kapitoly.

7. Minimální univerzální rozvinutí

Odpověď na otázku b) je triviální, pokud je zárodek η „regulární" v počátku, tj. $\eta \in \mathfrak{m}(n) \setminus [\mathfrak{m}(n)]^2$. Potom sám zárodek η tvoří 0-rozměrné univerzální rozvinutí zárodku η. Skutečně alespoň jedna z derivací $\partial\eta/\partial x^i$ je v počátku $\neq 0$, tedy funkce $1/(\partial\eta/\partial x^i)$ určuje zárodek z $\varepsilon(n)$ a odtud jednička patří do ideálu $\langle \partial\eta/\partial x^1, \ldots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$. Podle vzorce (1) je η stabilní rozvinutí, tedy je i univerzální. Pozorný čtenář si může totéž dokázat i přímo z definice stability.

Nechť nyní η je singulární, což je případ, o který nám hlavně jde. Platí tato věta:

Nechť $\eta \in [\mathfrak{m}(n)]^2$ je konečně určený zárodek. Potom nejmenší dimenze univerzálního rozvinutí pro η je dána dimenzí vektorového prostoru $\mathfrak{m}(n)/(\langle \partial\eta/\partial x^1, \ldots, \partial\eta/\partial x^n \rangle + \eta^*\mathfrak{m}(1))$ *nad tělesem R. Zde* $\eta^*\mathfrak{m}(1)$ *označuje podprostor všech zárodků složených funkcí tvaru $\xi(\eta)$, kde $\xi \in \mathfrak{m}(1)$.*

Protože pro některé r je splněna inkluze (2), vidíme, že dimenze uvedeného vektorového prostoru je nanejvýš rovna dimenzi faktor-prostoru $\mathfrak{m}(n)/[\mathfrak{m}(n)]^r$, tedy je to vždy konečné číslo.

Vezměme nyní důležitý speciální případ: nechť $\eta \in [\mathfrak{m}(n)]^2$ je polynom stupně l takový, že $[\mathfrak{m}(n)]^l \subset \langle \partial\eta/\partial x^1, \ldots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$ a navíc $\eta \in \langle \partial\eta/\partial x^1, \ldots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$, tedy i

$\eta^*\mathfrak{m}(1) \subset \langle \partial\eta/\partial x^1, \dots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$. Potom obdržíme snadno explicitní vzorec pro konstrukci minimálního univerzálního rozvinutí zárodku η ve tvaru

$$f(u, x) = \eta(x) + u^1 a_1(x) + \dots + u^s a_s(x) \tag{3}$$

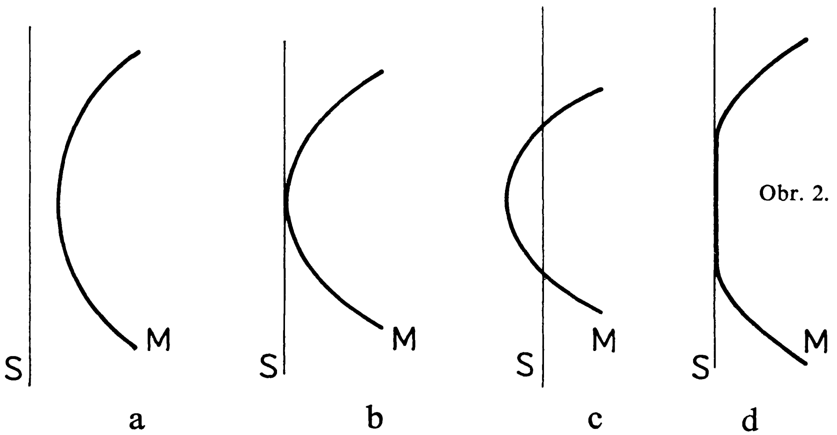
kde $u^1, \dots, u^s$ jsou nové proměnné a $a_1(x), \dots, a_s(x)$ jsou polynomy stupně nanejvýš $l - 1$, které tvoří bázi modulo $\langle \partial\eta/\partial x^1, \dots, \partial\eta/\partial x^n \rangle$ vektorového prostoru nad R všech polynomů stupně $\leqq l - 1$ v proměnných $x^1. \dots, x^n$ (bez konstantního členu). Snadno se přesvědčíme, že kritérium stability (1) je pro rozvinutí (3) splněno.

Příklad. Zárodek $\eta = x^3 + y^3$ má derivace $\partial\eta/\partial x = 3x^2$, $\partial\eta/\partial y = 3y^2$; platí tedy $\eta \in \langle \partial\eta/\partial x, \partial\eta/\partial y \rangle$ a odtud dostaneme minimální univerzální rozvinutí ve tvaru $f = x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$.

8. Transverzalita

Druhou vlastností ekvivalentní se stabilitou je speciální druh transverzality. Poznamenejme, že obecné výsledky o transverzalitě dávají důležitý nástroj pro odvození „algebraických" kritérií stability, takových jako je např. vzorec (1). Kromě toho je pojem transverzality jedním ze základních pojmů diferenciální topologie. Proto o tomto pojmu pojednáme trochu šířeji, než je nezbytně nutné.

Nechť $S \subset R^d$ je m-rozměrná hladká podvarieta a $\varphi : U \to R^d$ hladké zobrazení, kde U je otevřená podmnožina některého prostoru R^n. Řekneme, že *φ je transverzální k podvarietě S v bodě $x \in U$*, jestliže buď 1. $\varphi(x) \notin S$, nebo 2. $\varphi(x) \in S$ a tečný prostor zobrazení φ v bodě x spolu s tečným prostorem podvariety S v bodě $\varphi(x)$ generují vektorový prostor všech vázaných vektorů prostoru R^d v bodě $\varphi(x)$. Dále řekneme, že *φ je transverzální k S na U*, jestliže je transverzální k S v každém bodě $x \in U$.



Obr. 2. a) b) c) d)

Poznamenejme, že když φ je transverzální k S na U a $m + n < d$, potom nemůže pro žádné $x \in U$ nastat případ 2, a tedy platí $\varphi(U) \cap S = \emptyset$.

Jako zvláštní případ transverzality zobrazení můžeme uvažovat transverzalitu podvariety vzhledem k jiné podvarietě (viz konstrukci z kapitoly 1). Na obr. 2 je znázorněna dvojice podvariet dimenze 1 v rovině R^2; v prvním a třetím případě jsou podvariety dvojice navzájem transverzální ve všech bodech, v druhém a čtvrtém případě je transverzalita v některých bodech porušena.

Z předešlých příkladů lze intuitivně vytušit toto: jestliže zobrazení φ je „všude" transverzální k podvarietě S v R^d, potom každé zobrazení ψ blízké k φ ve smyslu slabé C^∞-topologie je opět všude transverzální k S. Naopak, jestliže φ není transverzální v některém bodě k S, potom lze vhodnou, ale přitom libovolně malou perturbací zobrazení φ zjednat všude transverzalitu. Přitom slovo „všude" lze chápat v jistém smyslu globálně.

Skutečně, tzv. *slabá věta o transverzalitě* říká, že ta zobrazení z $C^\infty(U, R^d)$, která jsou transverzální k dané hladké podvarietě S *na kompaktní podmnožině* $K \subset U$, tvoří otevřenou a všude hustou podmnožinu prostoru $C^\infty(U, R^d)$ vzhledem k slabé C^∞-topologii. Pokud se nechceme omezovat na kompaktní podmnožinu, můžeme dokázat pouze to, že zobrazení z $C^\infty(U, R^d)$, která jsou transverzální k S všude na U, tvoří hustou podmnožinu, která je spočetným průnikem hustých otevřených podmnožin v $C^\infty(U, R^d)$.

Vyslovíme nyní Thomovu větu, která pojednává o vlastnostech transverzality vyššího řádu, a to v poněkud speciálnějším tvaru, vhodném pro naše účely.

Pro názornost budeme vlastnosti vyššího řádu zobrazení a jejich zárodků reprezentovat pomocí Taylorových polynomů*). Označme symbolem $J^r(n, p)$ množinu všech p-tic $(T_1, \ldots, T_p)$, kde $T_1, \ldots, T_p$ jsou polynomy stupně nanejvýš r v proměnných $x^1, \ldots, x^n$. $J^r(n, p)$ můžeme přirozeným způsobem ztotožnit s některým kartézským prostorem R^N, kde $N = p(C^0_{n-1} + \ldots + C^r_{n+r-1})$. Nyní pro $U \subset R^n$ a hladké zobrazení $\varphi : U \to R^p$ nechť $J^{r\phi} : U \to J^r(n, p)$ je hladké zobrazení definované takto: pro každé $y \in U$ definujeme zárodek zobrazení $\varphi_y \in \varepsilon(n, p)$ tím, že položíme $\varphi_y(x) = \varphi(y + x)$ pro všechna x blízká k O v R^n. Nechť $\varphi^1_y, \ldots, \varphi^p_y \in \varepsilon(n)$ jsou složky zárodku φ_y. Potom definujeme $(J^r\varphi)(y) = (T^r_0\varphi^1_y, \ldots, T^r_0\varphi^p_y)$, kde T^r_0 označuje Taylorův polynom stupně r vypočítaný z příslušného zárodku v počátku $O \in R^n$. Nyní platí:

Thomova věta o transverzalitě. *Nechť U je otevřená podmnožina v R^n; nechť r je nezáporné číslo a M hladká podvarieta v $J^r(n, p)$. Nechť A označuje množinu všech hladkých zobrazení $\varphi : U \to R^p$ takových, že zobrazení $J^r\varphi$ je transverzální k M všude na U. Potom A je spočetným průnikem otevřených hustých množin v $C^\infty(U, R^p)$ (a podle Bairovy vlastnosti je sama hustou podmnožinou v $C^\infty(U, R^p)$).*

Thomova věta je jednou z nejdůležitějších pomocných vět v teorii singularit a kromě odvození vzorce (1) pro stabilitu má ještě mnoho dalších aplikací.

Uvedeme nyní definici r-transverzálního rozvinutí. Nechť $J^r_0(n, 1) \subset J^r(n, 1)$ označuje množinu všech polynomů stupně nanejvýš r v proměnných $x^1, \ldots, x^n$ *a bez absolutního členu*. Tedy dim $J^r_0(n, 1) =$ dim $J^r(n, 1) - 1$. Nechť dále $U \subset R^{k+n}$ je otevřená množina

---

*) V odborné literatuře se v takovýchto úvahách zpravidla používá pojmu *jetu*, který do diferenciální geometrie zavedl Ch. EHRESMANN.

a $g : U \to R$ hladká funkce. Potom definujeme hladké zobrazení $j^r g : U \to J_0^r(n, 1)$ takto: pro každé $(u, y) \in U$ definujeme nejprve zárodek $g_{(u,y)} \in \mathfrak{m}(n)$ tak, že položíme

$$g_{(u,y)}(x) = g(u, y + x) - g(u, y), x \in R^n .$$

Potom položíme $(j^r g)(u, y) = T_0^r g_{(u,y)}$. Názorně řečeno, $j^r g$ se tvoří výpočtem parciálního Taylorova polynomu vzhledem k vertikálním proměnným se zanedbáním absolutního členu.

Nechť $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ a $[\eta]$ je množina všech zárodků ekvivalentních v počátku s η (viz kapitolu 6). Tedy $[\eta] \subset \mathfrak{m}(n)$. Dá se ukázat, že množina všech Taylorových polynomů $T_0^r \xi$, $\xi \in [\eta]$, je hladkou podvarietou v $J_0^r(n, 1)$; označme ji $T_0^r[\eta]$.

Definice. Rozvinutí $f \in \varepsilon(k + n)$ zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ se nazývá *r-transverzální*, jestliže zárodek zobrazení $j^r f$ je transverzální v počátku vzhledem k podvarietě $T_0^r[\eta] \subset J_0^r(n, 1)$.

Platí pak tato věta:

Rozvinutí $f \in \varepsilon(k + n)$ zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ je univerzální právě tehdy, když je r-transverzální pro každé $r = 0, 1, \ldots$

Z Thomovy věty o transverzalitě pak není těžké dokázat, že *množina reprezentantů všech univerzálních (a tedy stabilních) rozvinutí na otevřené množině $U \subset R^{k+n}$ je spočetným průnikem hustých otevřených množin v $C^\infty(U, R)$, a je tedy hustou množinou v $C^\infty(U, R)$.* (Hustá množina uvedeného typu se nazývá *reziduální*, viz [6].)

Speciálně *generické funce* o kterých se hovořilo v předchozím článku [4], můžeme nyní definovat přesně jako reprezentanty stabilních rozvinutí na dané otevřené množině $U \ni O$.

9. Redukce rozvinutí

Nechť $\mu \in \mathfrak{m}(n)$, a $g \in \varepsilon(r + n)$ je rozvinutí zárodku μ. Dále nechť $\eta \in \mathfrak{m}(n + q)$ a $f \in \varepsilon(r + s + n + q)$ je rozvinutí zárodku η. Řekneme, že f *se dá orientovaně redukovat na g s indexem λ*, jestliže f je orientovaně ekvivalentní (jako $(r + s)$-rozměrné rozvinutí zárodku η) k $(r + s)$-rozměrnému rozvinutí $g' \in \varepsilon(r + s + n + q)$ danému vztahem

$$g'(u, v, x, y) = g(u, x) - (y^1)^2 - \ldots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \ldots + (y^q)^2 \tag{4}$$

$$(x \in R^n, y \in R^q, u \in R^r, v \in R^s) .$$

Ekvivalence dvou rozvinutí je přitom chápána jako ekvivalence vhodných dvou jejich reprezentantů, a to ve smyslu kapitoly 2, tj. jako ekvivalence funkcí v okolí počátku na kartézském součinu $R^{r+s} \times R^{n+q}$. Jak je vidět z formule (4), g' není již obecně rozvinutím zárodku η, ale jiného zárodku $\eta' \in \mathfrak{m}(n + q)$.

Řekneme dále, že f *se dá redukovat na g s indexem λ*, jestliže se dá orientovaně redukovat s indexem λ na g nebo na $-g$. Pokud nelze redukcí snížit dimenzi rozvinutí ani dimenzi vertikálních podprostorů, potom nazveme rozvinutí *f ireducibilní.*

Je zřejmé, že ekvivalence rozvinutí zachovává jejich stabilitu. Pomocí vzorců (1) a (4) si nyní čtenář snadno dokáže, že redukcí stabilního rozvinutí (při libovolném indexu λ) se obdrží zase stabilní rozvinutí. Z každého stabilního rozvinutí lze tak získat ireducibilní stabilní rozvinutí.

Z kapitoly 2 víme, že množiny Sing (f) a Sing (g') jsou lokálně ve vzájemně jednoznačné korespondenci. Množinu Sing (g') však můžeme jednoduše popsat pomocí množiny Sing (g): podle (4) zřejmě platí Sing $(g') =$ Sing $(g) \times R^s \times \{0\}^q$. Můžeme tedy říci, že singulární množina funkce f se lokálně redukuje na singulární množinu funkce g. Podobným způsobem se katastrofická množina funkce f redukuje na katastrofickou množinu funkce g. Rozhodující význam pro kvalitativní analýzu mají proto pouze ireducibilní rozvinutí – pro ty již singulární a katastrofické množiny nelze takovýmto triviálním způsobem zjednodušovat.

Jestliže se nyní f orientovaně redukuje na g *s indexem* 0, tj. když $g'(u, v, x, y) = g(u, x) + (y^1)^2 + \ldots + (y^q)^2$, vidíme navíc, že Min $g' =$ Min $g \times R^s \times \{0\}^q$ (v blízkosti počátku). Lze tedy říci, že Min f se lokálně redukuje na Min g.

10. Thomova věta

Nechť opět $f \in \varepsilon(k + n)$ je rozvinutím zárodku $\eta \in \mathfrak{m}(n)$. Řekneme, že f má v bodě O *jednoduché minimum*, jestliže η je orientovaně ekvivalentní se zárodkem $Q(x^1, \ldots, x^n) = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. V tom případě lze ihned ukázat, že η je 0-rozměrné univerzální rozvinutí sebe samého (vzorec (1)), a protože f je indukováno pomocí η, je izomorfní s konstantním rozvinutím zárodku η. Odtud ihned vidíme, že f lze redukovat s indexem 0 na triviální rozvinutí $\mathbf{O} \in \mathfrak{m}(0)$. (Tento případ odpovídá „regulárnímu", nekatastrofickému procesu.)

Budeme dále definovat pojem podobnosti: *podobnost* je nejmenší relace ekvivalence ϱ na množině všech rozvinutí s tou vlastností, že když se f dá redukovat na g s některým indexem λ, potom $f \varrho g$.

Řekneme konečně, že rozvinutí $f \in \varepsilon(k + n)$ *má lokální minima blízko* O, jestliže pro každé okolí $U \ni O$ a každého reprezentanta $f' : U \to R$ existuje bod $(u, x) \in U$, v němž má parciální funkce $f'|_{(\{u\} \times R^n) \cap U}$ lokální minimum. Zde je postačující, ale *nikoliv nutnou* podmínkou, aby zárodek η měl lokální minimum v počátku. Položíme-li např. $\eta(x) = x^3$, $f(u, x) = x^3 + ux$, pak f má lokální minima blízko O, ale nikoliv v bodě O. „Lokální minima" chápeme přitom obecně jako neostrá lokální minima.

Vyslovíme nyní přesné znění Thomovy klasifikační věty.

Věta. (*Thomův seznam sedmi elementárních katastrof.*) *Nechť* $f \in \varepsilon(k + n)$ *je rozvinutí zárodku* $\eta \in [\mathfrak{m}(n)]^2$. *Předpokládejme, že f je stabilní a má lokální minima blízko* O, *a dále předpokládejme* $k \leqq 4$. *Potom má f buď jednoduché minimum v bodě* O, *nebo se f redukuje s indexem* 0 *na jedno ze sedmi ireducibilních rozvinutí* g_i *zárodků* μ_i *uvedených v tabulce.* (Viz tabulku katastrof na následující stránce.) *Žádná dvě z těchto rozvinutí nejsou navzájem podobná a žádné z nich není podobné triviálnímu rozvinutí* $\mathbf{O} \in \mathfrak{m}(0)$.

Poznámka 1. Případ $\eta \in \mathfrak{m}(n) \setminus [\mathfrak{m}(n)]^2$, který jsme vyloučili z našich úvah (viz kapitolu 7) znamená, že pro jakékoliv rozvinutí f je množina Sing f v okolí počátku prázdná. Takové rozvinutí tedy nezobrazuje reálný proces v našem pojetí, protože při reálném procesu se stavy, jak víme, ustalují v bodech množiny Sing f.

Poznámka 2. Předpoklad, že f má lokální minima blízko O je opět motivován snahou, aby rozvinutí f popisovalo nějaký reálný proces (kdy stavy se ustalují v bodech množiny $\mathrm{Min}\, f \subset \mathrm{Sing}\, f$). Pro Thomovu klasifikaci však tento předpoklad není podstatný; větu by bylo třeba jen vyslovit v poněkud pozměněném tvaru (připustili bychom redukce s libovolným indexem λ).

Tabulka katastrof

Název*)	μ_i	g_i	Dimenze rozvinutí
fold	$\mu_1(x) = x^3$	$g_1(x, u) = x^3 + ux$	1
cusp	$\mu_2(x) = x^4$	$g_2(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$	2
swallowtail	$\mu_3(x) = x^5$	$g_3(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	3
butterfly	$\mu_4(x) = x^6$	$g_4(x, u, v, w, t) =$ $= x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$	4
hyperbolic umbilic (wave crest)	$\mu_5(x) = x^3 + y^3$	$g_5(x, y, u, v, w) =$ $= x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$	3
elliptic umbilic (hair)	$\mu_6(x, y) =$ $= x^3 - xy^2$	$g_6(x, y, u, v, w) =$ $= x^3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) +$ $+ vx + wy$	3
parabolic umbilic (mushroom)	$\mu_7(x, y) =$ $= x^2y + y^4$	$g_7(x, y, u, v, w, t) =$ $= x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx +$ $+ ty$	4

*) Možné české překlady: záhyb, hrot, vlaštovčí ocas, motýl, hřeben vlny, srst, houba.

Poznámka 3. Čtenář jistě postřehl, že rozdíly mezi tabulkou katastrof v předchozím populárním článku a naší tabulkou jsou zcela nepodstatné. Nejlépe si to ozřejmí, když si vyřeší následující cvičení.

Cvičení. Metodou uvedenou v kapitole 7 odvoďte k zárodkům $\mu_1, \ldots, \mu_7$ Thomovy tabulky příslušná minimální univerzální rozvinutí $g_1, \ldots, g_7$. Dále pro každé rozvinutí g_i napište implicitní vyjádření množiny $\mathrm{Sing}\, g_i$ pomocí soustavy rovnic – ukažte pak, že tato množina je hladkou podvarietou dimenze k_i v příslušném prostoru $R^{k_i} \times R^{n_i}$ (srv. kapitolu 1).

Z Thomovy věty, jejího zobecnění uvedeného v Poznámce 2 a ze vzorce (4) pak dostáváme tento důsledek: je-li $k \leqq 4$ a $f \in \varepsilon(k + n)$ je stabilní rozvinutí, potom je v okolí počátku množina $\mathrm{Sing}\, f$ hladkou podvarietou dimenze k v R^{k+n}. Důkaz opět přenecháme čtenáři jako užitečné cvičení.

11. Komentář na závěr

Thomova věta dává lokální popis tzv. elementárních katastrof v případě, že $k \leq 4$. Dosud jsme zde neobjasnili slovo „elementární“, což je možné učinit pouze v širších souvislostech. Také bychom rádi něco řekli o globálním popisu procesů, a to i procesů obecnějších, než jsme dosud studovali.

Předpokládejme, že jsou dány dvě hladké variety B a M. (Čtenář, který není obeznámen s abstraktní definicí hladké variety, si může představovat dvě hladké podvariety nějakých kartézských prostorů – tím podle tzv. Whitneyovy věty o vložení nevznikne žádná újma na obecnosti.) Varieta M se nazývá *prostor stavů* a varieta B *řídicí prostor*. Uvažujeme kartézský součin $B \times M$ a projekci $\pi : B \times M \to B$. *Procesem* nazveme libovolnou podmnožinu variety $B \times M$. Jestliže s je proces a $u \in B$, definujme s_u jako průnik $s \cap (\{u\} \times M)$, který považujeme za podmnožinu v M. Řekneme, že $u \in B$ je *regulární bod procesu s*, jestliže existuje okolí $U \ni u$ v B a homeomorfismus $h : U \times M \to U \times M$ takový, že $\pi \circ h = \pi$ na $U \times M$ a $h(s \cap (U \times M)) = U \times s_u$. Tedy v okolí regulárního bodu je proces „ekvivalentní" s konstantním procesem. *Katastrofickou množinou procesu s* pak nazveme množinu jeho neregulárních bodů v B.

Tato definice je pro praktické využití příliš obecná. Předpokládejme proto dále, že na $B \times M$ je dáno hladké vektorové pole X, které se všude dotýká vertikálních podprostorů $\{u\} \times M$, $u \in B$. Pro $u \in B$ pak restrikci $X_{|(\{u\} \times M)}$ můžeme uvažovat jako vektorové pole X_u na M. Nechť nyní proces splňuje předpoklad, že s_u je vždy *atraktorem* vektorového pole X_u (tj. každá trajektorie vektorového pole X_u se v limitě blíží k některému bodu $a \in s_u$). Tato situace již byla matematicky zkoumána, zůstává však zde příliš mnoho otevřených problémů (viz např. [1]).

Budeme nyní předpokládat existenci hladké funkce $V: B \times M \to R$ takové, že pro každé $u \in B$ je vektorové pole X_u gradientním polem funkce $-V_u$ (zde V_u je restrikce funkce V k vertikálnímu podprostoru $\{u\} \times M$ uvažovaná jako hladká funkce na M). Potom s_u je právě množinou lokálních minim funkce V_u pro každé $u \in B$, tedy v našem obvyklém označení platí $s = \mathrm{Min}\, V$. Matematické modely v Thomově teorii, které vzniknou z předchozí speciální situace se nazývají *gradientní modely*. *Elementární katastrofy* jsou pak právě ty katastrofy, které se objevují v případě gradientních modelů.

I v případě gradientních modelů jsou činěny některé další konvence o průběhu procesu a to hlavně z hlediska aplikace matematického modelu. *Konvence úplného prodlení* znamená, že stav procesu musí zůstat v tomtéž lokálním minimu co možno nejdéle, tj. dokud se při další změně řídicích parametrů lokální minimum nezmění v inflexní bod (přesněji řečeno v sedlový bod) a nezmizí. Právě tato konvence byla důsledně uplatňována v článku I. Vlčka a J. Zeleniece a také v některých úvahách v tomto článku (definice množiny Cat v kapitole 2). Jiná konvence je *konvence Maxvellova*: ta říká, že stav procesu vždy „vyhledává" bod absolutního minima potenciální funkce V_u, $u \in B$. Definice katastrofické množiny v $B \times M$ zřejmě záleží v tom, jakou konvenci si zvolíme.

Popis globálního gradientního procesu v Thomově teorii je pak dán „slepením" velkého počtu lokálních popisů, tedy v podstatě elementárních katastrof, jejichž redukované typy jsou dány v tabulce.

Literatura

[1] V. I. Arnoľd: *Lekcii o bifurkacijach i versaľnych semejstvach.* Uspechi mat. nauk *27* (1972).

[2] T. Bröcker: *Differential germs and catastrophes.* London Math. Society Series *17*, Cambridge Univ. Press 1975.

[3] *Osobennosti differenciruemych otobraženij, sborník statí.* Izdatělstvo „Mir", Moskva 1968.

[4] I. Vlček, J. Zeleniec: *O teorii katastrof.* PMFA, ročník *XXII* (1977), č. 5, str. 246–262.

[5] G. WASSERMANN: *Stability of Unfoldings*. Lecture Notes in Mathematics *393*. Springer-Verlag 1974.
[6] YUNG-CHEN LU: *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. Universitext, Springer-Verlag 1976.

Neštandardné číselné systémy a odôvodnenie Leibnizovho infinitezimálneho počtu

W. A. J. Luxemburg, Pasadena)*

Matematikov a filozofov vždy zaujímal problém nekonečna. Pri štúdiu rôznych otázok týkajúcich sa fyzického sveta všímali si Gréci infinitezimálne čísla, teda také, ktoré sú nekonečne malé, ale predsa kladné. Tento pojem je na prvý pohľad celkom jasne sporný. Veľa Grékov, medzi nimi EUDOXOS, EUKLIDES a ARCHIMEDES, malo hlbokú a trvalú nedôveru voči pojmu nekonečna. Táto nevôľa sa najvýraznejšie prejavila v ZENONOVÝCH paradoxoch. ARISTOTELES neuznával aktuálne nekonečno, akceptoval však pojem potenciálneho, stále rastúceho nekonečna. U Euklida má bod v priestore polohu, ale žiadnu rozlohu a dôkazom s infinitezimálnom sa Euklides vyhýba.

Tak ako Aristoteles a Euklides aj Archimedes odmietal infinitezimálno. Ukázal, ako sa dá vyhnúť infinitezimálnu Eudoxovou metódou exhaustácie. Archimedes ako prvý explicitne vyslovil, že každá aj tá najmenšia kladná veličina, ktorú dostatočne mnohokrát samu so sebou sčítame, dáva ľubovolne veľký výsledok. Táto archimedovská vlastnosť je jednou zo základných vlastností reálnych čísel. Zrejme by však infinitezimálne číslo nebolo potom archimedovské.

Infinitezimálny počet sa spočiatku zaoberá hlavne s (1) problémami kvadratúry, ako určenie obsahu priestorov a plôch, dĺžok atď., (2) otázkami zmeny prírastku. Veľmi zaujímavým historickým faktom je, že vlastne všetci, ktorí spočiatku pracovali na týchto problémoch (aj Archimedes), používali infinitezimálne čísla názorne a heuristicky. Tento spôsob myslenia dosiahol svoj vrchol v prácach HUYGENSA, LEIBNIZA, NEWTONA, BERNOULLIOVCOV, EULERA a CAUCHYHO. Newton a Leibniz našli fundamentálne vety infinitezimálneho počtu a Newton používa infinitezimálne čísla na určenie svojich fluxiónov. Považoval infinitezimálne čísla za veličiny, ktoré sa popisujú spojitými pohyb-

*) Překlad článku *Nichtstandard-Zahlsysteme und die Begründung des Leibnizschen Infinitesimalkalküls* otištěného v „Jahrbuch Überblicke Mathematik 1975" pořídila EVA GEDEONOVÁ. Pozn. red.